NOVA ACTA

REGIAE SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIAE. VOL. VIII.

FASCICULUS PRIOR.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

UPSALIAE

EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.

MDCCCLXXI.

PRINTED IN SWEDEN

NOVA ACTA

REGIAE SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

BIOLOGICAL LABORATORY LIBRARY

SERIEI TERTIAE

VOL. VIII.

FASC. I.

1871.

NOVA ACTA

REGIAE SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS

SERIES TERTIA VOL. VIII

FASCICULUS PRIOR

INDEX

HUJUS FASCICULI:

I. C.-A. Westerlund: Exposé critique des Mollusques de terre et d'eau douce . . . . . pagg. 1—202.

II. P.-M. Lundell: De Desmidiaceis, quæ in Suecia inventæ sunt . . . „ 1—100. Tab. I—V.

III. H. Gyldén: Recherches sur la rotation de la terre . . . . . „ 1—21.

IV. R. Hoppe: Systèmes de lignes et de surfaces égales . . . . . „ 1—18.

EXPOSÉ CRITIQUE

DES MOLLUSQUES DE TERRE ET D'EAU DOUCE DE LA SUÈDE ET DE LA NORVÉGE.

PAR

CARL AGARDH WESTERLUND,
DOCT. EN PHILOS.

(PRÉSENTÉ À LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSAL LE 14 NOVEMBRE 1868).

UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1871.

Je crois devoir ajourner à l'ouvrage plus étendu que je prépare sur les Mollusques terrestres et d'eau douce de la Scandinavie, l'exposé détaillé des raisons qui m'ont amené à me départir sur plusieurs points de l'usage généralement adopté, tant dans le système même qu'à l'égard de la délimitation des genres et de la nomenclature en général. Je veux seulement signaler ici en quelques mots, les principes les plus importants qui m'ont dirigé dans tels cas donnés.

Tous les types décrits dans ce présent travail, l'ont été sur des individus indigènes; je crois nécessaire de signaler ce fait, vu qu'il est entré dans notre faune diverses espèces qui n'appartenaient ni par leur nom ni par la description donnée aux exemplaires recueillis, mais que l'on a appliqué à des noms inexacts, soit les diagnoses de l'auteur même du nom, soit celles de PFEIFFER ou de ROSSMÄSSLER. Pour d'autres espèces, par contre, telles que: *Helix conspurcata*, *H. ericetorum*, et *Clausilia papillaris* NILSSON (Hist. Moll. Suec.), une détermination fautive a eu lieu sans doute, mais la description donnée est faite sur des exemplaires pris dans le pays, circonstance grâce à laquelle l'erreur est facile à découvrir et à corriger, si la description est faite avec suffisamment de détails.

Pour que la denomination ne dépende pas de l'arbitraire, il doit exister une loi rigoureusement suivie; la plus naturelle et par cela même la plus équitable, est celle de priorité. C'est cette loi qui m'a guidé tant pour les genres que pour les espèces, dès qu'elle m'a paru claire et évidente, mais en me conformant toutefois aux règles suivantes:

1:o. La priorité n'a pas été étendue plus loin que jusqu'à LINNÉ *(Syst. Nat., ed. X) le créateur du système binominal actuellement en usage, car il est nécessaire d'admette la prescription à cet égard, "sous peine de se perdre dans des ténèbres illimitées."*

2:o. Le nom générique ne disparaît par le partage du genres, mais est maintenu pour l'une des parties, savoir celle qui contient l'espèce typique primitive.

3:o. Pour qu'un nom soit valable, il est nécessaire qu'il ait été publié et clairement défini dans un livre imprimé; je n'ai pu, pour cette cause accepter des noms, venant seulement de collections privées ou publiques ou de catalogues imprimés sans description quelconque, ou encore de travaux restés à l'état manuscrit.

4:o. Modification des noms spécifiques dès qu'on les élève à la qualité de noms génériques.

5:o. Les noms spécifiques qui sont notoirement fondés sur une méprise et une erreur, ne peuvent avoir de prétentions à la priorité.

Il peut aussi se présenter des cas où le vieil axiome légal: *summa justitia*, *summa injuria*, peut devenir une vérité scientifique, et à l'égard de quelques-uns d'entre eux, l'on trouvera plus bas ma manierè de voir.

L'étude de la nature au moment où elle se préparait à devenir une science, et le commençant avant de devenir un savant procédèrent de la même manière, en amassant une multiplicité de formes sous un seul nom. Dans les deux cas, l'expérience et la perspicacité manquaient. Les grand noms: *Hypnum*, *Lichen*, *Helix*, *Turbo*, etc., sont de véritables catacombes, dans lesquelles on entarrait les formes les plus diverses, qu'un siècle entier a travaillé à séparer et à trier. Notre époque est bien près de tomber dans l'excès contraire: chaque variété devient une espèce, chaque espèce un genre, et pour ainsi dire chaque genre une famille. Ce fait n'implique toutefois pas pour la science les dangers redoutés par certains esprits conservateurs, et il est bien loin d'être aussi nuisible que le système d'accumulation des temps antérieurs. Bien au contraire, une scission même poussée trop loin, fait progresser la science, car l'on n'examine que ce qui est mis à la lumière, et la vérité finit toujours par triompher. "Non bene conjungit, qui non bene distinguit." Dans le travail actuel, j'ai préféré adopter à titre de sous-espèce un type distingué, dont je mets encore en doute la qualité spécifique (on les trouvera indiqués par des astérisques) afin d'attirer l'attention sur lui, plutôt que de l'ensevelir dans la masse de variétés d'un rang inférieur, où il aurait passé inaperçu. A des recherches ultérieures est laissée la question de juger si cette sous-espèce doit être élevée à la qualité d'espèce, ou abaissée à celle de variété. J'ai par contre été plus circonspect que la plupart des auteurs récents dans l'adoption de genres nouveaux. Plus d'une personne me reprochera peut-être cette modération, d'autant plus que celle-ci parfois est de nature a trahir un manque de connaissance.

Pour la connaissance de l'étendue, de la nature et de la force de développement des espèces; en un mot, pour la connaissance de leur histoire tout entère, il est de la plus grande importance de rechercher la signification, la valeur relative et les causes des diverses variétés. Malheureusement, ces recherches ont été beaucoup trop négligées au grand détriment de la science, et presque chaque auteur se contente d'appeler "Variétés" tous les types relevant de l'espèce, sans avoir égard à leur origine ou à leur importance. Persuadé de ce qu'il y a de peu juste dans cette manière d'agir, j'ai hasardé la tentative de les distinguer de la manière suivante:

J'appelle variétés dans le sens proprement dit de ce mot *(variationes)* les déviations bien caractérisées de la forme typique, lesquelles ne se montrent que dans la déviation d'une partie spéciale ou d'un caractère positif, tandis que l'aspect total (facies) ou les caractères principaux n'ont pas été modifiés. Les variétés se présentent dans les mêmes localités que les types principaux et ordinairement mêlées avec eux, cause pour laquelle on n'en peut attribuer l'origine à des circonstanstances extérieures, mais à une force interne de développement. Les modifications d'espèces *(aberrationes)* sont des déviations amenant par la transformation plus ou moins grande de la plupart des parties, un aspect tout différent de celui de la forme typique. Elles se présentent dans des circonstances extérieures toutes différentes de cette dernière, dépendent complètement de ces circonstances, et possèdent pour cette cause de nombreuses formes de transition, que l'on ne peut trouver chez les variétés, lesquelles ne dépendent que de caractères séparés. Les modifications d'espèces sont le plus souvent abondantes et exclusives dans la même localité, mais toute modification d'espèces peut avoir une ou plusieurs variétés. Ces modifications ne sont pas très-fréquentes chez les mollusques de terre, et diffèrent rarement à un degré bien considérable des formes typiques. Parfois elles résultent d'influences climatériques, mais ordinairement c'est la plus ou moins grande humidité du local, et surtout son manque ou sa surabondance de chaux. Les mollusques d'eau douce sont infiniment plus riches en modifications d'espèces, ce dont les genres *Limnaea*, *Unio* et *Anodonta* fournissent une foule d'exemples. Je nomme sous-espèces *(subspecies)* les formes constantes qui par leur aspect différent et par des caractères propres plus ou moins saillants, se distinguent de la forme typique avec laquelle elles se présentent souvent, ne dépendant pas, par conséquent d'une manière patente de circonstances extérieures. Elles correspondent assez bien à ce que l'on nomme des races, et reçoivent la dénomination significative mais peu correcte de "Variétés constantes." J'y ai classé les types à l'égard des

droits d'espèce desquels j'ai été incertain. Les modifications individuelles *(mutationes)* sont les variétés qui se presentent en compagnie de la forme typique, ne s'en séparant que par la couleur ou les dimensions, et paraissant plus ou moins accidentelles. Les difformités ou anomalies *(lusus)* sont toujours accidentelles et par conséquent le plus souvent rares. Elles se distinguent de la forme typique par une forme totalement différente et toujours abnorme [1]).

Il est bien possible que telle des nombreuses espèces nouvelles peut se cacher dans un ouvrage périodique que je n'ai pas à ma disposition, ou dans quelque dissertation étrangère qui m'est inconnue; mais à l'égard de la grande majorité, je sais par la littérature dont je dispose et par mes collections particuliers d'espèces extra-scandinaves, qu'elles n'ont pas été décrites jusqu'ici. Tant ces espèces que toutes les autres, ainsi que les types les plus distingués, seront reproduites en détail et avec exactitude sur les planches qui accompagneront mon travail: Fauna Molluscorum Sueciæ, Norvegiæ et Daniæ.

I.

APERÇU HISTORIQUE DE LA LITTÉRATURE DES MOLLUSQUES DE TERRE ET D'EAU DOUCE DE LA SUÈDE ET DE LA NORVÉGE.

SUÈDE.

CHARLES DE LINNÉ est le premier qui ait systématisé et réduit en science la connaissance insignifiante avant lui des mollusques de notre patrie, et qui l'ait enrichie de nouvelles découvertes. Cependant, partout dans ses écrits, mais principalement dans les derniers, ce groupe animal est traité d'une manière très superficielle. Son regard critique, son génie ordonnateur, et l'exactitude de la description l'ont abandonné avec l'intérêt. Dans la 1ère éd. de sa *Fauna Suecica* (1746) les mollusques sont divisés

[1]) J'ai indiqué par des lettres latines *(a, b, c ....)* les formes que je considère être des variétés de peu d'importance; les plus différentes sont précédées d'un trait (—) devant le nom. Les types grecs (α, β, γ ....) désignent les types que je regarde comme des modifications d'espèces, les chiffres (1, 2, 3 ....) de simples mutations individuelles, et l'astérisque (*) devant le nom trivial, les formes dans lesquelles je vois des sous-espèces.

en terrestres, lacustres et Marins, tous rangés sous le genre *Cochlea* (outre les genres *Haliotis* et *Dentalium)*, mais dans la deuxième éd. (1761), cette division a totalement disparu, et les mollusques de terre, d'eau douce et de mer sont confondus les uns avec les l'autres sans le moindre ensemble; le fil conducteur que donnaient les descriptions comparatives de la 1ère éd., est rompu, car quoique les mêmes descriptions entières ou tronquées, soient conservées, elles ne servent plus qu'à fourvoyer, leur ordre respectif etant complétement supprimé. Dans la 2de éd., le genre *Cochlea* est dissolu dans les genres *Bulla*, *Buccinum*, *Strombus*, *Murex*, *Turbo*, *Helix*, *Nerita* et *Patella*. La même édition donne comme suédois les mollusques de terre et d'eau douce suivants: [1])

Limax ater.
— *rufus.*
— *maximus.*
— *agrestis.*
Helix putris
— *pomatia.*
— *arbustorum.*
— *nemoralis.* †
— *hispida.*
— *lapicida.*
— *stagnalis.*
Helix auricularia.
— *limosa.* Qvid?
— *contorta.*
— *cornea.*
— *spirorbis.*
— *vortex.*
— *planorbis.*
— *complanata.*
— *tentaculata.*
— *fragilis.* *
— *albella.* *
— *vivipara.*
Turbo perversus.
— *muscorum.* †
Bulla fontinalis.
— *hypnorum.*
Patella lacustris.
Nerita fluviatilis.
Tellina cornea.
Mya margaritifera.
Mytilus anatinus éd. 1.

Le directeur-général A.-F. HAGSTRÖMER, donna pp. 185—191, T. VII, année 1784, du Journal hebdomadaire de Médecine et d'Histoire Naturelle (Weckoskrift för Läkare och Naturforskare), une liste de 28 espèces de coquilles trouvées dans le voisinage de Stockholm; il fut aidé en cela par le secrétaire AD. MODEER, qui publia dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences à Stockholm, 1794, p. 83—112, une Introduction à la connaissance des Invertébrés en général, Classe IV, Coquilles, Cochleata. L'espèce nommée par HAGSTRÖMER *Helix arbustorum*, est l'espèce alors inconnue en Suède, *Helix fruticum* (*Hel. arb.* n'a jamais été trouvée dans la région de Stockholm), et celle qu'il nomme *Helix nemoralis*, est *Helix hortensis*, d'après la Flore de Stockholm (p. 123) du professeur WIKSTRÖM. La *Mya* (Unio) *pictorum* Lin. y est donnée comme suédoise.

[1]) Les noms accompagnés d'une astérisque (*) indiquent de jeunes individus ou des variétés; ceux accompagnés d'une croix (†), comprennent deux espèces.

L'Intendant-économe (Oeconomi-Intend.) FISCHERSTRÖM, énumera 25 espèces mollusques du bassin du Mâlar, pp. 238—245 de son Esquisse de description du Mâlar (Utkast till en beskrifning om Mälaren, 1785).

Le professeur A.-J. RETZIUS, établit, dans sa "Dissertatio Hist. Nat. sistens nova testaceorum genera (Lundae 1788)" le nouveau genre *Unio*, et décrivit plusieurs espèces nouvelles y appartenant.

Le professeur S. NILSSON est le premier qui ait consacré à nos mollusques de terre et d'eau douce un travail descriptif spécial, fondé sur de savantes études de plusieurs années. Son *Historia Molluscorum terrestrium et fluviatilium Sueciae* (Lundae 1822, pp. XII et 124) a augmenté à un haut degré nos connaissances sur ces animaux. Voici les additions faites par NILSSON aux espèces connues avant lui comme suédoises.

Limax albus.
— *fasciatus.* †
Helix fulva.
— *aculeata.*
— *(hortensis).*
— *(fruticum).*
— *strigella.*
— *incarnata.*
— *conspurcata.* *
— *ericetorum.*
— *pulchella.* †
— *rotundata.* †
— *pygmæa.*
— *cellaria.*
— *nitida.*
— *crystallina.*
Bulimus obscurus.
— *lubricus.*
Achatina acicula.
Clausilia bidens.

Limax flavus.
— *cinereus.* †
— *cinereo-niger.*
Clausilia papillaris.
— *plicatula.*
— *rugosa.* †
Pupa costulata.
— *antivertigo.*
— *pygmæa.*
— *vertigo.*
Auricula minima.
Amphipeplea (nov. gen.) *glutinosa.*
Limnæa ovata.
— *balthica.* *
— *succinea.* *
— *peregra.*
— *palustris.*
— *fusca.* *
— *elongata.*
— *minuta.*

Limax tenellus.
Vitrina pellucida.
Helix bidentata.
Planorbis hispidus.
— *imbricatus.*
— *carinatus.*
— *nitidus.*
Valvata piscinalis.
— *cristata.*
Cyclas lacustris.
— *calyculata.*
— *obliqua.*
— *obtusalis.*
— *fontinalis.*
Unio elongatus.
— *ater.*
— *(crassus).*
— *(tumidus).*
— *limosus.* *
— *batavus.* *
Anodonta sulcata.
— *piscinalis.* *
— *intermedia.* *

Le professeur J.-E. WIKSTRÖM, aidé de M. D. S. HÖGBERG, a donné dans son Introduction à la Flore de Stockholm, (Inledning till Stockholms Flora, 1840, pp. 121—131) une liste accompagnée de renseig-

nements locaux exacts, de "51 espèces déterminées et 3 espèces indéterminées," de mollusques de terre et d'eau douce, trouvés aux environs de Stockholm.

M. D.-S. HÖGBERG, dans un travail intitulé "De quelques espèces et types nouveaux pour la Suède de mollusques terrestres et lacustres (Om några för Sverige nya arter och former af Land- och Insjö-snäckor) inséré dans les Mém. de l'Acad. des Sciences à Stockholm, année 1841, décrit pour la première fois comme suédoises les espèces: *Succinea oblonga*, *Pupa avenacea*, *P. umbilicata* et *P. edentula*, outre quelques variétés intéressantes.

Le même auteur avait publié auparavant le commencement d'une "Collection typique de coquilles suédoises" (Typsamling för Svenska snäckor).

Le professeur C.-H. BOHEMAN a signalé dans le Bulletin des Mémoires de l'Académie des Sciences à Stockholm, année 1844, les mollusques de terre et d'eau douce trouvés par lui autour de Qvickjock dans la Laponie de Luleå. *Helix harpa* est une intéressante nouveauté pour la faune suédoise.

Le docteur HANSÉN a déterminé dans le même Bulletin, année 1845: *Paludina achatina* Brug., *Paludina inflata*, nov. sp., avec la var. *β. minor*, ainsi que *Anodonta rostrata*, comme nouvelles pour notre faune. La première est identique à *P. vivipara* (Lin.), mais HANSÉN est, par sa détermination, le premier qui ait indiqué la présence de deux espèces différentes de ce genre dans notre pys. La seconde coquille est *Bythinia troschelii* Paasch et *β. minor* est *B. leachii* Sheppard et *ventricosa* Gray, cette dernière décrite par NILSSON sous le genre Paludina, mais sans nom spécifique. Dans le même Bulletin de l'année 1848, le dr HANSÉN augmente notre faune des espèces *Clausilia ventricosa* (prise par CNATTINGIUS), *Pisidium henslowianum* et *P. pulchellum*.

Le professeur V. LILLJEBORG énumère, p. 55 de ses Observationes zoologicae, II, Lundae 1845, les mollusques trouvés par lui autour de W. WRAM en Scanie; p. 88 et suiv. du Bull. de l'Acad. des Sciences à Stockholm, année 1850, il donne la liste des 38 espèces de mollusques recueillies par lui dans l'île de Gotland en 1849; et enfin il a fourni dans les Bulletins de 1851 et de 1858 de la même Académie, de précieuses contributions sous le titre de quelques variétés remarquables de Clausilia rugosa Drp., Rossm. (Några anmärkningsvärda former af Clausilia, etc). *Helix*

lamellata et la coquille nommée par moi dans ce travail-ci *Clausilia connectens* (*C. pumila, var. major* LILLJEB.), sont nouvelles pour la faune.

Le professeur E. WALMSTEDT a, dans un travail Sur le genre Clausilia et ses espèces existantes en Suède (Om Slägtet Clausilia och dess i Sverige förekommande arter), inséré p. 79—87 du Bullet. de l'Acad. des Sciences à Stockholm, année 1855, décrit une espèce nouvelle pour nous, *C. plicata* Drap., et donné d'intéressants détails sur *C. papillaris* NILSS.

Le pasteur H.-D.-J. WALLENGREN, a donné dans ses Annotations zoologiques (Anteckningar i zoologi, Dissertation Acad.. Lund, 1856, p. 81—96), un exposé monographique succinct, quoique non encore terminé, sur les espèces scandinaves du genre *Pupa*, dans lequel sont décrites comme nouveautés dans notre faune, les espèces *P. dilucida* et *P. nilssoni*, qui toutefois ne sont certainement que des variétés de *P. umbilicata*. M. WALLENGREN a inséré dans l'Année 1857 des Bullet. de l'Acad. des Sc. à Stockholm, une liste des Mollusques de terre et d'eau douce trouvés par lui dans la Scanie orientale.

Le docteur C. DE WALLENBERG explora pendant l'été de 1858, la faune des mollusques de la Laponie de Luleå, et rendit compte de ses recherches dans un travail, intitulé: *De Molluscis Lapponiae Lulensis. Dissertatio inauguralis.* Berolini, 1858, (imprimé, la même année, en allemand, avec quelques abréviations dans le Journal: Malakozoologische Blätter). Cette dissertation est d'une grande importance pour notre faune mollusque, indépendamment de la clarté, qu'elle répand sur les rapports géographiques des espèces dans les régions septentrionales qu'elle décrit. Outre une foule d'observations, l'auteur donne la description, accompagnée de figures, des espèces suivantes nouvelles pour la Suède: *(Helix viridula)*, *Pupa arctica*, nov. sp., *P. shuttleworthiana* et *P. columella*, voulant prouver que cette dernière est la coquille adulte, dont *P. edentula* est un jeune individu.

L'intendant du Musée de Gothembourg, M.-A.-W. MALM, s'est plus que nul autre après NILSSON occupé des mollusques de terre et d'eau douce de notre pays. Les résultats de ses recherches sont consignés dans les cahiers II (1851), p. 111—131, III (1855), p. 77—152, et VIII (1863), p. 135—145, des Mémoires de la Société royale des Sciences et

des Belles-Lettres de Gothembourg (Göteborgs Kongliga Vet. och Vitt. Samh. Handlingar). Les recherches surtout sur les genres *Limnæa*, *Sphaerium*, *Pisidium*, *Unio* et *Anodonta*, sont remarquables par leur développement et leur exactitude. Les espèces suivantes découvertes ou déterminées par MALM, sont nouvelles pour notre faune: *Zonites hammonis* (Helix pura Malm, non Alder), *Z. viridula? Z. alliaria* (Helix nitidula Malm, non Drap.) *Pupa substriata*, *Clausilia pumila* (C. lineolata Malm, non Held), *Succinea pfeifferi*, *Planorbis complanatus*, *Hydrobia steini* (Bythinia viridis Malm), *Pisidium nitidum*, *P. personatum* nov. sp., *P. arcæforme* nov. sp. et *P. obtusale*. Le plus récent traité de M. MALM sur cette matière, porte le titre de Limaces terrestres (limacina) de la Scandinavie, décrites et dessinées sur des exemplaires vivants (Skandinaviska Land Sniglar, *Limacina*, afbildade efter lefvande exemplar och beskrifna). Ce traité est consigné p. 26—93, pl. 1—5, en Xème Cahier (1868) des Mémoires de la Société des Sciences et des Belles-Lettres de Gothembourg. *L'Hydrolimax laevis* est nouveau pour notre faune.

Le docteur C.-A. GOSSELMAN a donné dans ses Observations zoologiques et géologiques sur le Blekinge (Zoologiska och Geologiska Iakttagelser inom Blekinge, 1863) la liste de 64 mollusques de terre et d'eau douce trouvées dans la province.

Le docteur J.-E. ZETTERSTEDT a décrit, dans le Bulletin de l'Acad. des Sciences a Stockh., année 1864, la découverte inattendue du *Bulimus montanus* en Småland.

Le docteur C. HARTMAN a publié en 1865, un travail intitulé Materiaux épars pour servir à l'histoire naturelle de la Néricie (Spridda Bidrag till Nerikes Naturalhistoria), comprenant aussi les mollusques de cette province. Par son étendue, ses données locales exactes et ses nombreuses observations, ce traité constitue une précieuse contribution à notre faune. Il contient en outre la description d'une espèce nouvelle chez nous, la *Pupa minutissima*. Le Bulletin de l'Acad. des Sciences à Stockholm (Année 1866, p. 387—394) contient en outre une étude de M. HARTMAN sur les Mollusques de terre et d'eau douce de la partie orientale de larégion de Stockholm (Om Land- och Söttvattensmollusker i östra delen af Stockholmstrakten).

Le docteur G. LINDSTRÖM a augmenté l'année dernière (1868) notre littérature malacologique d'un travail précieux: Mollusques actuels de

Gotland (Om Gotlands nutida mollusker, Wisby 1868, pp. 48, avec 3 pl.), contenant outre de nombreuses et intéressantes observations anatomiques, une nomenclature et liste exacte de la faune mollusque de l'île. Un nouveau genre, *Alloglossa* (sép. de *Pupa avenacea)* y est établi, et motivé en détail d'après des considérations anatomiques.

L'auteur de ce présent traité, donna dans le IIIème Cahier (1853) des Mém. de la Soc. des Sc. et des Belles-Lettres de Gothembourg, son premier tribut malacologique, dans la petite *Pupa venetzii*, qui n'avait pas été trouvée chez nous jusqu'ici. Dans notre ouvrage publié en 1865: Mollusques de terre et d'eau douce de la Suède (Sveriges Land- och Sötvatten-Mollusker, Lund, pp. 142), j'indiquai pour la première fois comme appartenant à la Suède, les espèces suivantes:

Helix nitidula.	*Clausilia biplicata.*	*Planorbis riparius*, nov. sp.
— *pura.*	*Planorbis glaber.*	*Valvata antiqua.*
— *sericea* Dr.?		

Le Bulletin de l'Ac. des Sc. à Stockh., année 1865, contient en outre de nous (p. 537—562) des Observations malacologiques faites pendant un voyage dans le Blekinge, le gouvernement de Calmar et l'île d'Öland, pendant l'été de 1865 (Malakologiska iakttagelser under en resa i Blekinge, Kalmarlän och på Öland, sommaren 1865). Le traité contient entre autres, la description d'une nouvelle espèce, *Vertigo modesta*, et la détermination de *Succinea arenaria* comme espèce suédoise. La première espèce est avec *Planorbis riparius*, l'objet d'une description plus étendue, insérée, sous le titre de Beschreibungen und Kritik neuer Mollusken, dans les Malakozoologische Blätter, année 1866, p. 44—48. Dans le même Journal, année 1867, pp. 199—206, le traité précédent est continué par la description des espèces nouvelles *Vertigo tumida* et *Planorbis limophilus.* Dans le présent traité, j'augmenterai notre faune mollusque des espèces et sous-espèces nouvelles suivantes: [1])

*Limax *mucronatus* m.	*Clausilia *scanica* m.	*Pupa columella.*
*Zonites *draparnaldi?*	— **oreas* m.	— *ronnebyensis* nov. sp.
Arion citrinus nov. sp.	— **ommæ* m.	— *ovoidea* nov. sp.
— *limacopus* nov. sp.	— **sejuncta.*	— *pineticola* nov. sp.
*Helix *concinna.*	— **personata* m.	— *genesii.*
— **depilata.*	— *dubia.*	— *collina* nov. sp.
— **rubiginosa.*	*Balea *pyrenaica.*	— *otostoma* nov. sp.
*Clausilia *æmula* m.	— **rayiana.*	*Succinea *temporalis* m.

[1]) Sous le nom de "Collectio typica molluscorum terrestrium et fluviatilium Sueciæ" j'ai l'années 1868 et 1869 distribué plusieurs Collections.

*Succinea *contorta* m.	*Planorbis *rotundatus.*	*Planorbis *deformis.*
*Limnæa *maritima.*	— **dispar* m.	— *malmi* nov. sp.
*Planorbis *ammonoceras* m.	— **gothicus* m.	*Valvata *pusilla.*
— **goësi* m.	— **rossmæssleri.*	*Sphærium *consobrinum?*
— *discus.*	— **gredleri.*	*Pisidium *cuneatum.*

NORVÉGE.

Toutes les fois que j'ai consulté la plus ancienne littérature zoologique de ce pays (travaux de RAMUS, PONTOPPIDAN, STRÖM, HAMMER, WILLE, FABRICIUS, etc.), ce n'a pas été au point de vue malacologique, d'où il résulte que j'ai négligé d'annoter ce qu'ils contiennent à cet égard. C'est une chose à laquelle je ne puis maintenant remédier, et je me vois forcé de passer sous silence les matériaux probablement très-insignifiants que j'en aurais pu tirer pour l'histoire de la faune mollusque de la Norvége. Plus qu'aucun des savants énumérés ci-dessus, STRÖM a mérité d'être considéré comme le créateur de cette faune. A deux occasions *(Zonites hammonis* et *Clausilia bidentata)* j'ai plus loin, en conformité avec O. MÖRCH, adopté ses noms spécifiques comme étant les plus anciens. Dans sa description de Söndmöer (Beskrivelse over Söndmöer, Sorö 1762) et dans les Mémoires de la Société de Throndhjem (Trondhjemske Selskabs Skrifter, principalement le T. III (III Række, 1765), il a énuméré et décrit plusieur coquilles terrestres. Dans sa Description de la Paroisse d'Egers (Beskrivelse over Egers Præstegjeld, Copenhague, 1784), il cite, p. 151, les espèces suivantes: *Limax ater*, *L. agrestis*, *Helix pomatia* ("trouvé parfois, mais rarement dans les parcs et parmi les arbres") ("af en rar Hendelse i Haverne og blandt Træerne"), *Mya margaritifera*, *Mytilus anatinus* et *Tellina amnica* (? trouvée dans une raie), ainsi que *Nerita fluviatilis*. O.-F. MÜLLER *(Vermium Historia*, II, 1774) donne comme trouvées en Norvége, différentes espèces, telles que: *Limax albus*, *Limax flavus*, *Helix lapicida*, *Helix perversa.*

J. FRIELE a publié en 1853, "aux frais de la Société royale des Sciences de Trondhjem", un traité sur les Mollusques de terre et d'eau douce de la Norvége, qui se trouvent dans les environs de Christiania et de Bergen (Norske Land- og Ferskvands-Mollusker, som findes i Omegnen af Christiania og Bergen). Cet ouvrage signale les espèces suivantes: *Limax ater*, *L. rufus*, *L. subfuscus*, *L. agrestis*, *Vitrina pellucida*, *Helix fulva*, *H. fruticum*, *H. arbustorum*, *H. pomatia*, *H. nemoralis*, *H. hortensis*, *H. strigella*, *H. hispida*, *H. lapicida*, *H. cellaria*, *H. pulchella*†, *H. rotundata*†, *H. crystallina*, *H. nitida*, *Bulimus lubricus*, *Pupa*

fragilis, *P. muscorum*, *P. pygmæa*†, *P. umbilicata*, *Clausilia bidens*, *C. rugosa*, *C. plicatula*, *Succinea amphibia*†, *Auricula minima*, *Planorbis marginatus*, *P. vortex*, *P. nitidus*, *P. contortus*, *P. albus*, *P. nautileus*, *P. spirorbis*, *Lymnæa stagnalis*, *L. auricularia*, *L. ovata*, *L. peregra**, *L. fusca*, *L. elongata*, *L. truncatula*, *Physa fontinalis*, *Ph. hypnorum*, *Valvata piscinalis*, *V. cristata*, *Paludina vivipara*, *P. tentaculata*, *Nerita fluviatilis*, *Cyclas cornea*, *C. lacustris*, *C. calyculata*, *Pisidium obtusale*, *P. fontinale*, *Unio margaritifera*, *Anodonta anatina*. On ne trouve donc, dans ce livre, qui ne constitue qu'une faune locale, ni le *Limax albus*, donné par MÜLLER, ni la *Balea*, trouvée par M. le prof. Sars dans l'île de Florö, à 140 kilom. environ au Nord de Bergen, au bord de la pleine mer, et décrite sous le nom de *B. sarsi* par PHILIPPI dans le Zeitschrift für Malakologi.

Le docteur E. v. MARTENS a publié dans le T. III (1857), p. 69—117, des Malakozoolische Blätter, un traité "Über die Binnenmollusken des mittleren und südlichen Norwegens", dans lequel d'après l'ouvrage de FRIELE, et à l'aide de ses propres observations, il rend un compte détaillé des mollusques de terre et d'eau douce trouvés dans les régions mentionnées dans le titre. Nouvelles pour la faune du pays, sont les espèces: *Limax marginatus*, *Helix candicans*, *Clausilia biplicata*, et *Pupa pusilla*, les trois dernières découvertes par M. le professeur SARS.

O.-A. MÖRCH signale dans the American Journ. of Conchology, 1868, p. 1, page 29, l'espèce *Hyalinia alliaria* comme trouvée par M. le prof. STEENSTRUP aux environs d'Arendal.

A.-W. MALM, dans sa description des Limaciens terrestres de la Suède (Mém. de la Soc., etc., de Gothemb., 1868), signale comme trouvés dans le Ringerige par le cand. en phil. JONAS COLLIN, *Eulimax cinereo-niger*, var. *niger*, et une variété distinguée de *Agriolimax agrestis*, désignée sous la dénomination de *ferus*.

Je suis à même d'augmenter, dans ce présent traité, des espèces suivantes la liste des Mollusques de la Norvége: *Zonites pura*, *Helix harpa*, *Pupa minutissima*, *P. substriata* et *P. inornata*, trouvées par M. le professeur LILLJEBORG; *Zonites nitida* (la coquille donnée par FRIELE sous ce nom, est, d'après v. MARTENS, *le Z. nitidula)*, *Helix pygmaea* et *Pupa columella*, prises par M. le cand. en med. C. NORDSTEDT; *Helix *colliniana* d'après M. BOURGUGNAT (Pfeiffer Monogr. Helic. V.) et *Vitrina *angelicæ* d'après Mr W. G. BINNEY (Smithson Miscell. Coll. 194.); *Limax tenellus*, *Clausilia pumila*, *Ancylus fluviatilis* et *Acroloxus lacustris*, prises par Mr O. S. JENSEN.

II.

SYNOPSIS DES MOLLUSQUES DE TERRE ET D'EAU DOUCE DE LA SUÈDE ET DE LA NORVÉGE.

CL. I. MALACOZOA GASTROPODA CUV.

Mollusca capite libero, tentaculato, oculifero; corpore oblongo, disco longitudinali musculoso repente; *testa* univalvis vel nulla (interna).

ORDO I. GASTROPODA (PULMONATA) INOPERCULATA FÉR.

Moll. hermaphrodita, per coitum se propagantia; vesica pulmonacea, ostiolo ex arbitrio clausa vel aperta, aërem respirantia; testa aut nulla externa aut (plerisque) spiralis, semper operculo destituta.

SECT. I. GEOPHILA FÉR. (STYLOMMATOPHORA A. SCHM.)

Moll. pulmonata, terrestria, tentaculis cylindraceis retractilibus quattuor instructa, superioribus duobus majoribus apice oculiferis (inferioribus interdum inconspicuis).

A. *Orificium Org. Gen. Externum Commune.*

Fam. I. LIMACIDÆ.

Maxilla lævis, simplex (nec sulcata, nec dentata), margine inferiori acuto, medio rostro obtuso, sæpe conico, vel margine convexo; *uncini* radulæ laterales secundi ordinis elongati, hamiformes, basi non reversa, longitudinaliter affixa, quam cuspis multo minori. *Testa* sæpissime tenuis, pellucida, hyalina, nitida.

Subfam. LIMACINA.

Corpus per totam longitudinem cum pede conjunctum; *testa* unguiformis, interna, a clypeo sæpius concentrice striato obtecta. (Corpus postice carinatum; orificium respirationis posticum; fovea caudalis nulla).

Gen. LIMAX Lister, LINNÉ.

Uncini radulæ acuti, medius sæpius utrinque tuberculatus, laterales rarius simplices; *maxilla* margine anteriore medio rostro obtuso, sæpe conico, producto.

1. *Eulimax* Moqu. Tand. Uncinus radulæ medius cuspide simplice; uncini laterales ultimi ad latus externum apiculo secundario. Corpus firmum.

1. LIMAX MAXIMUS LINNÉ.

Cinereo-niger; *clypeus* obscurior, immaculatus, postice elongato-angulatus; *corpus* obsolete longitudinaliter 4-fasciatus; *carina* abdominis validissima, acuta, albida; *solea pedis* bicolorata. *Sudor* non coloratus. *Uncini* laterales a sexdecimo apiculo secundario, uncini secundi ordinis margine inferiore subserrato. Long. 150—180 mm.

Limax cinereus maculatus Linné Öländska och Gotländska resa (1745) p. 61. *L. cinereus* Müller Vermium Terr. et Fluv. Historia I (1774) varr. α, δ, ε, p. 5. Nordenskiöld & Nylander Finlands Mollusker (1856) p. 4. Lehmann Malak. Blätter 1862 p. 172.

L. maximus Linné Systema Naturæ X (1758) p. 652; Fauna Suecica ed. 2. (1761) p. 507; Syst. Nat. XII (1767) p. 1081. Moquin-Tandon, Mollusques de France (1855) II: *L. max.* μ *cinereo-niger* p. 29 cum fig. Westerlund Sveriges land- och sötvatten-mollusker (1865) p. 28: *L. max.* 1) *cinereus* et 2) *cinereo-niger*.

L. cinereo-niger Wolf apud Sturm Deutschlands Fauna VI. 1 (1822) cum fig. Nilsson Historia Moll. Sueciæ (1822) p. 7 cum *L. cinereus* Nilss. *var.* α. Goldfuss Verh. nat. Vereins Westph. (1856) p. 63 cum fig. Heynemann Malak. Blätt. VIII (1862) p. 99. Mörch Synopsis Moll. Daniæ (1864) p. 6. Lindström Gotlands nutida mollusker (1868) p. 6 cum fig. uncin. radulæ. Westerlund Collectio Typica Molluscorum Succiæ (1868) n:o 6.

Eulimax cinereo-niger Malm Göteb. Vet. o. Vitt. Samh. Handl. X (1868) p. 57 cum fig.

1. **niger:** uniculor, niger, solea obsolete bicolorata.
2. **leucogaster** MÖRCH: brunneus, fasciatus; solea unicolor, alba.
3. **fasciatus:** cinereus. abdomine faciis 5, latis, nigris, undulatis.
4. **cinereo-nebulosus** MALM: albicans, clypeo et carina pallide flavis, ille cinereo-nebulosus; abdomen postice maculatum.
5. **albus** PAASCH: albus, unicolor, oculis nigris.

Hab. In Suecia hic limax per provincias meridionales et medias in densis et umbrosis silvis passim frequens occurrit; ad Säther prov. Dalarne passim (C. G. ANDERSSON). 2. *leucog.* ad. Ahr ins. Gotland (LINDSTR. l. c.), ad Ronneby prov. Blekinge (W.); 3. *fasc.* ad Ronneby prov. Ble-

kinge (W.); 4. *cin.-nebul.* ad Ljungskile et ad Simersröd prov. Bohuslän rarior (MALM l. c.); 5. *albus:* ad Alingsås et ad Ljungskile (MALM l. c) nec non in Kinnekulle (G. EISEN!). In **Norvegia** var. nigram in præruptis montium ad Ringerige 1868 cepit clar. J. COLLIN.

Le limaçon représenté ici est le *Limax maximus* de LINNÉ et non l'espèce qui porte ce nom chez tous les autres auteurs! LINNÉ ne le connaissait que de son voyage à Öland, où il le trouva entre Glömminge et Thorslunda, et cite cette trouvaille p. 61 de sa description de voyage. Dès lors il a toujours dans ses faunes référé à ce passage de son It. Oel. et ne cite expressément et en italiques qu' Öland comme l'habitat de l'espèce ("habitat in sylvis densissimis Oelandiae, locis subhumidis"). On n'a jamais trouvé à Öland le *Limax maximus* Auctorum (= *Limax cinereus* LISTER) et comme au reste cette espèce n'a jamais été trouvée en Suède, il est totalement erroné de transporter le nom donné par LINNÉ à une espèce qui lui était parfaitement inconnue, et seulement parce qu'il citait cette dernière comme synonyme d'après une description antérieure incomplète; l'erreur de LINNÉ était d'autant plus pardonnable que ces espèces n'ont été séparées qu'à une époque plus récente.

Subgen. *Malacolimax* Malm. *Uncinus* radulæ *medius* tricuspidatus, cuspide media elongata; *uncini laterales* primi ordinis subbifidi, ultimi apicibus duobus secundariis. *Corpus* mollissimum.

2. LIMAX TENELLUS NILSS.

Luteo-virescens vel luteus; *clypeus* postice rotundatus, luteus, utrinque fascia obsoletissima, obscura; tentacula et linea colli utrinque nigra; dorso raro fasciis duobus nigricantibus. *Sudor* luteus. L. 30—50 mm.

Limax tenellus Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 10. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 7. Westerlund Sver. Moll. (1865) p. 29. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 6 cum fig. uncin.

L. cinctus Müller Vermium Hist. (1774) p. 9 (verosimiliter!). Heynemann Mal. Bl. VIII (1862) p. 100.

L. serotinus Schrenk Bull. Mosc., 1848, p. 144 (sec. Mörch & Malm.)

(L. flavus Müll., ex. p. *L. succineus* Müll. ex. p.?)

Malacolimax tenellus Malm Göteb. Vet. o. Vitt. Samh. Handl. X. (1868) p. 66. cum fig. Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 9.

Hab. In **Suecia** hæc species in provinciis magis temperatis non rara, in fagetis et aliis sylvis humidis prov. merid. primo vere et autumno sæpe subfrequens. In Nericia a clar. HARTMAN (sec. MALM l. c.) et in prov. Dalarne ad Säther ($50\,^1/_3{}^0$) ab amic. C. G. ANDERSSON inventa. In **Norvegia** ad Korzold prope Christiania et ad Bjerke par. Hof invenit clar. O. S. JENSEN.

Subgen. *Agriolimax* Mörch p. p. *Uncinus* radulæ *medius* tricuspidatus; cuspide media elongata; *uncini laterales* simplices vel denticulo postico.

3. LIMAX AGRESTIS LIN.

Pallide griseus, immaculatus vel nigro variegatus, tentaculis fuscis, clypeo postice brevissime angulato. *Sudor* uberrimus, lacteus. *Testa* depressissima, tenuissima, alba, subpellucida. *Uncinus* radulæ *medius* utrinque tuberculo subacuto, antice tricuspidatus, cuspide media longa; *uncini later.* primi ordinis simplices longissimi, secundi ord. apiculo postico. L. 25—53 mm.

Limax agrestis Linné S. N., X. (1758) p. 652; Fauna Su., ed. 2. (1761) p. 508; S. N. XII (1767) p. 1080; XIII, p. 3101. Müller Verm. Hist. II. (1774) p. 8. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 8. Friele Norske land og ferskvands Mollusker (1853) p. 4. Moq.-Tandon Moll. Fr. II. (1855) p. 22 cum fig. Nord. & Nylander Finl. Moll. (1856) p. 6. Goldfuss Nat. Ver. Westph. (1856) p. 66 cum fig. Jeffreys Brit. Conch. I. (1862) p. 134. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 7. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 28. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 7 cum fig. uncin.

Agriolimax agrestis Malm Göteb. Vet. o. Vitt. Samh. Handl. X (1868) p. 69 cum fig. Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 8.

1. **albidus:** albus v. pallide griseus, immaculatus; collum supra et tentacula pallide fusca.
2. **punctatus:** albidus, atomis nigris sparsis et utrinque linea nigra.
3. **filans** HOY: albus, clypeo flavescente.
4. **reticulatus** MÜLL. V. H. p. 10: fuscus, clypeo punctis, abdomine lineolis nigris.
5. **nigricans:** griseus, maculis nigris confertis variegatus, tentaculis et linea colli utrinque nigris.
6. **tristis** M. TAND.: brunneus, clypeus utrinque fasciatus.
7. **obscurus** M. TAND.: subrufescens, obsolete variegatus, tentaculis fuscis et fasciis brunneis.
8. **succineus** MÜLL.: supra subrufus, subtus albus.
9. **varians:** griseus, nigro maculatus et variegatus; collum supra et tentacula fusca.
10. **lilacinus** M. TAND.: unicolor, lilacinus.

Hab. In **Suecia** animal vulgare, noxium agris et nemoribus, ab initio veris in decembrem, usque a prov. Skåne ad Karesuando in Tornea Lappmark (68—69°), ubi in monte quodam a celeb. prof. MÄKLIN captum (sec. NORD. & NYL. l. c.). In **Norvegia** ad Christiania, Eidswold, Laurgård, Bergen, Trondhjem et pluribus aliis locis animal vulgare (FRIELE, v. MARTENS).

LIMAX NORVEGICUS mh.

Corpus elongatum, gracile, postice carina validissima, parum angustatum, supra rufescenti-cinereum, lateribus pallidis, subtus cinereo-cretaceum (medio subpiceum). *Sudor* parcus, lacteus. *Testa* crassa, convexa, latere dextro sinuata. *Uncinus* radulæ *medius* antice utrinque sinuatus, tricuspidatus, cuspidibus lateral. subtriangularibus, media elongata, obtusa; *uncini lateral.* 1ⁱ ord. ad latus externum cuspidis longi aculeo sat valido. Long. 11—13, crass. 2 mm.

Agriolimax agrestis ferus Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 90.

Hab. In Norvegia ad viam per silvam abietinam profundam in Ringerige, circa 700′ supra mare, socio amiciss. J. COLLIN, et sub oculis celeb. A. MALM, hanc limacem d. 5 Juli 1868 inveni.

A l'occasion où je trouvai mes 2 exemplaires, COLLIN en pris 4 individus qu'il remit a MALM et dont cet auteur a donné une description détaillée et exacte. Je ne puis toutefois admettre son opinion que cette forme "constitue pour ainsi dire la souche sauvage de *l'Agriolimax agrestis*", et d'après laquelle il la désigne par *Agriolimax agrestis ferus*." J'ai donc proposé un autre nom, fondé sur l'endroit de la trouvaille et en ayant égard a la circonstance dans laquelle cette varieté fut découverte.

Subgen. *Hydrolimax* MALM. *Uncinus* radulæ *medius* utrinque tuberculo obtuso, antice tricuspidata, cuspide media elongata; *uncini laterales* apice secundario unico. *Abdomen* vix carinatum vel postice acuminatum; *clypeus* longus. *Sudor* non coloratus.

4. LIMAX LÆVIS MÜLLER.

Gracilis, cylindricus, agilissimus, nigrescenti-brunneus, vel obscure succineus, unicolor; *clypeus* profunde subconcentrice striatus, postice rotundatus; *solea pedis* pallide brunnea, medio albescens. Long. 20 mm.

Limax lævis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 1. Linné Syst. Nat. XIII, p. 3099. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 8.

L. brunneus Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 104. Moqu.-Tandon Moll. France (1855) p. 31. Heynemann Malak. Blätt. VIII (1862) p. 104. Lehmann Mal. Bl. IX (1862) p. 191. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 139. Lovell Reeve Br. Moll. (1863) p. 22.

Hydrolimax lævis Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh. Handl. X (1868) p. 79. t. 3. f. 6.

? *Limax campestris* Binney Land a. Freshwater Shells of North America I (1869) p. 64.

Hab. In **Suecia** hic limax parvus multoties circa urbem Göteborg prov. Westergötland et semel ad Gripsholm prov. Södermanland a celeb. MALM captus; in prov. Blekinge ad omnes fere aquas prope Ronneby (ex. gr. ad Herrstorpsjön frequ., Skärsjön, Tresjön, Halsjön, Lillsjön, Långasjön etc.) nec non ad Sjuhalla hanc speciem inveni; in prov. Skåne in fossa ad Stehag.

LIMAX *MUCRONATUS mh.

Luteo-brunneus, lateribus pallidis, *solea pedis* unicolore, alba; *clypeus* postice processu conica. Long. 10 mm.

Hab. In **Suecia** in litore lacus Herrstorpsjön prope Ronneby prov. Blekinge.

Gen. LEHMANNIA HEYNEMANN.

Uncini radulæ obtusi; uncinus medius simplex, uncini laterales primi ordinis apice longo, leviter arcuato, sec. ord. late emarginati, parte anteriore forte arcuata; limbus corpusculis 4—5 unciniformibus minutis; *maxilla* magna, margine anteriore medio late subproducto. *Corpus* mollissimum, sudor non coloratus. *Ova* ovalia.

1. LEHMANNIA MARGINATA (MÜLLER).

Cœrulescens vel cinereus, aquosus, subpellucidus; *clypeus* utrinque striga obscura, albo-marginata; *carina* abdominis alba, acuta, utrinque fascia obscura marginata. Long. 50—75 mm.

Limax marginatus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 10. E. v. Martens Binnenmoll. Norvegens Mal. Bl. III (1857) p. 77. Heynemann Mal. Bl. X (1862) p. 211. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 8.

Limax cinereus β, Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 7. *L. cin.* γ Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 5.

Limax arborum Bouch.-Chantereaux Catal. Moll. (1838) p. 164. Moquin-Tandon Moll. Fr. (1855) p. 24. Heynemann Mal. Bl. VIII (1861) p. 101. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 135.

Limax maximus 3) *marginatus* Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 28.

Limax sylvaticus Goldfuss Nat. Ver. Westph. (1856) p 66. t. 3. f. 5.

Limax salicinus Bouill., *Limax scandens* Normand, *L. livonicus* Schrenk, *L. limbatus* Held, *L. affinis* Millet.

Lehmannia marginata Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 8. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh. Handl. X (1868) p. 83. t. 5. f. 14. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 7.

1. **albomaculatus.**

Hab. In **Suecia** per partes meridionales et medias distributa species, in primis præsertim vulgaris, de cetero minus frequenter, usque ad Funnäsdalsberget in prov. Herjedalen (unde clar. dr F. SÖDERLUND misit) inventa. In **Norvegia** ad Bergen et Ålesund frequens, ad Trondhjem parce a clar. v. Martens visa, in Ringerige (amic. COLLIN et ipse).

Si l'on compare les figures très-differentes des dents de la membrane linguale de *Lehmannia marginata* dans les traités en même temps publiés de MALM et de LINDSTRÖM, on peut bien se persuader qu'elles non seulement sont à différentes espèces, mais a différentes genres. Mais grace a la bonté des auteurs, j'ai eté a même d'examiner les membranes linguales des exemplaires originals et je puis attester que les figures sont a la même espece, savoir: *L. marginata* qui nous avons mentionée ci-dessus. Les figures de MALM nous indiquent, comment les dents (crochets) du 1er et du 2ième ordre *paraissent*, lorsque ils sont placés tout près l'un de l'autre, de sorte que la partie de dernière ne devient pas visible; celles de LINDSTRÖM au contraire montrent, quelle forme ils *ont* effectivement, lorsque'ils sont regardés chacun à part.

Subfam. VITRININA.

Corporis pars posterior a pede distincta, spiraliter contorta et testa vestita.

Gen. VITRINA DRAPARNAUD.

Testa depresso-globosa (vel auriformis), imperforata, tenuissima, spira perbrevi; *anfractus* 3—3$\frac{1}{2}$, celeriter accrescentes, ultimus dilatatus; *apertura* ampla, rotundata vel lunata; *peristoma* simplex, tenue. Diam. 4—5, alt. 2$\frac{1}{2}$—3 mm.

1. VITRINA PELLUCIDA (MÜLL.).

Testa convexiusculo-depressa, nitidissima, sublævis, virescens; *anfr.* 3—3$\frac{1}{2}$, convexiusculi, subito accrescentes; *sutura* marginata, dense transversim striata; *apertura* rotundato-ovalis, altitudine et latitudine subæqualis. Diam. 4—5, alt. 2$\frac{1}{2}$—3 mm.

Helix pellucida Müller Verm. Hist. II (1774) p. 15.
Vitrina pellucida Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 11. Rossmässler Iconographie I (18—35) p. 74 fig. 28. L. Pfeiffer Monogr. Heliceorum II (1848) p. 492. Friele Norske Moll. (1853) p. 5. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 52. t. 6. fig. 33—36. Nordenskiöld et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 8. Martens Binnenm. Norv. Mal. Bl. (1857) p. 79. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 156. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 12. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 30; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 11.

— **dillwyni** JEFFR.: testa depresso-globosa, anfractu ultimo convexo et spira elevata.

— **minor** mh.: testa parva, depressa, tenerrima, hyalina, anfr. 3, apertura rotundata.

Hab. a Suecia meridionali usque in maxime boreales peninsulæ plagas. Varietates in Suecia ad Ronneby prov. Blekinge legi et in Norvegia var. — *dillwyni* ad Herstad par. Hof copiosam invenit et benigne misit clar. O. S. JENSEN.

P. 435 des Mémoires de la Societé des Sciences de Trondhjem (Trondhjemske Selskabs Skrifter, 1765) STRÖM décrit, sous le nom de *Helix domestica*, une coquille que W.-G. BINNEY et F. BLAND rapportent à *Vitrina angelicæ* BECK dans la 1ère partie récemment publiée de leur ouvrage: "Land and Fresh Water Shells of North America". Ils en donnent comme raison la description de STRÖM que je suis forcé de reproduire après eux en anglais, ne possedant pas pour le moment le travail original: "This name I give to a little snail, which is represented by fig. 15, since I find nothing in Linnés Systeme Nat. to which I can with certainty refer it. It is small, ovate-rounded, and somewhat convex above, and shows three small and flat whirls on the one side. The aperture is large and may be called almost entirely round, and the columella, or part attached to the snail's house, comprises a small segment, or may be inscribed in an exact circle. The shell is yellowish, and so brittle that one cannot pick it up without breaking it in pieces. It contains a bluish snail. It is found in great numbers under the moss or turf on houses, and is sometimes fully as large as the figure, which represents booth the upper and the lower sides." C'est plutôt pour provoquer une exploration ulterieure de cette coquille que par suite d'une entière persuasion de la justesse de cette manière de voir; que je suis ici MM. BINNEY et BLAND, et que j'admets pour la Norvége *V. angelicæ*, espèce qui me parait au reste peu distincte.

VITRINA ANGELICÆ BECK.

Testa convexiusculo-depressa, lævigata, nitida, pellucida, virenti-lutea; *spira* parvula, subprominula; *sutura* subtiliter crenulata; *anfr.* $3\frac{1}{2}$ rapide accrescentes, ultimus subtus latus; *apertura* obliqua, lunato-ovalis; *peristoma* simplex, subinflexum, margine columellari non recedente, leviter arcuato. Diam. maj. 6, $4\frac{2}{3}$, alt. $3\frac{1}{3}$ mm. (Pfr.).

Helix domestica Ström Trondhj. Selsk. Skr. 111 (1765) p. 435 pl. 6. f. 15 (sec. Beck, Binney et Bland).

Vitrina angelicæ Beck Index Moll. (1838) p. 1. Möller Ind. Moll. Grönl. (1842) p. 4. Pfeiffer Monogr. Hel. II (1848) p. 510. W. G. Binney et Bland Land and Freshw. Sh. of N. Amer. I (1869) p. 28.

Hab. In Norvegia ad Volden in Söndmör (STRÖM l. c.).

Gen. CONULUS (Fitz.) MOQ.-TANDON.

Testa imperforata vel angustissime perforata, turbinato-globosa, trochiformis, arctispira; *anfr.* 5—6, tardissime accrescentes; *apertura* depresso-lunaris, anfractu ultimo valde excisa; *peristoma* tenue. — *Maxilla* superne suberistata, margine anteriore medio denticulo obtuso. *Uncini* radulæ laterales secundi ordinis cuspide magna, infra denticulo prædita, sicut in Vitrina.

1. CONULUS FULVUS (MÜLLER).

Testa fulva vel brunnea, striatula, nitida; *anfractus* angusti; *apertura* depressa, lunata. Diam. $2\frac{1}{2}$—3, alt. 2—$2\frac{1}{2}$ mm.

Helix fulva Müller pr. p. Verm. Hist. II (1774) p. 56. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 15. Rossmässler Icon. VIII (1838) p. 38. f. 535. Pfeiffer Monogr. Helic. I. (1848) p. 30. Friele Norske Moll. (1853) p. 6. Nordensk. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 12. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 156. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 42.

Zonites fulvus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 67. t. 8. f. 1—4. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 8.

Hyalinia fulva Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11.

Conulus fulva Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 25.

— **mortoni** JEFFR.: testa pallidior, depressiuscula, spira convexa, anfractu ultimo obtuse subcarinato.

Hab. totam Scandinaviam.

Dans sa *Monographia Heliceorum* Vol. I—III, PFEIFFER a donné cette espèce, en exprimant ses doutes sur la question de savoir si c'est *H. fulva* de MÜLLER, mais dans le vol. IV il a exclu le nom de MÜLLER et indiqué DRAPARNAUD comme auteur. La cause en est sans doute que MÜLLER donne le diamètre à $\frac{1}{2}$—3 lignes (15—89 mm.) et qu'il a, par conséquent, évidemment confondu deux variétés. Toute la description de la coquille la plus petite et selon lui la plus jeune, convient exclusivement a *H. fulva*, et il est parfaitement certain que la plus grande, qu'il considérait etre l'individu adulte de la même, et dont il n'a trouvé qu'un seul exemplaire, était une jeune *Helix bidens* CHEMN., et non, comme le croit ROSSMÄSSLER, une jeune individu de *Zonites glabra* STUD.

Gen. ZONITES MONTFORT.

Testa umbilicata, interdum perforata, orbiculato-convexa vel depressa, tenuis, nitida; *anfr.* 4—7, regulariter accrescentes, vel angusti; *apertura* lu-

naris vel rotundata, obliqua; *peristoma* sæpissime rectum, acutum, simplex. — *Maxilla* lævis, margine anteriore medio dente elongato, acuminata.

Tous les auteurs qui ont adopté le genre de *Zonites* ont imité MONTFORT, l'inventeur de ce nom, en supposant qui le mot doit être du masculin; par consequent ils ont donné les desinences caracteristiques du masculin a tous les noms d'espèce adjectifs qui le suivent. Moi, je n'ai pu trouver qu'ils aient raison en cela. Le mot se forme, comme on le voit, de *zona* (ζώνη), la ceinture, et d'une terminaison latinisée, mais originairement grecque, *ides* ou *ites* (ἔιδης) qui est la même pour tous les genres et signifie *ressemblant*. C'est ainssi que le mot, comme les noms plusieurs de famille et de genre, a une signification adjective et le genre grammatical en est dépendant du mot sous-entendu. Mais comme il est probable que le nom se rapporte à la forme déprimée de la coquille on ne peut sous-entendre que le mot *testa*. Il faut donc que le mot *Zonites* soit un nom féminin et en conséquence, que tous les noms d'espèce dont il est suivi soient employés toujours en feminin. Dans la langue grecque, comme on le sait bien, les noms *gentilia* en ιτες, de même que les noms *patronymiques* qui se finissent par ιδες et ειδης, sont masculins; mais le mot *Zonites* n'appartient à aucune de ces classes, aussi bien il n'y a masculin quelconque qu'on puisse sousentendre.

Subgen. *Hyalina* (FER.) GRAY. *Testa* umbilicata, depressa, polita, tenuis; *anfr.* 5—7, regulariter accrescentes; *apertura* rotundato-lunaris, labro sæpius simplice.

† *Testa sublævis, subtus pallida.*

1. ZONITES CELLARIA (MÜLL.).

Testa depressa, nitida, subpellucida, irregulariter striatula, pallide virenti-cornea, subtus albida; *spira* plana vel planiuscula; *sutura* angusta, canaliculata; *anfr.* $5\frac{1}{2}$—6, planulati, lente accrescentes, ultimus antice non dilatatus; *umbilicus* apertus; *apertura* depressa, obliqua, lunari-ovalis, margine columellari strictiusculo. *Animal* pallide cœrulescens. Diam. 12—13, alt. $4\frac{1}{2}$ mm.

Helix cellaria Müller Verm. Hist. II (1774) p. 28. Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 32. Pfeiffer Mon. Hel. I (1848) p. 111. Rossmässler Icon. I (1835) p. 70. f. 22; VIII (1838) p. 36. f. 527. Friele Norske Moll. (1853) p. 15. E. v. Martens Binnenmoll. Norv., in Mal. Bl. III (1857) p. 81. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 26. f. 18. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 36.

Zonites cellarius Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 78. t. 9. f. 1—2. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 159. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 1. fig. anat.

Hyalinia cellaria Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 12.

Hyalina cellaria Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 17.

1. **albina:** testa albida, cœrulescens, subopaca.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Malmö (C. A. W.), ad W. Wram (LILLJEB.); prov. Blekinge: in urbe Carlskrona, multis locis (C. A. W.); prov. Småland: ad Kalmar (clar. A. AHLROT et ipse); ins. Gotland: a Farö ad Hoburg vulgaris (LINDSTRÖM) et in Sandö (EISEN et STUXBERG); prov. Halland (teste clar. J. E. ZETTERSTEDT!); prov. Westergötland: ad Göteborg in Otterhälleberget, Masthugget, Gunnebo et Bokedalen (A. MALM), in monte Kinnekulle ad Mörkeklef, Hjelmsäter et templum Westerplana (clar. C. LINROTH!), in declivitatibus montium Gisseberg, Fårdalsberg et plur. (K. AHLNER!); prov. Bohuslän: ad Marstrand (O. NORDSTEDT!). 1 *alb.* in Carlskrona. In **Norvegia** ad Bergen circa muros arcis Sverresborg (FRIELE) et in ins. Manger (prof. SARS teste v. MARTENS).

ZONITES *DRAPARNALDI BECK.?

Testa convexo-depressa, tenuis, pellucida, nitida, virenti-cornea, subtus pallidior; *spira* humilis, convexa; *sutura* impressa, marginata, dense crenulata; *anfr.* $5\frac{1}{2}$, convexiusculi, ultimus multo latior, subdepressus, subtus planiusculus; *umbilicus* mediocris; *apertura* transverse lunato-ovalis; *peristoma* simplex, rectum, marginibus post insertionem divergentibus, columellari arcuato, tenue labiato. Diam. 11, alt. 5 mm.

? *Helicella draparnaldi* Beck Ind. Moll. (1837) p. 6.

Hab. In **Suecia** in campo "Balkplan" dicto extra urbem Kalmar specimina juniora et in urbe Carlskrona sub muris specim. adulta inveni. — Testa succica descriptionibus auctorum sat bene, speciminibus autem gallicis et hispanicis in collectione mea plurimis non bene congruens. Forma borealis hujus speciei meridionalis?

2. ZONITES NITIDULA (DRAP.).

Testa globoso-depressa, solidula, parum nitida, sublævis, pellucescens, rufescens vel rufo-brunnea, subtus albida; *spira* convexa; *sutura* levis; subplanata; *anfr.* 4—$4\frac{1}{2}$, convexiusculi, sat celeriter accrescentes, ultimus antice dilatatus; *umbilicus* latus, profundus; *apertura* rotundato-lunaris, parum obliqua; *peristoma* margine columellari arcuato. *Animal* pallide schistaceum vel saturate cœruleum. Diam. 8—9, alt. $4\frac{1}{2}$ mm.

Helix nitidula Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 117. Rossmässler Icon. I (1835) p. 72. f. 24; VIII (1838) p. 36. f. 526. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 93. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 37.

Helix nitida Müller pr. p.! Friele Norske Moll. (1853) p. 18. — *H. cellaria* Nilsson pr. p.!

Zonites nitidulus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 83. t. 9. f. 12—13. Jeffreys Brit. Conch. (1862) p. 163.
Hyalina nitidula Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 13.
Hyalina nitidula Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 18.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Belteberga prope Landskrona, in Dahlby hästhage prope Lund, in Skäralid, ad Ignaberga (C. A. W.), ad W. Wram (LILLJEBORG), ad Herrevadskloster et Lindholmen (C. ROTH!!), Lund in horto botanico (A. J. JOHANSSON!!), ad Ringsjön (J. A. WALLIN!!); prov. Blekinge: ad Ronneby et Carlskrona (C. A. W.) nec non ad Mölltorp (J. ANKARCRONA!!); prov. Småland: ad Kalmar (C. A. W.), Husqvarna (O. NORDSTEDT!!); ins. Öland: in declivis infra arcem ad Borgholm (C. A. W.); ins. Gotland: ad Visby, Hoburg, Lindeklint (LINDSTRÖM). In **Norvegia** ad Christiania rarissime (FRIELE: *H. nitida*), in insula Sarterö (forma major, ad *H. nitentem* approximans, et forma minor, pallidior et magis depressa: v. MARTENS Mal. Bl. 1857 p. 80) prov. Bergen, ad oppidum Bergen, in arce vetusta ad Trondhjem (forma umbilico latiore et anfractu ultimo vix conspicue dilatato insignis, *H. nitidæ* proxima: v. Mart. l. c.).

3. ZONITES ALLIARIA (MILLER).

Testa depressa, polita, sublævis, pellucida, fulvo-cornea, circa umbilicum albida; *spira* convexiuscula; *sutura* levis, subplanata; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—$5\frac{1}{2}$, vix convexiusculi, lentius accrescentes; *umbilicus* apertus, profundus; *apertura* rotundato-lunaris, margine columellari arcuato, superne subcalloso. *Animal* nigrum, allium olens. Diam. 6—7, alt. 3 mm.

Helix alliaria Miller in Ann. Phil. VII (1822) p. 379. Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 76. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 38.
Zonites alliarius Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 83. t. 9. f. 9—11? (testa latissime umbilicata dicitur!). Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 161.
Helix nitidula Malm (non Drap.) Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 115.
Hyalinia alliaria Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 13.
Hyalina alliaria Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 19.

1. **viridula:** testa vitrea.
— **anceps** mh.: testa anguste umbilicata, depressa, tenuis, nitida, irregulariter striata, viridula, subhyalina; spira medio prominula; anfr. 5, sat celeriter accrescentes, ultimus subdepressus; sutura submarginata, striata; apertura diagonalis, lunato-ovalis, margini columellari lævissime arcuato; lat. 6, alt. 3 mm.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Åkesholm et Ignaberga (MALM), in Dahlby hästhage prope Lund (C. A. W.), in monte Skäralid (O. NORD-

STEDT!!); prov. Blekinge: ad Ronneby pluribus locis (ad Djupadal, ad Skärsjön, in silva fagínea ad Pehrsborg etc.: C. A. W.), ad Bellevüe in vicinitate urbis Carlskrona et ad Kärrtorp (J. ANKARCRONA!!); ins. Öland: infra arcem ad Borgholm (C. A. W.); prov. Östergötland: ad Mjölsefall (E. v. Goës s:r!); prov. Westergötland: ad Gunnebo et Utterbäck in vicinitate urb. Göteborg (MALM); prov. Nerike: ad Skaleklint par. Hallsberget ad Wiseboda par. Qvisbro (C. HARTMAN: *Hel nitidula*) nec non ad Wiseboda par. Knista (HARTM.); prov. Södermanland: ad Skarpsäter (E. HEMBERG!!); in vicinitate urbis Stockholm: in Sicklaön ad Kungshamn (C. HARTMAN). — *anceps:* anno 1864 in Paradislyckan in Lund hanc formam frequentem legi. In Norvegia hanc speciem ad Arendal invenit prof. Steenstrup (teste MÖRCH Amer. Journ. 1868 p. 29); ad Herstad par. Hof a clar. O. S. JENSEN lecta.

†† *Testa regulariter striata vel striatula, concolor.*

* *Testa sutura submarginata, crenulata.*

4. ZONITES HAMMONIS (STRÖM).

Testa depressa, pellucida, nitida, dense striatula, cornea; *spira* subplanata; *sutura* levis, submarginata; *anfr.* 4, celeriter accrescentes, ultimus depressus; *umbilicus* angustus, pervius; *apertura* lunato-subovalis, labro in adultis fascia (vel varice) flava cincto. *Animal* obscure cinereum. *Testa* animale fœta castanea. Diam. $3\frac{1}{2}$—$4\frac{1}{2}$, alt. 2 mm.

Helix hammonis Ström Trondhj. Sälsk. Skrift. III (1765) p. 435. t. 6. f. 16. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 39.
Helix striatula Gray in Med. Repos. XV (1821) p. 239 (sine caract.!).
Helix nitidosa Férussac Tabl. Syst. (1822) p. 45 (sine caract.!). Rossmässler Iconogr. (1835) p. 71. f. 23.
Helix radiatula Alder Cat. Northumb. Moll. (1830) p. 12. Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 83; V (1868) p. 147.
Helix pura Malm Zool. Obs. in Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 116. Nordensk. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 27. *H. p.* β Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 96.
Zonites radiatulus Forbes a. Hanley, Goldfuss, Jeffreys.
Zonites striatulus Moq.-Tandon.
Hyalinia hammonis Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 13.
Hyalina hammonis Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 21.

1. **viridula.** (*Helix viridula* Aucct. plur.).

Hab. In Suecia in omnibus provinciis meridionalibus et mediis saltem usque in Helsingland (ad Bollnäs) et Herjedalen (ad Örtholmen),

unde misit clar. F. SÖDERLUND. In **Norvegia** ad Volden in Söndmör STRÖM invenit; a prof. LILLJEBORG ad Molde, prope diversorium Suul in jugo Jemtlandiam versus et in monte ad Horgheim in Romsdalen lecta; ad Östensöen, Ormöen et Ladegaardsöen prope Christiania, nec non ad Hamar et Herstad par. Hof legit clar. O. S. JENSEN. In Museo zoologico Upsaliensi exemplaria formæ pallidæ (vel *Z. petronellæ*?) a vicinitate sinus ad Waranger asservantur (LILLJEB. in litt.).

Voici comment STRÖM (l. c.) décrit son *Helix hammonis:* Ressemblant par sa forme aux cornes dites d'Ammon, elle est assez aplatie et porte au côté supérieur 4 tours de spire, dont le premier égale presque tous les autres en épaisseur; le côté inférieur n'en présente qu'un, au centre duquel se trouve un trou ou une cavité arrondie. La bouche, à peu près pareille à celle de la précédent *(Vitrina)*, est proportionnellement plus petite et un peu plus échancrée. La couleur est cornée, à l'exception de la partie antérieure de la bouche, qui présente une teinte jaunâtre. La coquille est transparente et très-fragile; l'animal est un limaçon brun-noirâtre pourvu de 4 cornes." Il n'existe assurément en Norvége aucune coquille à laquelle cette description et la figure qui l'accompagne convienne mieux qu'à *H. radiatula* ALDER. Elle ressemble sans doute aussi par sa forme à *Z. petronella*, qui se trouve de même en Norvége, mais comme STRÖM dit que sa coquille est de couleur cornée (par conséquent comme son *Turbo muscorum* = *C. lubrica*), ce que n'est jamais *Z. petronella*, il faut abandonner toute idée d'identification avec celle-ci. BINNEY et BLAND ont interprété la description de Ström d'une manière assez étrange, en donnant dans les Smithsonian Miscellaneous Collections (194; 1869, p. 48) *H. hammonis* comme synonyme de *Conulus fabricii* (testa subimperforata, conica, anfr. 6 etc.), espèce trop près de notre *C. fulvus*, pour se rapporter à *Z. hammonis.*

5. ZONITES PETRONELLA (CHARP.).

Testa umbilicata, globoso-depressa, albido-virens, vitrina, nitida, regulariter distanter costulato-striata, subtus lævigata; *spira* late convexa; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—5, lente crescentes, ultimus rotundatus, antice parum dilatatus, subplanulatus, non descendens; *umbilicus* mediocris, pervius; *sutura* impressa, linea parallela sat profunda circumcincta; apertura lunato-rotundata. *Animal* cinereum. *Testa* animale fœta cinerea. Diam. $4\frac{1}{2}$—$5\frac{1}{2}$, alt. $2\frac{1}{2}$—3 mm.

Helix pura γ Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 96; *H. pura* pr. p. IV (1859) p. 83. *H. pura* var. Malm Zool. Obs. p. 116? *H. pura* E. v. Martens Binnenmoll. Norveg. in Mal. Bl. III (1857) p. 81 (fide v. Wallenb. l. c.).

Helix petronella Charpentier apud Pfeiffer Monogr. Helic. III (1853) p. 95.

Zonites purus β *viridulus* Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 87.

Helix viridula Wallenberg in Malak. Blätt. V (1858) p. 92. t. 1. f. 2. Hartman Ner. Moll. (1864) p. 4. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 40.

Zonites excavatus β *vitrina* Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 168.

Hyalina viridula Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 22.

Hab. In **Suecia** hæc species præsertim per regiones sylvaticas Lapponiæ frequenter occurrit, in quibus etiam maxime perfecta; descendens tamen per provincias omnes in prov. Skåne usque. Circa Qvickjock Lapponiæ Lulensis (67—68°) frequens, ad Jockmock parcius (WALLENBERG); prov. Herjedalen: a montibus Glissjöberg et Fumäsdalsberg misit clar. F. SÖDERLUND; prov. Helsingland: ad Bollnäs (SÖDERL.!!); prov. Dalarne: in Ossmundsberget par. Rättvik, ad Säther et pluribus locis frequens (C. G. ANDERSSON!!); in prov. Westmanland vulgaris (teste celeb. C. H. JOHANSON!); ad Stockholm: in Stora Ängsviken ins. Wermdön (C. HARTMAN); prov. Nerike: multis locis circa Örebro, in Herrfallsängarne par. Hallsberg, ad Kihls källa et Willingkullen par. Knista (C. HARTM.); prov. Östergötland: in declivitatibus montis Omberg, præsertim ad Alvastra et Borghamn (C. A. W.); prov. Westergötland: in montibus Mösseberg (C. A. W.) et Billingen (C. A. ANDERSSON!!), ad Gunnebo, Slottskogen et Utterbäck prope Göteborg (MALM); prov. Småland: in jurisdictione Tveta pluribus locis frequens (E. HEMBERG!!); prov. Skåne: ad Belteberga (C. A. W.). In **Norvegia**: in Eidswold ad partem meridionalem lacus Mjösen (v. MARTENS), in insula Manger pr. Bergen (prof. SARS teste v. MART.), ad Sagatun prope Hamar, in Ladugaardsöen prope Christiania et in par. Hof (O. S. JENSEN!!). Certe per totum regnum distributa.

Dans sa British Conchology, I. p. 169, en *Zonites excavata* Bean, dit J. GWYN JEFFREYS: "This species has been considered peculiar to Great Britain, and to be the only land-shell which does not inhabit any other part of the world; but I have reason to believe that the greenish-white variety is the *Helix viridula* of FÉRUSSAC, as well as the *H. viridula* of MENKE, *H. petronella* of CHARPENTIER, and probably also the *H. clara* of HELD. In the 'Malakozoologische Blätter' for 1858 will be found a critical dissertation by von WALLENBERG on the *Helix viridula* of MENKE compared with *Z. purus*, in which the autor showed that these were quite different species; and I can answer for the identity of *Z. excavatus* var. *vitrina* (or *viridula*) with the *H. petronella* of CHARPENTIER, having found specimens of the latter on the Gorner glacier in Switzerland at a height of about 7000 feet above the sea-level, and afterwards compared them with the types in Charpentier's collection at Devens while I was on a visit to that eminent naturalist. In a letter which is now before me from the late M. CHARPENTIER, dated 28th August, 1854, he says the *H. vitrina* of FÉRUSSAC, is identical with his own *H. petronella*, and that it is very different from *H. radiatula*, with which it has only a slight relation in respect of the striæ. FÉRUSSAC did not give any description of his species." Ayant comparé plusieurs exemplaires de *Z. excavata* d'Angleterre, qui Mr JEFFREYS a eu la bonté de me donner, à plus de cents exemplaires de *Z. petronella* de Scandinavie, je suis d'avis que ces deux coquilles sont bien différentes espèces. *Z. excavata* se distingue: umbilico multo latiore, anfractibus pluribus et multo tardioribus, ultimo angustiore et magis cylindraceo, apertura magis rotundata, colore corneo-brunneo, striis testæ subtilioribus etc.

** *Testa sutura profunda, immarginata.*

6. ZONITES PURA (ALDER).

Testa umbilicata, depressa, cinereo-alba, vix nitidula, confertim sed subtilissime transversim striata, sub lente etiam striis spiralibus parallelis ornata; *spira* convexa; *anfr.* 4, celeriter accrescentes, ultimus depressus; *umbilicus* plus minus effusus; *apertura* lunato-rotundata. *Animal* albidum, lineis duabus colli superne nigris. *Testa* animale fœta anfractibus 3 primis obscure fulvis. Diam. 3—4, alt. 2 mm.

Helix pura Alder Cat. Northumb. Moll. (1830) p. 12. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 96 pr. p.; IV (1859) p. 83 pr. p.; V (1868) p. 147. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 40.
Helix viridula Menke pr. p.; *Helix clara* Held in Isis; Polita opaca Held. l. c.
Zonites purus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1865) p. 87 t. 9. f. 22—25 (exclus. Féruss., Beck et Held). Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 164.
Hyalinia pura Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 13.
Hyalina pura Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 23.

Hab. In Suecia, prov. Skåne: in silva Reften prope Lund et in monte Skäralid (C. A. W.); prov. Blekinge: circa Ronneby multis locis, ad Sjuhalla et prope Carlshamn ad Bellevüe (C. A. W.), nec non ad Carlskrona (J. ANKARCR.!!); prov. Småland: ad Rosenlund prope Jönköping (O. NORDSTEDT!!); prov. Bohuslän: ad Bro (G. EISEN!!); prov. Östergötland: in monte Omberg (C. A. W.); prov. Westergötland: in monte Mösseberg (O. NORDSTEDT et ipse); prov. Nerike: in monte Willingkullen et ad Hjelmarsberg (HARTMAN); prov. Dalarne: ad Säther (C. G. ANDERSSON!!). In Norvegia ad Bergen formam subcostulato-striatam invenit celeberr. prof. LILLJEBORG.

Subgen. *Vitrea* FITZ. *Testa* subperforata (interdum imperforata), depressa, vitrea, diaphana, nitidissima, arctispira; *anfr.* 4—6, angusti; *apertura* lunaris.

7. ZONITES CRYSTALLINA (MÜLL.).

Testa perforata, depressa, tenuissima, hyalina, nitidissima, candida; *anfr.* planiusculi; *apertura* semilunaris, subdepressa, duplo latior quam alta; *peristoma* rectum, simplex. Diam. 3, alt. $1\frac{1}{2}$ mm.

Helix crystallina Müller Verm. Hist. II (1774) p. 23. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 35. Rossmässler Icon. VIII (1838) p. 37. f. 531. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 59. Friele Norske Moll. (1853) p. 18. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 41.

Zonites crystallinus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 89. t. 9. f. 26—29. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 170.
Hyalinia crystallina Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 14.
Hyalina crystallina Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 28.

— **complanata** JEFFR.: testa complanata; anfr. ultimus penultimo multo latior.

Hab. In **Suecia** per provincias meridionales et medias (Skåne, Halland, Blekinge, Småland, Gotland, Westergötland, Östergötland et Nerike) hæc species late destributa; in ins. Öland non parce ad Borgholm et Tveta; circa Stockholm ad Kungshamn ins. Sicklaön et in Stora Ängsviken ins. Wermdön (HARTMAN); prov. Westmanland ad Klacken par Norberg rarior (C. H. JOHANSON!). In **Norvegia** circa Bergen raro invenit FRIELE.

ZONITES *SUBTERRANEA BOURG.

Testa umbilicata, depressa, hyalina, albida, nitida, ad suturam striatula; *anfr.* convexi, *sutura* profunda separati, ultimo paullulum majore, rotundato, infra non compresso; *apertura* lunari-rotundata; *peristoma* acutum, intus albo-incrassato. Diam. 3, alt. $1\frac{1}{2}$ mm.

Zonites subterraneus Bourguignat in Rev. et Mag. Zool. 1856; Aménités malac. I. p. 194. t. 10. f. 13—18.
Helix subterranea Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 53.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Klinta prope Ringsjön (C. A. W.); prov. Blekinge: ad Ronneby (C. A. W.); prov. Westergötland: ad Klefva in monte Mösseberg (J. HULTING!).

Subgen. *Zonitoides* LEHMANN. *Testa* umbilicata, globoso-depressa, nitidissima; *anfr.* 5, convexi; *apertura* lunato-rotundata. *Animal* sagitta amatoria, ejus bursa et folliculis mucosis præditum.

8. ZONITES NITIDA (MÜLL.).

Testa aperte umbilicata, globoso-depressa, tenuiter striata, brunnea, concolor, nitida; *anfr.* 5, convexi, ultimus teres, circa umbilicum excavatus; *peristoma* tenue, acutum, margini basali arcuato. *Animal* nigrum. *Testa* animale fœta nigra, nitidissima. Diam. 6, alt. 3 mm.

Helix nitida Müller Verm. Hist. II (1774) p. 32. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 34. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 94. Nordensk. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 38. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 38.

Helix lucida Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 72. f. 25.

Zonites nitidus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 72. t. 7. f. 11—15. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 167.

Zonitoides nitidus Lehmann Malak. Blätt. IX (1862) p. 111. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 14.

Hyalina nitida Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 20.

Hab. In Suecia hæc species passim a prov. Skåne saltem usque ad fines meridionales Norrlandiæ: ad Westerås prov. Westmanland sat frequenter (C. H. JOHANSON!) et a prov. Dalarne exemplaria in museo Upsaliensi asservantur (LILLJEB. in litt.). In Norvegia ad Lagsager juxta Christiania ab amic. O. NORDSTEDT inventa et mecum communicata. Teste clar. O. S. JENSEN hæc species vulgaris et ad Christiania et in par. Hof.

Fam. II. HELICIDÆ.

Maxilla perpendiculariter costata, margine crenato; *uncini* radulæ laterales secundi ordinis basi reversa, transversaliter affixa, quam cuspides plerumque plures majori. *Testa* sepissime opaca, colorata.

Subfam. ARIONINA.

Corpus per totam longitudinem cum pede conjunctum; granulis calcareis plus minus conglomeratis testæ loco a clypeo granuloso obtectis. (Corpus postice convexum; orificium respirationis antemedianum; fovea caudalis mucipara).

Gen. ARION FÉRUSSAC.

Characteres generis cum characteribus subfamiliæ congruentes.

1. *Lochea* MOQ.-TANDON. *Corpus* unicolor, sudore non colorato et granulis calcareis *testæ* loco; *uncinus* radulæ *medius* cuspide utrinque unituberculato; *uncini laterales* secundi ordinis apice secundario externo.

1. ARION ATER. (LINNÉ).

Supra niger, tentaculis plerumque nigris; limbus lineis transversis parallelis fuscis striatus; subtus medio pallidus. Long. 100—120 mm., lat. 17—24 mm.

Limax ater Linné Syst. Nat. ed. X (1758) p. 652; Fauna Sv. ed. II (1761) p. 507); Syst. Nat. ed. XII (1767) p. 1081. Müller pr. p. Verm. Hist. II (1774) p. 4. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 1. Friele Norske Moll. (1853) p. 2.
Arion empiricorum Férussac pr. p. Hist. Moll. (1819) p. 60. t. 1. f. 3.
Arion rufus Moq.-Tandon pr. p. Moll. Fr. II (1855) p. 10. t. 1. f. 20.
Arion ater Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 3. Goldfuss Nat. Ver. Westph. (1856) p. 56. t. 3. f. 7. Jeffreys Brit. Moll. (1862) p. 127. Lehmann in Malak. Blätt. IX (1862) p. 158. Mörch pr. p Syn. Moll. Dan. (1864) p. 9. Westerlund pr. p. Sv. Moll. (1865) p. 26; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 1.
Lochea atra Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 31. t. 1. f. 1.

1. **mülleri** MOQ.-TAND.: ater, carina dorsi pallide virente. MÜLL. Verm. Hist. p. 2.
2. **marginatus** MOQ.-TAND.: niger, ora lutescente, aurantiaco vel coccineo; subtus albus. MÜLL. Verm. Hist. p. 3.
3. **draparnaudi** MOQ.-TAND.: obscure rufus, ora lutescente.
4. **bicolor** MOQ.-TAND.: fusco-castaneus, ora subaurantiaca.

Hab. In **Suecia** vulgaris per provincias meridionales et medias saltem usque in prov. Westmanland; in regionibus campestribus Scaniæ, Ölandiæ etc. rarus. 3. *draparn.* in prov. Skåne ad Ringsjön (C. A. W.). 4. *bicol.* in prov. Westergötl. in Slottsskogen prope Göteborg et in prov. Bohuslän ad Ljungskile (MALM). In **Norvegia** vulgaris saltem ad Bergen usque (FRIELE et v. MARTENS).

ARION *ALBUS (LIN.).

Totus albus vel tentaculis et limbo interdum coloratis, hic sæpius lineis transversis subnigris; sæpe flavidus. Magnitudo præcedentis.

Limax albus Linné Syst. Nat. XII (1767) p. 1081. Müller Verm. Hist. II (1774) p. 4. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 2.
Arion albus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 12. E. v. Martens Binnenmoll. Norveg. in Malak. Blätt. III (1857) p. 73.
Arion ater Mörch pr. p. Syn. Moll. Dan. (1864) p. 10. *A. ater* 2) *albus* Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 26.
Lochea alba Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 37. t. 1. f. 2.
*Arion *albus* Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 2.
Pullus.: *L. tenellus* Müller l. c. p. 11. *L. flavus β* Nilsson?! l. c. (ex Malm). Pollicaris, lacteus, punctis sulphureis, unde »virescens» (Mörch).

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Esperöd (NILSSON), ad W. Wram (LILLJEBORG) et in sylva fagínea ad Smedstorp (E. HEMBERG!); prov. Blekinge: ad Lyckeby prope Carlskrona (GOSSELMAN); prov. Halland: ad

Fröllinge (NILSSON et MALM) et ad Frillesås vulgaris (J. A. JOHANSSON!); prov. Bohuslän: in Skaftö et ad Ljungskile (MALM); prov. Westergötland: ad Utterbäck (MALM), ad Mörkeklef in Kinnekulle (C. LINROTH!) et ad Munkesten inter Halleberg et Hunneberg copiose (G. EISEN!); prov. Nerike: ad Skåleklint rariss. (*A. flavus* Hartman teste Malm); prov. Westmanland: ad Westerås (C. H. JOHANSON!); prope Stockholm ad Bellevüe (G. EISEN!). In **Norvegia** in insula Haaö sinus Christianiensis semel reperit O. F. MÜLLER (Verm. Hist. l. c.); inter Laurvig et Haukeröd (FABRICIUS, teste v. Mart.).

Subgen. *Prolepis* MOQ.-TANDON. *Corpus* utrinque fasciis obscuris, dorso postice subcarinato, sudore luteo, et testa interna membranacea, granulis calcareis sparsis; *uncinus* radulæ *medius* cuspide utrinque subbituberculato; *uncini laterales* secundi ordinis cuspidibus duobus secundariis.

A) *Clypeus granulosus; solea pedis integra.*

2. ARION RUFUS (LINNÉ).

Corpus subcrassum, supra fusco-castaneum vel rufo-brunneum, dorso clypei et abdominis plerumque obscuriore, sæpe striga longitudinali continua nigricante, lateribus pallidis, tentaculis nigris; *clypeus* elongatus, dense granulosus; *abdomen* squamis oblongis, crenulatis, transverse substriatis, in seriebus irregularibus positis, rugosum; *limbus* prominens, albidus vel luteo-rufus, lineis parallelis transversis subnigris; *solea pedis* tota alba vel albida, æqualis (non in areas tres longitudinales divisa). *Sudor* uberrimus, luteus. *Uncinus* radulæ *medius* antice utrinque valde sinuatus, tricuspidatus, cusp. lateralibus parvis, triangularibus, media perlonga, æquali; *unc. later.* 1^{i} ord. cuspide antice convexa, postice stricta; unc. later. 2^{i} ord. ad basin exteriorem cuspidis tuberculis duobus minutis, prope positis. Long. usque ad 90 mm., sæpius 40—60, crass. c. 10 mm.

Limax rufus Linné Fauna Sv. ed. II (1761) p. 507. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 3. Lilljeborg Observ. Zool. (1845) p. 55. Friele Norske Moll. (1853) p. 3.
Limax ater δ fusco-castaneus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 3.
Arion ater 3) *rufus* Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 26.
Arion fuscus Mörch pr. p. Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11.
Prolepis fuscus Malm pr. p. Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 43. t. 2. f. 4. Westerlund pr. p. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 4*.
Pullus (v. *Junior*): *Limax fuscus* Müller Verm. Hist. II (1774) p. 11.
Arion fuscus Mörch pr. p.
Prolepis fuscus Malm pr. p., Westerl. pr. p. (Coll. Typ.).

Hab. In **Suecia** in provinciis meridionalibus sat frequens, in mediis passim hæc species occurrit. In **Norvegia** in Sverresborg ad Bergen invenit FRIELE, et a Christiania benigne misit clar. O. J. JENSEN.

MALM dit, p. 44 de sa Monographie: "Pour ce qui concerne les exemplaires trouvés en Suède, l'on doit aussi y rapporter le *Limax flavus* de Linné, S. N., X. p. 652; S. N., XII. p. 1082; Fn. Su., II. p. 508; mais alors la citation de LISTER est fautive. Il aurait donc mieux valu, peut-être, conserver le nom Linnéen *flavus;* mais ce nom étant généralement donné à un limaçon jusqu'ici exclusivement trouvé à l'etranger, j'ai adopté celui des noms de MÜLLER sous lequel ce célèbre naturaliste décrivit pour la première fois cette espèce dans ses ouvrages. Le *L. cinctus* de MÜLLER, qui appartient aussi à cette espèce, est décrit plus loin par le même auteur, raison pour laquelle j'ai inséré ce nom dans la synonymie." Sous cette espèce, MALM ne cite que le Prodromus Zoologiæ Danicæ de MÜLLER; et c'est évidemment en raison de l'ordre dans lequel les deux formes sont décrites dans cet ouvrage, que MALM a choisi le premier nom adopté, *fuscus.* En le faisant, Malm ne s'est pas rappelé que le Prodromus de Müller est de l'année 1776, tandis que les deux formes ont été auparavant décrites comme espèces dans l'ouvrage Vermium terrestrium et fluviatilium Historia de l'année 1774, et *cinctus* s'y trouve mentionné le premier. MALM considère que *fuscus* est le *cinctus* adulte, mais MÖRCH en fait une sous-espèce. Je ne crois pas cependant, qu'aucun des noms cités convienne à cette espèce. Pour ce qui concerne le *Limax flavus* de LINNÉ, je crois pouvoir admettre avec pleine sureté qu'il n'appartient pas ici, mais est une variété de *Limax agrestis.* Je me fonde à cet égard sur la comparaison qu'il établit dans sa faune entre ces deux coquilles: "2091. *Limax agrestis, cinereus immaculatus.*" — "2092. *Limax flavus, flavus maculatus.*" D'autre part, quant à MÜLLER, sa diagnose du *Limax cinctus* ("succini coloris, supra absque omni macula, clypeus et abdomen dorso striga cinerea cingitur") ne peut s'appliquer à notre animal (qui se distingue précisément par sa ligne dorsale foncée); cela, d'autant plus encore que son *Limax flavus* est aussi rapporté ici comme variété (peut-être aussi à tort). HEYNEMANN rapporte, probablement avec plus de raison, le premier nom à *Limax tenellus* NILSS. Le *Limax fuscus* MÜLLER (long. 17,824 mm.) appartient assurément, comme le suppose MÜLLER lui-même ("plures magnitudine æquales, juniores forte, decembri reperi") à de jeunes individus, et ne peut pas conséquent être employé comme nom spécifique, d'autant plus comme nous possédons déja un nom plus ancien pour l'animal adulte. C'est ce nom que tous nos auteurs ont employé exclusivement depuis NILSSON jusqu'a MALM, lequel le raya de notre nomenclature. MÜLLER (et a près lui MÖRCH) le donne comme varieté δ de *Limax ater* qu'il décrit de la sorte: fusco-castaneus, ora lutescente, lineolis nigris transversis tessulata, subtus totus albus, clypeus punctis confertis scabriusculus, dorsum abdominis sulcis rugosum, striga longitudinali clypeum et abdomen utrinque percurrente; long. 16—19 lin. (35,648—42,332 mm.). Il donne comme synonyme *Limax subrufus* de LISTER et de LINNÉ. Autant que je le puis comprendre, nous retrouvons littéralement dans cette description notre espèce décrite ci-dessus, qui ne peut être confondue avec une variété de *Arion ater*, et MÜLLER lui-même ne l'a admise comme telle qu'à titre provisoire ("dies docebit, an ab atro distincta species sit").

Par les descriptions des Limaces ordinairement trop sommaires exclusivement basées sur la couleur, et en n'indiquant que par exception si l'espèce appartient aux genres *Arion* ou *Limax*, MÜLLER est souvent très-difficile à comprendre, d'autant plus qu'il a souvent transformé en espèces distinctes, des individus évidemment d'ages différents d'une seule et même espèce, ou réuni sous le même nom des formes appartenant à des espèces différentes. Par suite, ses noms sont tres-souvent peu sûrs, et dans ces cas inemployables.

ARION *SUBFUSCUS (DRAP.).

Brunneo-flavus, dorso obscuro, vel luteo-brunneus, dorso cinerascente, tentaculis, fascia clypei et dorsi utrinque contigua, sæpe capite, nigricantibus. Long. 30—35, crass. 8—9 mm.

Limax subfuscus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 125. t. 9. f. 8. Friele Norske Moll. (1853) p. 3.
Arion subfuscus Férussac Hist. Moll. Suppl. p. 96. Lehmann Malak. Bl. IX (1862) p. 163. t. 3. f. 1.
Limax fasciatus var. ε, ζ, η Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 4.
Arion fasciatus Nordensk. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 3. Westerlund pr. p. Sv. Moll. (1865) p. 27.
Arion cinctus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11.
Prolepis fuscus Malm pr. p. Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 43. *P. fusc. β cinctus* Westerl. Coll. Typ. (1868) N:o 3.

Hab. In **Suecia** per maximam partem regni usque ad Funnäsdalen et Midtådalen in Herjedalen (F. SÖDERLUND!!), ad Brasta in prov. Jemtland (W. MEVES), Sävastön in Öfver-Luleå (C. G. SILFVERSVÄRD) et ad Qvickjock (prof. BOHEMAN) in Luleå Lappmark (teste MALM l. c.). In **Norvegia** usque ad Trondhjem et ultra (FRIELE l. c.).

ARION *MELANOCEPHALUS FAURE-BIGUET. Fér.

Corpus cylindraceum, sat gracile, firmum, supra flavum, dorso obscuriore, *clypeo* flavissimo vel subaurantiaco, *tentacula* et *caput* nigricantia, *limbus* pedis pallidus, lineis transversis obscuris nullis, *solea* pallide flava. *Sudor* uberrimus, flavus vel luteus. Long. 25—30, lat. 5 mm.

? *Limax flavus* Müller Verm. Hist. II. (1774) p. 10. Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 5.
Arion melanocephalus Férussac Tabl. Syst. (1822) p. 18. Moquin-Tandon Moll. Fr. II. (1855) p. 17. Menke pr. p. Mal. Bl. 1857. p. 8.
Arion flavus Lehmann Mal. Bl. IX. (1862) p. 170. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 27.
Arion tenellus Heynemann in Mal. Bl. VIII (1861) p. 104.
Arion cinctus var. 1. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11.

Hab. In Suecia meridionali inter folia putrida, præcipue in silvis fagineis.

ARION CITRINUS mh.

Corpus firmum, supra citrinum, medio vix visibile obscurius, cervice et tentaculis nigricantibus; *clypeus* elongatus, dense granulosus; *abdomen* squamis oblongis, vix crenulatis, in seriebus irregularibus positis, rugosum; *limbus* pallidus, vix transverse nigro-striatus; *solea pedis* toto albida, æqualis. Sudor luteus. *Uncinus* radulæ *medius* lateribus subparallelibus, antice vix conspicue sinuatis, adeoque cuspidibus lateralibus subevanescentibus, cuspide media brevi, infra angustata, apice lata, submucronata; *uncini laterales* secundi ord. ad basin exteriorem cuspidis tuberculo unico vel interdum altero minutissimo, remoto. Long. 45—50 mm., crass. 10 mm.

Hab. In Suecia in truncis putridis in silva faginea ad Klinta prope Ringsjön prov. Skåne die 9 Juni 1869 exemplaria nonulla inveni.

A. MALM dit, sous le titre de *Prolepis fuscus*, p. 88 de sa dissertation sur les Limaciens terrestres de la Scandinavie ("Skandinaviska Landsniglar"): "Le 5 juillet 1868, le zoologue Danois, M. le Dr JONAS COLLIN prit un exemplaire de grandeur moyenne dans le Ringerige en Norvége, à environ 700 pieds au-dessus de la mer, près du chemin, dans l'immense forêt de sapins mêlé de quelques arbres à feuilles. L'exemplaire, de grandeur moyenne, comme il vient d'être dit, avait une couleur orange claire, tirant en dessus légèrement sur le jaune brunâtre. Cette couleur plus foncée n'apparut toutefois distinctement que quand l'animal eut été quelques jours dans l'esprit de vin. Le mucus était abondant et jaune orange". Cette exemplaire appartenait peut-être à la nouvelle sous-espèce qui vient d'être décrite.

3. ARION HORTENSIS FÉRUSSAC.

Corpus elongatum, supra albidum vel pallide cinereum, dorso obscuriore, tentaculis et fascia utrinque discontinua nigricantibus; *clypeus* brevissimus, dense granulosus; *abdomen* linea dorsali elevata obsoletissima alba, squamis oblongis, crenulatis, transverse striatis, in seriebus irregularibus positis; rugosum; *limbus* pallide lutescens, absque lineis transversis; *solea* albida. *Sudor* parcus, albus. *Uncinus* radulæ *medius* antice utrinque sinuatus, tricuspidatus, cusp. later. porrectis, subtriangularibus, media longa, æquali; *unc. later.* secundi ord. ad basin exteriorem cuspidis obtusæ tuberculis duobus minutis prope positis. Long. 50 mm., cr. 5—6 mm.

Arion hortensis Férussac Hist. Moll. (1819) p. 65. t. 2. f. 4—6. Lehmann Mal. Bl. IX (1862) p. 167. t. 3. f. 3 et XII (1865) p. 92. Goldfuss Nat. Ver. Westph. (1856) p. 59. t. 3. f. 6. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11.

Limax fasciatus varr. α, β, γ, δ Nilsson Hist. Moll. Sv. (1822) p. 3.
Arion fasciatus Nord. et Nyl. pr. p. Finl. Moll. (1856) p. 3. Westerlund pr. p. Sv. Moll. (1865) p. 27.
Prolepis hortensis Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 49. t. 2. f. 5. Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 4.

Hab. In **Suecia** per provincias meridionales et medias usque ad 60° lat. bor. saltem. In **Norvegia** ad arcem Agerhuus in Christiania cepit amiciss. J. COLLIN.

B) *Clypeus transverse substriatus; solea pedis longitudinaliter tripartita.*

4. ARION LIMACOPUS nov. sp.

Corpus subcrassum, supra fuscum, rufo-brunneum, lateribus pallidis; *caput* pallidum, tentaculis obscuris; *clypeus* striis transversis, longioribus vel brevioribus, flexuosis vel subrectis, irregularibus rugosus (minime granulosus); *abdomen* squamis planis, sublinearibus, apicibus rotundatis v. truncatis, lateribus crenulatis, sæpe transverse striatis, in seriebus subregularibus positis, sulcis profundis distinctis rugosum; *limbus* parum prominens, lineis parallelis, densis, nigris transverse striatus; *solea pedis* sulcis longitudinaliter tripartita, partibus exterioribus fusculis, ubique striis et lineis transversis, subparallelis, hinc inde ramosis, exaratis, parte mediana albida, subelevata, striis irregularibus partita. *Sudor* uberrimus, luteus. *Uncinus* radulæ *medius* lateribus convexis, medio utrinque tuberculato, antice tricuspidatus, cusp. later. magnis, porrectis, cuspide intermedia oblonga; *uncini later.* 1^{i} ordinis postice basi mucronati, margine interiori stricto, posteriori convexo; uncini later. 2^{i} ord. validi, postice ad basin tuberculis minutis, pone positis. Long. 40—50, cr. 8—10 mm.

Hab. In **Suecia** exemplaria pauca in prato ad amnem prope Ronneby prov. Blekinge reperi; et in prov. Skåne ad Rönnebro prope Stehag invenit amic. J. LINDAHL et ex. 5 benigne misit.

MÜLLER dit à l'article de *Limax ater* (Verm. Hist. II. p. 3): "Subtus in junioribus corpus album est, margine laterali nigricante absque striis conspicuis; in adultus pagina corporis inferior in tres areas æquales per longitudinem dividitur, quarum media alba, laterales obscuræ, striatæ, lineis transversis æqualiter remotis, nigris." STEIN dit (Schn. u. Musch. Umgeg. Berlin, p. 23), à la description de *Arion ater:* "Die Fussohle ist immer aus drei abgesetzten Längsfeldern bestehend, wovon das mittlere eine an beiden Enden zugespitzte Ellipse bildet," et p. 24, sous *Limax cinereus:* "Die Fussohle besteht wie bei *Arion* aus drei getrennten Längsfel-

dern, von denen das mittlere ellipsoidisch." Voici ce que dit à son tour GOLDFUSS (Verh. Nat. Verein. Westph., 13 Jahrg., p. 56), à la description de *Arion ater:* "auf der Sohle unterscheidet man 3 Längsfelder, welche aber nicht die Ausprägung besitzen wie bei den Limax-arten," et décrit p. 60 une forme de *Arion hortensis* ayant "die drei Längsfelder der Sohle deutlich ausgeprägt." E.-A. BIELZ, par contre, donne (Fauna Siebenb. Moll. p. 25) comme un caractèr typique du genre *Arion* le fait que: "die Sohle ist ohne Abgrenzung von Seitenfeldern," en opposition aux genres *Amalia* et *Limax*, ayant "die Sohle in drei Längsfeldern getheilt." Dans leurs descriptions détaillés, MOQUIN-TANDON, JEFFREYS et MALM ne font aucune mention de la division du pied tandis qu'ils la signalent partout chez les Limaces. La cause de ces divergences est, sans nul doute, que l'on rencontre sous le pied de toutes les formes jusqu'ici décrites des genres *Arion* et *Prolepis*, une partie médiane plus ou moins marquée chez les *individus* divers, partie se séparant des parties latérales par des bords légèrement *relevés*, et n'occupant souvent qu'une très-faible portion du milieu du pied. Elle présente une autre texture (ordinairement à grains très-fins) que les parties latérales généralement plus foncées, munies de nombreuses raies plus ou moins profondes, transversales, souvent branchues. La forme du pied est donc sensiblement différente de celle du pied des Limaces. Chez aucune des formes tant suédoises qu'étrangères que j'ai recueillies moi-même ou qui m'ont été envoyées, je n'ai trouvé de différence avec la description donnée ci-dessus, jusqu'à une époque tres-récente (Août 1869), ou je trouvai à Ronneby quelques exemplaires d'un *Prolepis* (? "orificio respirationis antemediano, fovea caudali mucipara, testa interna membranacea"), correspondant parfaitement à cet égard aux formes de genre Limax. C'etait le (P.) *limacopus* décrit ci-dessus.

Subfam. HELICINA.

Corporis pars posterior a pede distincta, spiraliter contorta et testa vestita; testa discoidea, globosa vel conoidea, apertura transversa obliqua, lunaris vel rotundata.

Gen. HELIX LINNÉ.

Genus characteribus familiæ gaudet.

A) Fasciatæ: *testa plerumque fasciis obscuris longitudinalibus, sæpius magna vel mediæ magnitudinis.*
† *Imperforatæ* vel *obtecte perforatæ.*

1. *Helicogena* RISSO. *Testa* globosa, fasciis sæpe obsoletis; *anfr.* 4—6 convexi, ultimus magnus, ventrosus; *apertura* obliqua, lunato-orbicularis; *peristoma* patulum vel rectum, intus callo-limbatum, margine columellari reflexo, plerumque calloso. *Glandulæ mucosæ* animalis sæpius circa 40. *Epiphragma* calcarea.

1. HELIX POMATIA LINNÉ.

Testa semi-obtecte-perforata, globosa, ventricosa, rugoso-striata, lineis spiralibus confertis, rufescens vel flavescens, fasciis obsoletis fuscis notata; *anfr.* 5; *apertura* ampla, subrotundo-ovata; *peristoma* patulum, subincrassatum. Diam. 35—40, alt. 30 mm.

Helix pomatia Linné Syst. Nat. X (1758) p. 771; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 528; Syst. Nat. XII (1768) p. 1244. Müller Verm. Hist. II (1774) p. 43. Svensk Zoologi I. 3. t. 18. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 17. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 9. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 234. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 179. t. 14. f. 1—9. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 177. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 59; Coll. Typ. Moll. Su. (1862) N:o 47.
Helicogena pomatia Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 26.

Hab. In **Suecia** in prov. Skåne ubique adventitia et olim introducta, nunc tamen temporis multis locis copiosissima, præsertim in hortis et lucis adjacentibus prædiorum, nec non multis locis circa Stockholm et ad Linnés Hammarby prope Upsala. In **Norvegia** in horto botanico Christianiensi (FRIELE).

Subgen. *Tachea* LEACH. *Testa* subglobosa, cornea, flava vel lutea, fasciis distinctis 1—5 ornata (sæpe concolor); *anfr.* 5, ultimus convexus, tumidus; *apertura* perobliqua, late lunaris; *peristoma* reflexum, labiatum, margine columellari stricto, calloso. *Glandulæ mucosæ* 8—10. *Epiphragma* membranacea.

2. HELIX NEMORALIS MÜLLER.

Testa subglobosa, striata, anfractu ultimo antice descendente; *apertura* late angulato-lunaris; *peristoma* margine exteriore nigro-limbato, columellari nigro, intus callo crassiusculo carneo labiatum. (*Sagitta* longa, recta, aciebus acutis. *Glandulæ mucosæ* utrinque cæcis 3 + 2; canali excretorio communi brevissimo). Diam. 20—23, alt. 16—17 mm.

Helix nemoralis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 46. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 19. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 57. f. 5. Pfeiffer Monogr. I (1848) p. 276. pr. p.; III (1853) p. 195. Friele Norske Moll. (1853) p. 10. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 162. t. 13. f. 1—6. Jeffreys pr. p. Brit. Conch. I (1862) p. 185. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 56.
Helicogena nemoralis Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 24.
Tachea nemoralis Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 42.

1. *lutea vel straminea, unicolor.*

2. *lutea vel straminea, fasciata:*

a. 1, 2, 3, 4, 5.
b. $\widetilde{1, 2}$, 3, 4, 5.
c. $\widehat{1, 2, 3}$, 4, 5.
d. $\widetilde{1, 2}$, $\widehat{3, 4, 5}$.
e. $\widehat{1, 2, 3}$, $\widetilde{4, 5}$.
f. 1, $\widetilde{2, 3}$, $\widetilde{4, 5}$.
g. $\widetilde{1, 2}$, $\widetilde{3, 4}$, $\widetilde{5}$.
h. $\widehat{1, 2, 3, 4, 5}$.
i. 0, 2, 3, 4, 5.
k. 0, 0, 3, 4, 5.
l. 0, 0, 0, 4, 5.
m. 1, 2, 0, $\widetilde{4, 5}$.
n. 0, 0, $\widehat{3, 4, 5}$.
o. 0, 0, 3, $\widetilde{4, 5}$.
p. 0, 0, 0, $\widetilde{4, 5}$.
q. 0, 0, 3, 0, 0.

3. *carnea vel ochracea, unicolor.*

4. *carnea vel ochracea, fasciata:*

a. 1, 2, 3, 4, 5.
b. 0, 2, 3, 4, 5.
c. 1, 2, 3, 0, 0.
d. 0, 0, 3, 4, 5.
e. 0, 0, 0, 4, 5.
f. 0, 0, 3, 4, 0.
g. 0, 0, 3, 0, 0.
h. $\widetilde{1, 2}$, 0, 3, 4.
i. 0, 0, $\widehat{3, 4, 5}$.
k. 0, 0, 3, $\widetilde{4, 5}$.

5. *rufo-brunnea, unicolor.*

6. *lilacina, unicolor.*

β **ponderosa** MALM: testa crassissima, albida, subtus flavida, umbilico sæpe aperto. Malm Göteb. Handl. h. II. p. 121.

a. 1, 2, 3, $\widetilde{4, 5}$.
b. $\widetilde{1, 2}$, 3, $\widetilde{4, 5}$.
c. $\widehat{1, 2, 3}$, $\widetilde{4, 5}$.
d. $\widetilde{1, 2}$, 3, (6), $\widetilde{4, 5}$.
e. $\widetilde{1, 2}$, $\widehat{3, 4, 5}$.

— **marginata** mh.: testa peristomate brunneo-limbato, intus albo-labiato, margine columellari acuto, stricto, tenui, a margine exteriore incisura profunda disjuncto.

a. 0, 0, 0, 0, 0 (lutea).
b. 0, 0, 3, 0, 0 (lutea).

— **porrecta** mh.: testa sutura antice non subito descendente et anfractu ultimo prorsus deflexo, apertura adeoque magis rotundata, margine peristomatis exteriore supra fascias duas infimas affixo.

Hab. In **Suecia** hæc testa in meridionali et media parte prov. Skåne fere ubique obvenit; locis autem paucis prov. Blekinge; prov. Småland: in hortis et in sepulcris extra Kalmar; prov. Westergötland: ad Göteborg raro (MALM), in septo extra urbem copiose (J. E. ZETTERSTEDT!), sub radice orientali montis Billingen (C. G. ANDERSSON!), in Hellekis et in "Råbäcks Munkängar" in monte Kinnekulle (teste amic. ZETTERST.); circa Stockholm vix indigena, quamvis in septo regio ad Haga et ad Drottningholm inventa (WIKSTRÖM Stockh. Flora I. p. 123); ins. Gotland: in agris orientem versus a Visby, ad Skrubbstomt, in hortis urbis Visby et ad Rosendal (LINDSTRÖM). *β ponder.* prov. Skåne ad Benestad (SILFVERSVÄRD

sec. Malm; specim. numerosa mihi misit amic. J. Lindahl). — *margin.* prov. Skåne ad Möllevången prope Malmö (C. A. W.). — *porr.* ad Malmö (C. A. W.). In **Norvegia** passim frequens, ad Hardanger copiose (FRIELE), ad Bergen (v. MARTENS).

3. HELIX HORTENSIS MÜLL.

Testa globosa, striata, anfractu ultimo antice descendente; *spira* subconica; *apertura* angulato-lunaris; *peristoma* albo-limbatum et albo labiatum. (*Sagitta* cuspide leviter incurvo, basi capitato, acicbus dilatatis late canaliculatis. *Glandulæ mucosæ* utrinque cæcis 4 geminis, canali excretorio communi longo). Diam. 16—20, alt. 12—14 mm.

Helix nemoralis Linné (It. Œl., 1745, p. 137) Syst. Nat. X (1758) p. 773; Fauna Su. (ed. I. 1746. p. 370) ed. 2. (1761) p. 530.

Helix hortensis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 57. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 21. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 59. f. 6. V (1837) p. 6. f. 299, 300. Pfeiffer Monogr. Heliceor. III (1853) p. 195. Friele Norske Moll. (1853) p. 11. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 167. t. 13. f. 7—9. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 16. f. 7. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 57.

Helix nemoralis var. hortensis Pfeiffer Monogr. Helic. I (1855) p. 277. Jeffreys Brit. Conch. (1862) p. 186.

Helicogena hortensis Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 25.

Tachea hortensis Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 44, 45.

1. *albida, unicolor.*
2. *albida, fasciata:*

a. 1, 2, 3, 4, 5 (fasc. pall. ros.). b. 1, 2, 3, 4, 5 (f. transpar.). c. 0, 0, 3, 0, 0.

3. *lutea vel citrina, unicolor.*
4. *lutea vel citrina, fasciata:*

a. 1, 2, 3, 4, 5. e. 0, 0, 3, 0, 0. i. 1, 2, 3, 4, 5.
b. 1, 2, 0, 0, 5. f. 1, 2, 3, 4, 5. k. 1, 2, 3, 4, 5.
c. 1, 0, 3, 4, 5. g. 1, 2, 3, 4, 5. l. 1, 2, 3, 4, 5.
d. 1, 0, 3, 0, 5. h. 1, 2, 3, 4, 5.

5. *carnea.* 1, 2, 3, 4, 5.
6. *isabellina, concolor.*
7. *pallide castanea:* a. 0, 0, 0, 0, 0. b. 0, 0, 3, 0, 0.

— **perforata** M.: lutea, valde perforata, fasciis quinque.

— **hybrida** POIR.: testa margine peristomatis interno carneo, violaceo vel subroseo.

β **minor** JEFFR.: testa minor, lutea, 5-fasciata; diam. 14, alt. 9 mm.

Hab. In **Suecia** hæc species per provincias omnes plus minus frequenter saltem usque in prov. Dalarne (3 et 4 non infrequens ad Norrgovik par. Grangärde: C. G. ANDERSSON!) distributa; *2.b* ins. Gotland: in fruticetis ad Lummelundsbruk, ad Bönders (HÖGBERG), ad Länna et Visby (LINDSTRÖM); prov. Skåne: ad Ignaberga (MALM); prov. Östergötland (teste SILFVERSVÄRD); prov. Nerike: ad Hjelmarsberg non raro (HARTMAN); prope Stockholm ad Danvikskroken (HÖGBERG); ins. Öland: ad Tveta (testa pellucida, colore pallide flavo: C. A. W.); *2.c* prov. Skåne: in Lillöslund prope Christianstad (C. A. W.); *4.g* prov. Skåne: ad Balsberg (MALM); ins. Gotland in agro ad Kopparsvik (LINDSTRÖM); ins. Öland ad Tveta (C. A. W.). — *perfor.* ins. Gotland: in juniperitis, alfvarne dictis, prope templum Wamlingbo, littora versus (HÖGBERG, LINDSTRÖM). *β minor:* ins. Gotland ad Lutterhorn in Fårö (LINDSTR.). In **Norvegia** passim ad Christiania, Bergen et Hardanger (FRIELE), nec non ad Aalesund et Trondhjem (var. 3.: MARTENS) et aliis locis. *2.b.* ad Ekeberg prope Christiania (O. S. JENSEN!!).

Quand dans son Historia Vermium (1774) O.-F. MÜLLER sépara *l'Helix nemoralis* de *l'H. hortensis*, il commit la faute de donner le nom Linnéen de *nemoralis* au type "labro fusco", car *l'Helix nemoralis de* LINNÉ *n'est pas la coquille à laquelle on donne actuellement ce nom, mais l'Helix hortensis de* MÜLLER! Lorsqu'il divisa cette coquille en deux espèce, c'etait (outre le faible appui qu'il avait dans le Mus. L. U. de l'année 1764, de LINNÉ) probablement en se fondant sur leurs rapports en Danemark, qu'il donna le nom specifique de Linné à l'espèce à lèvre foncée. De ce temps-là il ne s'éleva chez personne aucun doute sur la justesse de cette dénomination; elle a reçu dés-lors pour ainsi dire la sanction du temps ou si l'on veut une "ærugo nobilis", qui en nécessite pour ainsi dire la conservation, en dépit de ce qu'elle a d'erroné. La source de *l'Helix nemoralis* de LINNÉ est son Iter Œland. (exécuté en 1741) p. 127 ("Cochlea vulgaris, testa variegata Petiv. mus. n:o 14 se rencontrait avec différentes couleurs dans les bois d'arbres à feuilles"). Il cite cette source avec les mêmes termes tant dans la 1ère (1746) que dans la 2de (1761) édition de sa faune ("habitat in *nemoribus.* It. Œl. 127"). *Helix nemoralis Auctt. n'existe nulle part sur toute l'Öland, tandis que Helix hortensis* MÜLLER *y est vulgaire!*

Subgen. *Arionta* LEACH. *Testa* conoidea vel depresso-globosa, plerumque fascia unica obscura supramediana; *anfr.* 5—6, ultimus convexus, tumidus; *apertura* magna, obliqua, lunato-rotundata; *peristoma* late labiatum, patulum, margine columellari arcuato, reflexo. *Glandulæ mucosæ* 2, simplices. *Epiphragma* membranacea.

4. HELIX ARBUSTORUM LIN.

Testa obtecte perforata, globulosa, spiraliter minutissime striata, nitida, fusca, unifasciata, maculis stramineis aspersa; *peristoma* candide labiatum. Diam. 18—23, alt. 17—22 mm.

Helix arbustorum Linné Syst. Nat. X (1758) p. 771; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 529; Syst. Nat. XII (1767) p. 1245. Müller Verm. Hist. II (1774) p. 55. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 18. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 56. f. 4; V (1837) p. 5. f. 297 a—e. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 339. Friele Norske Moll. (1853) p. 8. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 123. t. XI. f. 1—4. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 16. f. 18. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 188. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 55.

Arianta arbustorum Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 22.

Arionta arbustorum Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 41.

1. **morbosa albina** ROSSM. Icon. I. p. 57: testa pallide lutea vel flavo-albina, fascia obsoleta seu nulla, colore griseo-flavescente sub epidermide tincta. (HÖGBERG in K. Vet. Akad. Handl. 1841. p. 198).

β. **alpicola** FÉR.: testa flavida, diam. 13—14, alt. 11—12 mm.

γ. **calcarea** HÖGBERG: testa calcarea, crassa, solida, colore obscure castanea, maculis luteis, intus obscure purpurea; diam. 22—24—25, alt. 16—18—21 mm. (Criticola, ponderosa, gigantea; diam. 27 mm.: MÖRCH l. c.).

δ. **depressa** SCHOLZ: testa magna, depressa, tenuis, perforata, colore formæ typicæ; diam. 25 mm., alt. 18 mm.

ε. **conoidea** mh.: testa maxima, conica, subperforata, irregulariter subcostulata, unifasciata, maculis pallide luteis ad lineas transversales densas confluentibus; anfr. $6\frac{1}{2}$, ultimus pone aperturam extus fascia lata, pallide lutea; diam. 23—24, alt. 25—26 mm.

ζ. **picea** ZIEGLER: testa tenuissima, transparens, castanea, unicolor, unifasciata.

Hab. In **Suecia** hæc testa passim frequens in provinciis plerisque (in aliis, ex. gr. circa Stockholm, prorsus desideratur) ab infima parte prov. Skåne saltem ad 67—68° lat. bor. usque, ubi eam celeb. v. WALLENBERG et BOHEMAN ad Qvickjock Lapponiæ Lulensis, sub forma alpicola, invenerunt, magnitudine et pictura formæ alpinæ, qualis in alpibus Helvetiæ reperitur, respondentem, sed tinctura fulva in spec. lapp. minus prævalente. In alpibus Lapponiæ fere ad terminum nivalem (ubi nix perpetua majorem partem terræ tegit) ascendit et vulgatior est supra regionem betulinam, quam in vallis infrajacentibus, sicut etiam in terris humilioribus a Qvickjock ad Luleå desideratur. 1. *morb. alb.* in truncis arborum, sub lapidibus calcareis et in plantis (præsertim humulo lupulo) ad diversorium Stucks in Bunge,

extra Norre-Port ad Visby, in horto pastoris par. Klinte (HÖGBERG) et in insulis Carlsöarne (LINDSTRÖM) ins. Gotland; in horto botanico Lundensi (MALM). *β alpicola:* in parte boreali peninsulæ. *γ calc.* in insula Gotland fere ubique, maxima ad Hallbros in Westerhejde et in Thorsburg (HÖGBERG, LINDSTRÖM). *δ depr.* multis locis prov. Skåne. *ε conoidea:* ad Fogelsång prope Lund prov. Skåne. In **Norvegia** ubique frequentissima usque in Finnmarken (FRIELE). *ζ picea:* Korsvold ad Christiania (O. S. JENSEN!!).

Mr J. GWYN JEFFREYS doute que le type *Helix arbustorum* de LINNÉ soit l'espèce ci-dessus, disant à cet égard dans la British Conchology (I, p. 190): "whether it is the species which Linné described as *H. arbustorum*, is questionable, as his diagnosis ("testa *umbilicata*, convexa, *acuminata*, apertura suborbiculari *bimarginata*, *antice elongata*") is scarcely applicable to this species." O.-F. MÜLLER exprimait déjà le même doute en se fondant sur les mêmes raisons. Le diagnose de LINNÉ qui parait s'en séparer a la première vue, se laisse toutefois parfaitement expliquer. LINNÉ ne faisait presque pas de difference entre l'ombilic et la perforation. En parlant de *H. hispida*, p. ex. il dit, dans son diagnose, "testa umbilicata", et dans la description "testa subtus perforata" — et l'on rencontre assez souvent des exemplaires de cette espèce avec une ouverture ombilicale très-large. Par l'épithète "acuminata" il entend la spire parfois très-aiguë de quelques formes. Il nomme l'ouverture "bimarginata", parce que le rebord plissé en arrière (ed. I. p. 370) présente une lèvre ou bourrelet parallèle à ce rebord, et il ajoute les mots "antice elongata" pour indiquer que l'embouchure dévie de la forme circulaire qui lui est attribuée dans le diagnose. La description que donne LINNÉ de la couleur de la coquille est en outre de nature à éliminer chaque doute sur la coquille qu'il a eu en vue. Rien n'est cependant plus ordinaire chez LINNÉ que de donner une description différente du diagnose: il veut probablement présenter dans la description plutôt les divergences qu'il connaît, que divers points de vue pour la compréhension des caractères d'une espèce.

HELIX RUDIS MÜHLF.

Testa minor, globoso-depressa, spira planiuscula, umbilicata, subcostata, maculis flavis in lineis transversis subconfluentibus; "flagellum animalis brevius."

Helix arbustorum 5) *Stenzii*, Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 57, f. 78; V (1837) p. 6. f. 297 e.

Hab. In **Norvegia** ad Fredriksværn hanc formam a. 1841 celeberr. C. M. POULSEN invenit, et in collectione ejus eam vidi.

†† *Umbilicatæ.*

Subgen. *Chilotrema* LEACH. *Testa* umbilicata, depressa, medio acute carinata, fusco-maculata vel strigata (interdum et typice ad 4-fasciata); *anfr.* 5; *apertura* horizontalis, transverse ovalis; *peristoma* continuum, solutum.

5. HELIX LAPICIDA LIN.

Testa aperte umbilicata, lenticulari-depressa, subtilissime granulata, lutescenti-cornea, fusco-maculata; *anfr.* 5, ultimus antice subito deflexus; *peristoma* margine columellari reflexo, sublabiato. Diam. 17—21, alt. 7—9 mm.

Helix lapicida Linné It. Œl. (1745) p. 8; Syst. Nat. X (1758) p. 768; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 526. Müller Verm. Hist. II (1774) p. 40. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 28. Rossmässler Icon. I (1835) p. 63. f. 11. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 370. Friele Norske Moll. (1853) p. 14. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 137. t. 11. f. 22—27. Nordensk. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 22. f. 13. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 227. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 51.

Arianta lapicida Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 23.

Chilotrema lapicida Westerlund Coll. Typ. (1868) N:o 37.

1. **albina.** (Junior = *Helix albella* LINNÉ Fauna Su. ed. 2. p. 526). **Sinistrorsa.**

Hab. In Suecia meridionali et media hæc testa sæpius frequentissima in regionibus calcareis occurrit, sed in formatione primitiva aut rara aut ignota. Plus minus *vulgaris* in prov. Skåne, in ins. Öland et Gotland, in prov. Westergötland (ex. gr. ad Göteborg: MALM, in monte Kullaberg, orientem versus copiosissime: C. LINROTH!, in Mösseberg etc.), in prov. Östergötland (præcipue in monte Omberg), in prov. Nerike (locis paucis extra regiones calcareas, ex. gr. ad Willingkullen et Hjelmarsberg: HARTMAN), circa Stockholm multis locis (WIKSTRÖM, HARTMAN) et in prov. Gestrikland ad pagum Storvik par. Ofvansjö: C. G. ANDERSSON!). Plus minus *rara* in prov. Blekinge (ad Ronneby paucis locis et ad Carlskrona in Kungshall, Saltö etc.), Småland (ad Rosenlund prope Jönköping: ZETTERSTEDT, ad Tenhult, Helgarydsåsen: E. HEMBERG!, etc.), Westmanland (ad Engelsberg, Strömsholm et Fullerön: C. H. JOHANSON!), Upland (ad Dannemora: C. H. JOHANSON!) et Dalarne (ad Spjutbo par. Husby: C. G. ANDERSSON!!). Supra 61° l. b. non inventa. 1. *albinam* in Œlandia cepit Linné (postea eodem loco auctor); in monte Omberg et aliis locis prov. Östergötland a beat. E. v. Goës s:r, et in prov. Westergötland (Mus. Marklin.) deinde inventa. Deform. *sinistrorsa* ad Bungenäs ins. Gotland (LINDSTRÖM). In Norvegia circa Christiania et in insulis sinus Christianiafjorden copiose (FRIELE), nec non in Beleshöi ad Sognefjord (V. MARTENS) et in par. Hof, longe a mari (O. S. JENSEN!).

LINNÉ prit en 1741 dans l'île d'Öland, sur la montagne de Vickleby (Vickleby berg), à $1\frac{1}{4}$ kilom. au nord de Resmo (voir son voyage d'Öland, p. 65), parmi les

roches calcaires, une coquille qu'il trouva immédiatement "curieuse par l'angulosité prononcée de sa marge." Cette coquille reçut le nom de *Helix albella* dans sa Fauna Suecica, 2ème éd., où elle est décrite comme suit: præcedenti *(H. lapicida)* multoties minor; testa supra plana fere est, subtus valde gibba et perforata umbilico; acies lateralis in hac versus latus planum, contrario ac in præcedenti modo, ubi margo in medio anfractus; hinc dum apertura præcedentis ovata est, huic erit dimidiatio cordata s. cordis longitudinaliter dissecti dimidium referens, nullo modo margine dilatata; hæc constat anfractibus tribus vel quattuor, præcedens vero anfractibus quinque." Depuis cette époque-là, son sort a été d'être méconnue de tous les auteurs, et d'être pour eux une énigme difficile à résoudre. MÜLLER (Historia Vermium, II, p. 26), la croyait synonyme de sa *H. explanata* ("injuria forte aëris dealbata Linnæo *albella* dicitur": Müll.), ce dont Linné fut lui-même la cause par sa citation fautive de l'ouvrage de GUALTIERI, Test., Tab. III. f. 9; et en vertu de la loi de priorité, DRAPARNAUD (Tabl. Moll., p. 90, Hist. p. 113) donna à *l'Helix explanata* de MÜLLER, le nom de *H. albella*, ce qu'ont fait après lui LAMARCK, RISSO, BECK et plusieurs autres; c'était juste à cet égard du moins, que plus tard (Syst. Nat. XII) LINNÉ transporta le nom de *H. albella* à la véritable *H. explanata*, sans doutes après que les exemplaires Ölandais de *l'H. alb.* primitive eurent été égarés. Cette confusion s'explique parfaitement par la grande ressemblance de forme qui règne entre toutes le phases de *H. explanata* et de *l'H. albella* de LINNÉ ("testa supra plana, subtus valde gibba, apertura dimidiato cordata" etc.), que de la grande indifférence de LINNÉ pour cette branche de la zoologie. *H. explanata* se trouve aussi sous le nom de *H. albella* dans la collection de LINNÉ conservée a Londres (d'après "Ipsa Linnæi Conchylia" bey HANLEY, Londres 1855) mais il ne s'ensuit pas pour cela que la première, qui ne se retrouve que dans la France du Sud et en Algérie, doive porter ce dernier nom, donné à une forme tout différent, quoique congénère. NILSSON (Hist. Moll., p. 29) a supposé que LINNÉ a eu devant lui une jeune *H. rotundata* qui n'était pas encore entièrement développée, mais un individu de cette espèce avec "3—4 anfr.", n'ayant pas plus de 2—2$\frac{3}{4}$ mm. de diamètre, ne peut, par consequent, se comparer avec *H. lapicida*, et est en outre bien loin de correspondre avec la description de LINNÉ, à quoi il faut ajouter qu'il manque totalement dans la localité où LINNÉ trouva son *H. albella*. D'un autre côté, ROSSMÄSSLER (Icon. V et VI, p. 35; VII et VIII, p. 41) était persuadé que *l'H. albella* de LINNÉ est synonyme de *l'H. albina* MÜLL., c-à-d. un jeune exemplaire de *l'H. pisana* MÜLL. L'extension géographique de cette coquille montre suffisamment que c'est une erreur. M. le Dr THIENEMANN a consacré (Malak. Bl., 1857) une dissertation spéciale à la recherche de *l'H. albella* de LINNÉ, et il veut la trouver "par la voie historique et critique." Il cite premièrement la source même (voyage dans l'Ile d'Öland) puis la description consignée dans la Fauna Su. (1ère Edit., p. 371). "Cette coquille, dit-il, doit par conséquent se trouver à Öland", et pour *l'y* retracer, il cite premièrement les espèces du genre *Helix* qui après LINNÉ ont été trouvées en Suède ("besonders von den Herren NILSSON, LOVÉN und LILLJEBORG"); premièrement par NILSSON, circonstance par laquelle il rencontre *H. crystallina*, qu'il accentue; puis celles trouvées par LILLJEBORG dans l'île de *Gotland*, occasion à laquelle l'auteur allemand signale et accentue de nouveau spécialement *H. crystallina*. Les mollusques d'Öland lui sont par-

faitement inconnus, dit il, mais comme *l'H. cryst.* se trouve en Suède et spécialement à Gotland ("die wohl dieselbe Molluskenfauna haben mag wie Öland"), il s'ensuit nécessairement, suivant le Dr TH., que *l'H. albella* prise par LINNÉ à Öland, ne peut être que *l'H. cryst.*, et il ajoute: "ich darf überzeugt sein, dass jeder Malakolog, der unbefangen meine Untersuchung verfolgt, mit mir übereinstimmen wird!" Cette supposition est, si possible, encore plus inexacte que les autres. Toutefois M. le Dr THIENEMANN a eu une vague idée d'une grande vérité pour la critique des espèces de LINNÉ, savoir que l'une des sources les plus importantes pour leur détermination, *est la fixation précise de la localité où* LINNÉ *dit avoir lui-même pour la première fois trouvé et déterminé une espèce.* Mais ce n'est "par la voie historique" du Dr THIENEMANN que l'on arrive à la découverte de cette localité: il faut pour cela visiter les lieux en question et s'y livrer à des recherches minutieuses. En le faisant, on trouvera dans le cas actuel, que la coquille prise par LINNÉ à Öland et décrite par lui dans la Fauna suecica sous le nom de *Helix albella*, n'est rien autre qu'une jeune *Helix lapicida*, *imparfaitement développé, à coloration pâle, et peut-être décomposé par l'air.* Je suis pleinement convaincu de ce fait. Dans l'espace de plusieurs années, j'ai a fois réitérées visité minutieusement, des journées entières la localité, *presque la place même* où LINNÉ prit sa coquille, sans trouver d'autre mollusque muni d'une carène, que *l'H. lapicida;* de cette espèce, je découvris deux exemplaires adultes et un jeune individu, tous trois vivants, qui avaient des coquilles presque blanche, et le dernier exemplaire conforme *sur tous les points* à la description de LINNÉ. Comme j'ai entendu dire à des conchyliologues étrangers que le feu professeur adjoint G. MARKLIN d'Upsal montrait aux visiteurs comme une grande rareté dans sa collection deux exemplaires de "*l'H. albella* L. *vera*", je mentionnerai que j'examinai ces coquilles en 1852, et que je trouvai la détermination donnée par le propriétaire parfaitement juste; *c'etaient donc aussi de jeunes individus de H. lapicida!* L'un avait été pris, "par THENGBERG, sur le Mösseberg en Westrogothie dans la cataracte de Besstorp"; coquille blanc sale avec une nuance bleuâtre; 3 spirales, larg. 6 mm., haut. $2\frac{1}{2}$ mm., pour le restant parfaitement identique à la description de *l'H. albella* de LINNÉ. Le second exemplaire avait été pris par MARKLIN lui-même en 1821 "sur les montagnes de Gottsunda, près d'Upsal, sous de l'écorce du sorbier"; il etait en dessus d'une couleur de corne, blanc bleuâtre en dessous, à carène fortement dessinée; larg. 10 mm., haut. 3 mm.; longeur de l'ouverture 5 mm., $3\frac{1}{2}$ spirales.

Subgen. *Xerophila* HELD. *Testa* calcarea, plus minus umbilicata, globoso-depressa, multi-lineata, sæpe unifasciata (vel concolor); *anfr.* 5—6; *apertura* lunato-rotundata vel sub-circularis; *peristoma* acutum, intus labiatum.

6. HELIX STRIATA MÜLLER.

Testa globoso-depressa, interdum planulata, alba vel luteo-flavescens, vix nitidula, irregulariter costulata, vertice lævi, subfusco; *anfr.* 5, fere cylindrici, plerumque fasciati, fasciis strigisque fuscis, fere nigris; *umbilicus*

patulus, profundus; *apertura* lunato-subcircularis; *peristoma* rectum, acutum, callo complanato albo intus munitum, marginibus approximatis, columellari arcuatim descendente. Diam. 9—10, alt. 5—6(—8) mm.

Helix striata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 38. (Conf. A. Schmidt in Malak. Bl. 1854. p. 17; Rossmässler Icon. III. h. 13 et 14. p. 25 et 26 et E. v. Martens in Malak. Bl. 1859. p. 129—131). Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 141. Bielz Fauna Moll. Sieb. (1867) p. 80.

Helix ericetorum Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 118.

Helix costulata Ziegler Mus. sec. Rossmässler. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 169. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 54.

Theba costulata Beck Index Moll. (1838) p. 11.

Theba nilssoniana Beck Index Moll. (1838) p. 11.

Helix candidula var. Rossmässler Icon. VII (1837) p. 26. f. 353.

Helix nilssoniana Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 119; III (1855) p. 133. Pfeiffer Monogr. IV (1859) p. 144; V (1868) p. 210.

Helix intersecta Pfeiffer Monogr. IV (1853) p. 134. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 241. t. 18. f. 11, 12?

Xerophila striata Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 40.

Hab. In **Suecia** occurrit in campis quam maxime apricis et apertis, præcipue lapidosis in Vestra Landtborgen ins. Öland passim copiose.

7. HELIX ERICETORUM Müller.

Testa convexiusculo-depressa, candida (vel fuscescens), nitida, striatula; *spira* vix elata, apice fusca; *anfr.* (5—)6, planulati, fusco-fasciati, ultimus antice deflexus; *umbilicus* latus et perspectivus; *apertura* lunato-obovata, magna; *peristoma* simplex, intus leviter labiatum, marginibus approximatis. Diam. maj. 16, min. 13 mm., alt. 9 mm.

Helix ericetorum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 33. Rossmässler Iconogr I (1855) p. 67. f. 17; VIII (1838) p. 33. f. 517. Pfeiffer pr. p. Monogr. Helic. I (1848) p. 163.

Helix candicans v. Martens Malak. Bl. III (1857) p. 89.

Jacosta ericetorum Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 20.

Hab. In **Norvegia** exemplar unicum mortuum in silva ad Christiania obvenit prof. SARS (sec. v. MARTENS); in Zirkonbrottet ad Fredriksværn a. 1841 ex. plura invenit clariss. C. M. POULSEN.

La description ci-dessus est donnée d'après un exemplaire venant de Fredriksværn, que je dois à l'obligence de M. le Dr POULSEN. Le Dr E. v. MARTENS rapporte cette espèce norvégienne a *H. candicans* ZGL., mais tous les exemplaires vus par moi dans la collection de M. le Dr POULSEN, sont, à l'exception de leur

ouverture, qui n'est pas si arrondie, parfaitement conformes à de nombreux exemplaires de *H. cricetorum*, reçus par moi de Klagenfurt, Francfort s. M., Clermont, Bieritze, etc., tandis que d'autre part ils ne peuvent être identifiés avec *H. candicans* de la Hongrie et de Laibach.

Subgen. *Eulota* HARTM. *Testa* umbilicata, inflata, subglobosa, fascia unica, supramediana (testa sæpe concolor); *anfr.* 5—7; apertura subrotunda; *peristoma* subpatulum, intus labiatum.

8. HELIX FRUTICUM MÜLLER.

Testa aperte umbilicata, globosa, rufescens vel albido-lutescens; *anfr.* 5—6, lineis parallelis undulatis spiralibus microscopicis ornati, ultimus basi inflatus; *apertura* lunato-rotundata, peristomate intus labiato. Diam. 18—21, alt. 13—14 mm.

H. fruticum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 71. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p 22. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 61. f. 8. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 135. Friele Norske Moll. (1853) p. 7. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 196. t. 16. f. 1—4. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 18. f. 9. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 51.

Eulota fruticum Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 21. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 35 et 36.

1. **rufa:** a) unicolor. b) fascia unica supra mediana purpurea.
2. **pallide cornea:** a) unicolor. b) fascia purpurea vel rufo-brunnea.
3. **pallide lutea:** a) unicolor. b) fascia purpurea.
4. **alba:** a) unicolor. b) unifasciata.

β. **conoidea** mh.: testa alba, acuta; diam. 19, alt. 20 mm.

Hab. In Suecia testa late distributa, sed sporadica. In parte meridionali et media prov. Skåne non infrequens; in prov. Blekinge raro occurrit, præsertim circa Carlskrona; in Ölandia ad Borgholm et ad Tveta inveni; in ins. Gotland ad Mölnare, Klinte, Sundre, Bunge, Rute et Fardhem, sæpe in junipero communi (LINDSTRÖM); in prov. Småland (teste amic. Zetterstedt); in prov. Westergötland: ad Göteborg parce, ex. gr. Slottsskogen, Lagklarebäck, Utterbäck et Billdal (MALM), in monte Kinnekulle (C. LINROTH!), in montibus Billingen et Mösseberg (C. A. W.); prov. Bohuslän: in Skaftö et ad Uddevalla (MALM); prov. Östergötland: ad Lilla Ljunna, Mjölsefall et aliis locis (E. v. Goës!), ad Motala, in monte Omberg (C. A. W.); prov. Nerike: in omnibus regionibus calcareis, vix alibi (HARTMAN); circa Stockholm multis locis (ex gr. Carlbergs park, Djurgården, Kungshatt: WIKSTRÖM; in Sicklaön, ad Lilla Sickla et ad Kungshamn, in Wermdön ed ad Stora Björknäs: HARTMAN); prov. Upland: ad

Upsala (C. A. W.); prov. Westmanland: ad Klacken par. Norberg vulgaris, præterea rara (C. H. JOHANSON!); prov. Dalarne: ad fodinam s. d. Bisbergs grufva frequens (2b, 3a, 3b. 17—18 mm. lat., 12 mm. alt.) et ad Osmundsberget par. Rättvik (C. G. ANDERSSON!!); prov. Helsingland: ad Söderhamn (BOHEMAN), locus quam maxime borealis (61—62°) Sueciæ. Var. *4a* perrara, locis paucis (ex. gr. in monte Mösseberg) observata. *β con.* in junipero ad Sundre ins. Gotland (LINDSTRÖM). In **Norvegia** hæc species passim ad Christiania et Bergen occurrit (FRIELE, MARTENS).

B) **Leucozonæ**: *testa pellucens, fascia unica media albescente.*

Subgen. *Hygromia* RISSO. *Testa* umbilicata vel perforata, depresso-globosa vel turbinato-globosa, sæpissime pilosa vel setigera vel granulata; *anfr.* 5—7, convexiusculi; *apertura* late lunaris vel lunato-rotundata; *peristoma* acutum, brevissime expansum, intus labiatum vel etiam dentatum.

1. *Monacha* FITZ. *Testa* perforata, depresso-globosa, minutissime granulata; *apertura* obliqua, oblongo-lunaris; *peristoma* acutum, reflexum, intus valide labiatum. *Animal* sagitta unica.

9. HELIX INCARNATA MÜLLER.

Testa perforata, depresso-globosa, obsolete carinata, opaca, rufescens, pellucide unifasciata, granulata et squamulis minutissimis pruinosa; *anfr.* 6, ultimus antice deflexus, aperturam versus luteo-rufus; *apertura* lunata, intus labio incarnato. Diam. 12—13, alt. 8—9 mm.

Helix incarnata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 63. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 34. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 62. f. 10; VI (1837) p. 361. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 138. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 199. t. 16. f. 5—8. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 49.

Hygromia incarnata Mörch Syn. Moll. Su. (1864) p. 19. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 33.

Junior: *Helix sericea* Müller Verm. Hist. II. p. 62.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Esperöd (NILSSON), Ignaberga et Åkesholm (MALM), W. Wram (LILLJEBORG), Öfvedskloster (L. P. HOLMSTRÖM!!), St. Dahlby (C. ROTH!!), circa Ringsjön (J. A. WALLIN et ipse) et aliis locis; prov. Blekinge: ad Ronneby prope lacum Skärsjön loco unico non parce (C. A. W.), Djupadal (J. ANKARCRONA!!); prov. Småland: ad Husqvarna (C. O. v. PORATH!).

2. *Trichia* HARTMANN. *Testa* umbilicata vel perforata, depresso-globosa, sæpissime pilosa vel setigera; *apertura* late lunaris vel lunari-rotundata; *peristoma* acutum, brevissime expansum, intus labiatum, margine basali reflexo. *Animal* sagittis duabus.

10. HELIX STRIGELLA DRAP.

Testa aperte umbilicata, depresso-globosa, striata, cinereo-cornea, albido-cingulata (fugacissime pubescens); *anfr.* 5—6, ultimus antice descendens; *apertura* lunato-rotundata; *peristoma* patulum, remote labiatum, marginibus approximatis. Diam. 14—15, alt. 9—10 mm.

Helix strigella Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 84; Hist. Moll. (1805) p. 84. t. 7. f. 1, 2. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 23. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 61. f. 9. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 142. Friele Norske Moll. (1853) p. 13. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 204. t. 16. f. 14—17. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 9. f. 11. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 50.

Hygromia strigella Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 18. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 34.

Junior = *Helix conspurcata* Nilsson Hist. Moll. Su. p. 25.

β **minor** ROSSM. Icon. VII. p. 4. f. 438: testa minor, pallida, tenuis, pellucida.

Hab. In **Suecia** hæc species per provinciam maxime meridionalem, Skåne, fere ubique distributa; præterea ad Lyckeby et pluribus locis circa Carlskrona (C. A. W.), ad Mörrum (GOSSELMAN) prov. Blekinge; prov. Småland: ad Jönköping (ZETTERSTEDT); ins. Öland: ad Borgholm, Horn, Tveta etc. (C. A. W.); ins. Gotland: ad Tomklint par. Löjsta (LINDSTRÖM); prov. Bohuslän: ad Marstrand (O. NORDSTEDT!); prov. Westergötland: in monte Kinnekulle orientem versus (C. LINROTH!), in montibus Mösseberg et Billingen (C. A. W.), in monte s. d. Dverstorpsberget (K. AHLNER!); prov. Östergötland: ad L. Ljuna (E. v. GOËS), ad Borghamn et aliis locis in monte Omberg (C. A. W.); prov. Nerike: inter Lanna et Sälfven par. Hidinge et in Stockebäcksäng par. Asker (C. HARTMAN); circa Stockholm ad Ingenting et in nemore ad Carlberg (WIKSTRÖM), ad Kungshamn, Lilla Ängsviken et ad Lilla Björknäs ins. Wärmdön (C. HARTMAN); prov. Westmanland: ad fodinas Rihl et Moss par. Norberg non parce (C. H. JOHANSON!); prov. Upland: ad Upsala; prov. Dalarne: ad Säther rarior, ad Husquarna par. Tuna et infra Osmundsberget (C. G. ANDERSSON!!). — *β minor:* prov. Skåne: ad Söndraby prope Christianstad (MALM); ins. Öland: ad Borgholm (C. A. W.). — In **Norvegia** passim ad Christiania (FRIELE) et ad Bergen (SARS sec. v. MARTENS), nec non in Malmöen in sinu Christianiensi copiose et in Ladegaardsön prope Christiania (C. M. POULSEN!).

HELIX *COLLINIANA BOURG.

Testa aperte pervio-umbilicata, subdepressa, globulosa, solidula, subpellucida, cornea, obscure zonula pallidiore cingulata, tenuiter striata ac paululum sub lente crispulata; *spira* convexo-conoidalis, apice minuto, lævigato; *anfr.* 6, convexiusculi, regulariter accrescentes, *sutura* impressa separati, ultimus exacte rotundatus, ad aperturam descendens; *apertura* obliqua, vix lunata, rotundata; *peristoma* simplex, acutum, intus maxime albido-labiatum, margine basali paululum expanso, margine columellari reflexo, marginibus approximatis, tenui callo albido diaphanoque junctis. Alt. 9, diam. 15 mm.

Helix colliniana Bourguignat in Rev. et Mag. Zool. XV (1863) p. 258. Pfeiffer Monogr. Heliceor. V (1868) p. 199.

Hab. In **Norvegia.**

Obs. Affinis *H. strigellæ* DRAP. differt umbilico latiore, infundibuliformi, apertura minore, anfractibus eleganter rotundatis, lentius et regularius accrescentibus etc. (BOURG.).

D'après une communication verbale de mon ami J. COLLIN, le local indiqué pour cette forme ("Suecia") est inexact, et doit être remplacé par "Norvegia".

11. HELIX HISPIDA LINNÉ.

Testa depresso-globosa, tenuiter striata, pilis brevibus raris hispida, umbilicata, nitidula; *spira* convexa; *anfr.* 5—6½, convexiusculi, lente accrescentes, ultimus rotundatus, ampliatus, interdum linea pallidiore obsoleta cinctus; *apertura* subrotundo-lunata; *peristoma* patulum. Diam. sæpius 7—8, alt. 4—5 mm.

Helix hispida Linné Syst. Nat. X (1758) p. 771; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 528. Müller pr. p. Verm. Hist. II (1774) p. 73. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 27. Rossmässler Iconogr. VII (1838) p. 2. f. 426. Pfeiffer pr. p. Monogr. Helic. I (1848) p. 148; IV (1859) p. 130. Friele Norske Moll. (1853) p. 13. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 224. t. 17. f. 14—16. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 20. f. 12. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 198. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 47.

Hygromia hispida Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 18. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 30.

— **fusca** vel saturate brunnea, peristomate simplice.
a: testa *major*, conica; diam. 10, alt. 6 mm.
b; testa *minor*, depressior; diam. 5—6, alt. 3½ mm.

— **pallida,** lutescens vel albida, peristomate intus, præsertim in margine basali strictiusculo, callo albo prædito, qui testam pellucet et extus, pone aperturam, fasciam transversam luteam efficit.
a: testa *major*, conica; diam. 8—10, alt. 6 mm.
b: testa *minor*, pepressior; diam. 5—6, alt. 3—3½ mm.
— **albina,** hyalina, densius hispida.
— **conica,** minor, spira elevata, anfr. 5—6½, arctioribus, ultimo vix latiore.

Hab. In **Suecia** per provincias meridionales et medias, saltem ad 60° lat. bor. usque, distributa, multis locis copiosa, multis rara (ex. gr. in Blekingia, Nericia, Smolandia interna, Uplandia orientali), multis prorsus ignota. Formæ majores semper raro occurrunt. — *alb.* in Kommendantsängen ad Christianstad (MALM) prov. Skåne et in præruptis ad arcem prope Borgholm ins. Öland. — In **Norvegia** fere ubique frequentissime (FRIELE).

Sans même en excepter les espèces des genres *Zonites*, *Limax* et *Planorbis*, il n'existe probablement pas, dans la littérature malacologique de groupe aussi chargé de points d'interrogation que ce groupe-ci. Ce serait un travail méritoire, mais ardu, que de faire entrer l'ordre et la clarté dans ce chaos et dans les ténèbres qui y règnent. L'incertitude et le désordre en question proviennent moins de la circonstance que les mêmes espèces ont été décrites sous des noms divers par les auteurs, circonstance qui a plutôt égard aux genres donnés plus haut, mais parce que les auteurs comprennent si souvent sous le même nom des espèces différentes, et parfois même présentent une forme insignifiante sous un nom parfaitement autorisé. Comme il semble tout aussi nécessaire que simple, dans l'adoption d'un nom spécifique, de s'en tenir exclusivement à l'auteur du nom et à la description donnée par lui, l'on ne peut en vérité s'empêcher de s'étonner des caractères parfaitement apposés attribués à la même espèce par différents auteurs. Plusieurs genres critiques fourmillent de ces antéthèses. Un exemple suffira: *Helix concinna* JEFFR. se distingue précisément par sa coquille aplatie et son large ombilic ("The shell is never globose, like that of *H. hispida*, and it is more open; the umbilicus is considerably more open" JEFFR.), tandis que DUPUY, MOQ.-TANDON et L. PFEIFFER disent: "coquille presque globuleuse, ombilic très petit" — "testa globosa, vix depressa, anguste umbilicata." J'ai déjà vu, a fois réitérées, d'envois qui m'ont été faits de l'Europe moyenne, que cette forme décrite sous le nom de *H. concinna* a par suite de son étroit ombilic très-souvent été pris pour *l'H. sericea* de DRAPARNAUD. Induit moi-même en erreur par cette circonstance, je l'ai aussi donnée avec ce nom dans mon première traité malacologique. A la même forme appartient la *H. sericea* donnée par MÖRCH dans sa Syn. Moll. Dan. Elle est toutefois nettement distincte de *H. sericea vera* et de sa variété *granulata*. PFEIFFER (Monogr. Helic.) nous présente évidemment la *concinna* de JEFFREYS dans sa description de *H. hispida* (testa suborbiculato-depressa, anfracti angusti, apertura late lunaris, etc.) et parmi de nombreux exemplaires de *H. hispida* qui m'ont été envoyés de Francfort s. M., je n'en ai trouvé qu'un normal; les autres appartiennent au type *concinna* de JEFFREYS, qu'on regarde ce dernier comme une

espèce spéciale, ou, ce qui me paraît le plus juste, comme une variété de *H. hispida*. Il paraît à tous égards impropre de diviser et de traiter séparément les Helices appartenant à cette catégorie en deux groupes, en se fondant soit sur la présence ou l'absence de la lèvre, soit sur la forme plus ou moins convexe de la coquille.

HELIX * CONCINNA JEFFR.

Testa globoso-depressa, sæpe orbiculata, pallide cornea vel flavescenti-cinerea, pilis brevibus raris et caducis hispida, sæpe strigis rufescentibus notata; *anfr.* 6—7, arcti, convexiusculi, ultimus vix $\frac{1}{3}$ latitudinis æquans, sæpe linea pallida circumdatus; *spira* planiuscula; *sutura* profunda; *umbilicus* latus, perspectivus; *apertura* oblique lunata, altitudine majori; *peristoma* patulum, intus callo albo valido. Diam. 10, alt. 4 mm.

Helix concinna Jeffreys in Linn. Trans. XVI p. 336 sec. Brit. Conch. I (1862) p. 196 (ex spec. orig. ab auctore ipso missis!).
Hygromia concinna Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 18. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 31.

— **gyratus:** testa brunnea, vel ferruginea, depressissima, anfr. tardissime accrescentes, subæquales.

Hab. In **Suecia** hanc formam cum varietate prope Lund prov. Skåne inveni; ad Westerås prov. Westmanland captum clar. C. H. JOHANSON misit et ad Othem ins. Gotland amic. G. LINDSTRÖM varietatem invenit (Gotl. Moll. p. 12).

HELIX * DEPILATA C. PFR.

Testa umbilicata, subgloboso-depressa, striata, nitida, cornea; *anfr.* 6, angusti, convexi, ultimus obsolete angulatus, linea pallide circumdatus; *umbilicus* majusculus pervius; *apertura* depressa, lunaris; *peristoma* rectum, acutum, intus albo-labiatum, margine basali stricto, cum columellari brevissimo angulum formante. Diam. 7—8, alt. 4 mm. (Pfr.).

Helix depilata C. Pfeiffer Land- u. Wasser-Schn. (1821) p. 35. t. 2. f. 18. L. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 148.

Hab. In **Suecia** hanc testam ad Lund et Christianstad prov. Skåne inveni.

J'ai ici, contre mon ordinaire, donné la diagnose de Pfeiffer, mais je n'ai pas eu à la modifier d'un seul mot d'après mes exemplaires. Au reste, je crois avec STEIN (Die Schnecken und Muscheln d. Umg. Berl., p. 43), que cette forme, présentée comme espèce par PFEIFFER, n'est qu'une variété de la coquille protée *H.*

hispida, mais non, que son caractère principal, se trouve dans le dernière tour, faiblement anguleux et muni d'une zone claire; je crois qu'il se trouve principalement dans la forme différente de l'ouverture.

12. HELIX LIBERTA mh.

Testa subdepresso-globosa, solidula, nitidula, corneo-fusca vel rubescens, supra glaberrima (pilis detritis?), subtus pilis raris brevibus hispida; *spira* convexa; *anfr.* 5—5½, convexi, teretes, forte accrescentes, ultimo ampliato, fascia pellucida cincto, penultimo ter fere latiore quam antepenultimo, ad suturam superiorem profunde incurvato; *apertura* rotundato-lunaris, peristomate intus submarginato; *umbilicus* angustus, margine columellari reflexiusculo ad partem obtectus. Diam. 6—7, alt. 4—5 mm.

Helix concinna Dupuy Moll. de Fr. (1847) p. 186. t. 8. f. 6. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 221. Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 122 (nec Jeffreys!).
Helix sericea var. depilata Aug. Gysser Moll. Bad. (1863) p. 12 (ex spec. orig.).
Helix sericea Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 18. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 47. (nec Drap.).

Hab. In **Suecia** in hortu ad Lund prov. Skåne duo ex. inveni.

Cette description est faite d'après les exemplaires que j'ai pris à l'endroit indiqué. Ils sont lisses en dessus et parfaitement conformes aux exemplaires de GYSSER de *H. ser. var. depilata*, venant de Bade. Cette coquille présente toutefois assez souvent une couverture claire de poils assez longs, recourbés au sommet, tres fragiles et facilement brisés, ce qui rend la coquille unie.

Helix sericea DRAP., avec laquelle cètte espèce a été si souvent identifiée, s'en distingue sans peine par son ombilic ou plutôt sa perforation singulièrement minime, son epaisse couverture de poils courts, flexibles, persistants, etc. Il en est de même de la forme de *H. sericea*, qui se trouve en Angleterre, et qu'Alder désigne par le nom *H. granulata*. A litre de comparaison avec l'espèce présentée ci-dessus, je crois devoir donner du type anglais une courte description, basée sur les nombreux exemplaires que je dois a la bienveillance de M. J. GWYN JEFFREYS: *Testa* minutissime, sed profunde umbilicata, vel perforata, pallidissime cornea vel pallide flavescens, subtus sæpe lactea, subhyalina, tenuis, subglobosa, setis minutis, densis, apice curvatis, albidis, persistentibus obtecta, vel, setis detritis, punctis scabris confertis granulosa; *anfr.* 5—6, convexi, celeriter accrescentes, quisque præcedente duplo major, ultimus rotundatus; *apertura* perobliqua, late lunaris; *peristoma* rectum, acutum, interdum intus tenuissime albo-labiatum, margine columellari brevissime reflexiusculo, perforationem semitegente. Alt. 5—6, lat. 7—8 mm.

13. HELIX RUBIGINOSA ZIEGLER.

Testa depressa, globosa, corneo-fusca vel sæpius fusco-rufescens, albide cingulata, pilis minutis, erectis, distantibus hirta; *anfr.* 5, regulariter

accrescentes, convexiusculi; *umbilicus* angustus, cylindricus, profundus; *apertura* late lunaris; *peristoma* vix patulum, acutum, simplex, margine columellari reflexiusculo. Diam. 5—5½ mm., alt. 3 mm.

Helix sericea Rossmässler pr. p. Iconographie VII (1838) p. 2. f. 428.
Helix rubiginosa Ziegler, A. Schmidt Zeitschr. f. gesammte Naturv. (Halle 1843) p. 3. Goldfuss Verh. d. naturh. Vereins d. preuss. Reinl. u. Westphal. (1856) p. 72. Bielz Fauna Siebenb. Moll. ed. 2. (1867) p. 64

Hab. In **Suecia** exemplaria hujus testæ plura, speciminibus e Germania et Transsylvania omnino congruentia, inveni: in Ölandia in plantis aquaticis et muscis humidis rivuli ad Kohlstad prope Borgholm d. 30 Juni 1870.

Subgen. *Petasia* BECK. *Testa* anguste perforata, conoidea vel turbinato-globosa, arctispira, granulato-striata (vel pilosa); *apertura* obliqua; *peristoma* subreflexum, intus labiatum, dentatum.

14. HELIX BIDENS (CHEMN.).

Testa obtecte perforata, turbinato-globosa, fulvescens, pellucide cingulata; *anfr.* 7½—8; apertura depressa, trisinuato-lunaris, labro reflexo, intus bidentato, extus bifoveolato. Diam. 8—9, alt. 5—6 mm.

Trochus bidens Chemnitz Conch. (1786) p. 50. t. 122. f. 1052.
Helix bidentata Gmelin Syst. Nat. (1768) p. 3642. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 14. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 65. f. 14.
Helix bidens Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 151. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 120. t. 10. f. 37—39. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 48.
Hygromia bidens Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 17.
Petasia bidens Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 32.

1. **major** RSSM. VII. p. 3 f. 431: diam. 9—10, alt. 7 mm.
2. **menkeana** M. TAND. p. 121: diam. 7, alt. 5 mm.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Esperöd (NILSSON), W. Wram (LILLJEBORG), Åkesholm, Bäckaskog et Stampe (MALM), Fogelsang et Öfvedskloster (L. P. HOLMSTRÖM!), circa Ringsjön (C. A. W.), ad Tanga par. Wälinge (J. LINDAHL!!) et multis aliis locis; prov. Blekinge: ad fines Scaniæ (ex gr. ad Gammalstorp: GOSSELMAN); ins. Öland: ad rivulum prope Tveta (C. A. W.); ins. Gotland: ad Fardhem et Lindeklint (LINDSTRÖM); prov. Östergötland: in Wäfversunda storäng et ad rivulos in monte Omberg (C. A. W.); prov. Westergötland: in monte s. d. Gerumsberget (K. AHLNER!); prov. Nerike: ad Hjelmarsberg multis locis, ad Härstorp,

Sommarro, Stockebäcksäng et Hökekulla äng (HARTMAN); prov. Westmanland: in loco Gröna Gängen juxta Sala (C. H. JOHANSON!). Varietates cum forma typica passim.

C) **Efasciatæ**: *testa unicolor, interdum maculata, nec fasciata, parva, sæpe minima, sæpissime striata vel costulata.*

Subgen. *Vallonia* RISSO. *Testa* aperte umbilicata, depressula, costata vel lævis; *anfr.* $3\frac{1}{2}-4$; *apertura* subcircularis; *peristoma* reflexum, candide labiatum, marginibus conniventibus.

15. HELIX COSTATA MÜLL.

Testa depressa, fulvescenti-albida, membranaceo-costulata, subopaca; *anfr.* $3\frac{1}{2}$, ultimus antice subdeflexus, non dilatatus; *apertura* subcircularis; *peristoma* albo-labiatum, marginibus fere contiguis. Diam. 3, alt. $1\frac{1}{2}$ mm.

Helix costata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 31. Pfeiffer pr. p. Monogr. Helic. I (1848) p. 366. Nordensk. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 23. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 54.

Helix pulchella α Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 29. Rossmässler Iconogr. VII (1838) p. 6. f. 439. Friele Norske Moll. (1853) p. 16. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 140. *H. pulch. var.* Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 225.

Vallonia costata Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 17. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 39.

Hab. In **Suecia** a prov. Skåne sat frequenter saltem ad 60° lat. bor. usque. In **Norvegia** ad Christiania et Bergen (FRIELE), in Manger et ad Drivstuen (MARTENS).

16. HELIX PULCHELLA MÜLLER.

Testa subdepressa, albida, nitida, subtilissime striatula; *anfr.* $3\frac{1}{2}$, ultimus antice dilatatus, non deflexus; *apertura* lunato-rotundata; *peristoma* reflexum, candide sublabiatum, marginibus approximatis. Diam. $2\frac{3}{4}-3$, alt. $1\frac{1}{8}-1\frac{1}{2}$ mm.

Helix pulchella Müller Verm. Hist. II (1774) p. 30. Pfeiffer pr. p. Monogr. Helic. I (1848) p. 365). Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 24. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 53. Jeffreys pr. p. Brit. Conch. I (1862) p. 224.

Helix pulchella β Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 30. Rossmässler Iconogr. VII (1838) p. 5. f. 440. Friele Norske Moll. (1853) p. 16. *H. pulch.* β *lævigata* Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 140. t. 6. f. 4.

Vallonia pulchella Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 17. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 38.

Hab. In **Suecia** et **Norvegia** cum præcedente, semper autem rarior.

Subgen. *Patula* HELD. *Testa* aperte umbilicata, umbilicata vel perforata pro depressa, convexa vel turbinata, striata, costulata vel etiam aculeata.

1. *Acanthinula* BECK: *testa* perforata, globoso-turbinata vel epidermide brunnea, membranaceo-costulato-plicata vel aculeata induta; *anfr.* 4—6, teretes, celeriter accrescentes; *apertura* rotundata; *peristoma* tenue, expansiusculum, acutum vel intus sublabiatum, marginibus approximatis.

17. HELIX HARPA SAY.

Testa ovato-turrita, tenuis, virescens vel corneo-lutescens, sericina, confertim striatula et distanter membranaceo-costulata; *spira* elevata, obtusiuscula; *anfr.* 4—4½, convexiusculi, ultimus ventrosus, spiram subæquans; *sutura* profunda; *umbilicus* profundus, sed angustus; *apertura* semi-ovalis vel rotundato-sublunaris; *peristoma* simplex, acutum, margine columellari subreflexo. "*Animal* ovoviviparum, marginibus pedis profunde crenulatis" (Morse). Diam. 2—2½, alt. 3½—4 mm.

Helix harpa Say Exped. S:t Peter's (1824) II. p. 256. Nylander Bidrag till Finl. Naturk. h. III. p. 131. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 46.

Pupa costulata Mighels Proc. Bost. Soc. Nat. Hist. I (1844) p. 187.

Bulimus harpa Pfeiffer Zeitschr. f. Malak. 1847. p. 147; Monogr. Helic. II (1848) p. 150. W. G. Binney Catalog. Gasterop. N. Am. (1862) p. 4; Smithson. Miscell. Coll. I. 1869. p. 156.

Helix aculeata Nord. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 13. f. 5.

Helix amurensis Gerstfeldt Land- u. Süssw. Moll. Sibir. u. Amurgeb. (1859) p. 13.

Zoögenetes harpa Morse Portl. Soc. Nat. Hist. I (1864) p. 32. t 1. f. 1—12.

Hab. In **Suecia** hæc species primum a beat. prof. BOHEMAN anno 1843 ad Råbäcken Lapp. Lul. detecta, et deinde ab eo in Lycksele Lappmark inventa; in regione subalpina vel betulina (etiam, sed minor, in reg. silvatica superiore) alpium circa lacus Storafwan, Uddjaur et Hornafwan, præcipue ad Arjeploug in Lapponia Pitensi hanc testam vulga-

rem invenit amic. E. HEMBERG, qui numerosa exempl. benigne misit; ad Hvitvattenskrogen prov. Jemtland clar. W. MEVES invenit; in Funnäsdalsberget et in Rösvålen prov. Herjedalen cepit et misit clar. F. SÖDERLUND; in loco alto, salice, betula et præcipue ribe alpino dense vestito valli Säthersdalen prov. Dalarne amic. C. G. ANDERSSON testam minutam (H. aculeata tamen majorem) lamellis transversis præditam invenit, quæ ab inventore pro H. harpa certe habetur. In **Norvegia** hanc borealem speciem ad Horgheim in Romsdalen d. 14 Aug. 1858 in coryletis celeberr. prof. LILLJEBORG legit, et sub lapidibus in Skovlökken ad Veiensten par. Geisdal celeberr. POULSEN a. 1870 invenit.

18. HELIX ACULEATA MÜLLER.

Testa globoso-turbinata, fusca, costis lamellatis transversis in spinas elongatis prædita; *anfr.* $4\frac{1}{2}$, convexi; *apertura* sublunato-rotundata; *peristoma* membranaceum, subexpansum, intus submarginatum. Diam. 2—$2\frac{1}{2}$, alt. 2—$2\frac{1}{4}$ mm.

Helix aculeata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 8. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 16. Rossmässler Iconogr. VIII (1838) p. 38. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 50. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 189. t. 15. f. 5—9. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 176. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 44.
Discus aculeatus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 16.
Acanthinula aculeata Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 28.

1. **albida** JEFFR.: testa alba vel albida.
— **sublævis** mh.: testa costis obsoletis, anfr. 4, labro roseo, spinis destituta.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Esperöd (NILSSON), Åkesholm et Ignaberga (MALM), Ringsjön (J. A. WALLIN!), W. Wram (LILLJEBORG), Blommeröd (L. P. HOLMSTRÖM!), Askeröd et Lefrasjön (O. NORDSTEDT!), Skäralid, Fogelsång, Reften, Dahlby Hästhage, certe per maximam partem prov.; prov. Blekinge: ad Bellevüe prope Carlshamn, circa Ronneby multis locis, ad Sjuhalla (C. A. W.); ins. Öland: in Ismantorpsborg rarior (C. A. W.); ins. Gotland: ad Rosendal, Storklint, Skälsö, Stenkumla, Sandarfve et Lindeklint (LINDSTRÖM); prov. Småland: ad Anneberg (BOHEMAN), in silva tiliacea ad Klefarp (E. HEMBERG!); prov. Halland: in Hallandsåsen (J. LINDAHL!); prov. Östergötland: in monte Omberg juxta Alvastra (C. A. W.); prov. Westergötland: in Mösseberg ad Klefva (J. HULTING); circa Stockholm: in Wermdön inter Tollarö et Lännesta et ad Kungshamn (HARTMAN). 1 *alb.* ad Ronneby prov. Blekinge (C. A. W.). — *sublæv.* ad Ronneby (C. A. W.) et in Gotlandia ad Skälsö (LINDSTRÖM).

19. HELIX LAMELLATA JEFFR.

Testa conoideo-globosa, pulcherrime membranaceo-costulata, sericina, cornea; *anfr.* $6\frac{1}{2}$, subæqualis; *apertura* depressa, lunaris. Diam. $2\frac{1}{3}$, alt. 2 mm.

Helix lamellata Jeffreys in Trans. Lin. Soc. (1830) XVI. p. 333. Brit. Conch. I (1862) p. 175. Lilljeborg Öfvers. K. Vet. Akad. Förh. 1851. p. 281. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 114. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 45.
Helix scarburgensis Rossmässler Iconogr. VIII (1838) p. 37. (*H. seminulum* Rssm. f 533).
Discus lamellatus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 17.
Acanthinula lamellata Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 29.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad W. Wram (prof. LILLJEBORG), ad Bastad (celeb. THOMSON), in monte Skäralid copiosissime (O. NORDSTEDT et ipse), in monte Hallandsås et in Pelsdalen ad Tågra (J. LINDAHL!!), ad Askeröd par. Westerstad (O. NORDSTEDT!!); prov. Östergötland: in monte Omberg prope Borghamn (clar. K. AHLNER, teste prof. Lilljeborg). Semel a me ad Ronneby prov. Blekinge lecta.

2. *Discus* FITZ.: *testa* aperte umbilicata, depressa, striata vel costulato-striata; *anfr.* 4—7, æquales vel lente accrescentes; *apertura* lunari-rotundata; *peristoma* simplex, rectum, acutum.

20. HELIX RUDERATA STUD.

Testa depressa, convexiuscula, lutescenti-cornea, concolor, subcostulato-striata; *spira* convexa; *anfr.* 5, convexi, ultimus basi rotundatus; *apertura* lunato-ovalis. Diam. 7—8, alt. 3—4 mm.

Helix ruderata Studer Kurz. Verzeichn. (1820) p. 86. Rossmässler Iconogr. VII (1838) p. 13. f. 455. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 105. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 105. t. 10. f. 7, 8. Nord. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 22. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 44.
Helix rotundata β Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 31. Friele Norske Moll. (1853) p. 14.
Discus ruderatus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 15.
Patula ruderata Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 27.

1. **albida:** subvirescens, concolor.

Hab. In **Suecia** hæc testa forma borealis est, quæ in regionibus septentrionalibus plus minus vulgaris, per provincias medias certe quidem

usque in prov. Blekinge et Skåne descendit, tamen magis magisque meridiem versus rarescat. In Lapponia ad Qvickjock multis locis occurrit (BOHEMAN, WALLENBERG), plus minus frequenter in prov. Dalarne (C. G. ANDERSSON!!), Westmanland (C. H. JOHANSON!), Upland (C. H. JOHANSON et ipse), Nerike (HARTMAN), Södermanland (E. HEMBERG!) et circa Stockholm in Sicklaön, Lilla Ängsviken in Wermdön (HARTMAN), Östergötland (in tota monte Omberg: C. A. W., et, sec. beat. dr Goës, in multis aliis provinciæ regionibus), Westergötland (in monte Mösseberg: C. A. W., in Billingen: C. G. ANDERSSON!!, Grimstorp: O. NORDSTEDT!, in vicinitate urbis Göteborg, ex. gr. ad Kärralund, Gubbero, Bokedalen, Bärby: MALM), Halland ad Fröllinge non parce: MALM), Småland (multis locis in parte media montana, copiosissime circa Tenhult: E. HEMBERG!), Skåne (ad Belteberga et in Skäralid: C. A. W., ad Uddarp, Åkesholm, Ignaberga et Möllerö: MALM), Blekinge (circa Ronneby rarior: C. A. W., ad Kärrtorp: J. ANKARCRONA!, et plur. locis), in ins. Öland rara ad Borgholm (C. A. W.); in ins. Gotland ad Bungenäs, Hallbros, Löjsta, Linde et Gyllenamn rarior (LINDSTRÖM). In **Norvegia** ad Christiania et Bergen (FRIELE), ad lacum Mjösen (v. MARTENS) et multis aliis locis. 1. *albida:* in Ladegaardsön ad Christiania (C. M. POULSEN!).

21. HELIX ROTUNDATA MÜLL.

Testa depressa, arctispira, brunnea, maculis ferrugineis, costulato-striata; *spira* vix convexa; *anfr.* $6\frac{1}{2}$, planulati, ultimus angulatus; *apertura* lunaris. Diam. 5—6, alt. 2 mm.

Helix rotundata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 29. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 20. Rossmässler Iconogr. VII (1838) p. 13. f. 454. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 105. Friele Norske Moll. (1853) p. 17. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 107. t. 10. f. 9—12. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 218. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 43. (*H. gothica* Linné Fauna Suecica?).

Discus rotundatus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 15.

Patula rotundata Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 26.

1. **albina:** testa alba vel subvirescens, concolor.

Hab. In **Suecia** hæc species vulgaris est per prov. Skåne et Blekinge, ubi numquam frustra quæsita inter folia putrescentia silvarum fagineārum, vix umquam frustra in aliis silvis frondosis; in prov. Småland: ad Kalmar (C. A. W.), Jönköping (O. NORDSTEDT!), rarior ad Klefarp (E. HEMBERG!); ins Öland: ad arcem prope Borgholm sat frequens (C. A. W.); in collis silvaticis totius insulæ Gotland frequentissime (LINDSTRÖM); in

prov. Westergötland: ad Göteborg multis locis (MALM), in monte Kinnekulle passim (ZETTERSTEDT! LINROTH!), ad Hillestadsö par. Källunga (J. HULTING!); prov. Östergötland: in monte Omberg rarissime (C. A. W.). In **Norvegia** ad Christiania parce, ad Bergen copiose (FRIELE); præterea in insulis Sarterö et Manger et ad Aalesund in Romsdalen (MARTENS); in par. Hof multis locis (O. S. JENSEN!); in Malmön sinus Christianiensis (POULSEN!).

22. HELIX PYGMÆA DRAP.

Testa minutissima, depressa, supra convexiuscula, subnitida, pallide brunnea vel rufescens, concolor, subtilissime striata; *spira* convexa; *anfr.* $4\frac{1}{2}$, convexi, lente et regulariter accrescentes, *sutura* impressa separati, ultimus rotundatus, antice non dilatatus, nec descendens; *apertura* late lunato-rotundata. Diam. $1\frac{1}{2}$—2, alt. $\frac{3}{4}$—1 mm.

Helix pygmæa Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 93. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 32. Rossmässler Iconogr. VIII (1838) p. 37. f. 532. Pfeiffer Monogr. Helic. I (1848) p. 97. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 103. t. 10. f. 2—6. Nord. et Nylander Fiul. Moll. (1856) p. 27. f. 17. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 223. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 43.

Discus pygmæus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 11?

Patula pygmæa Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 25*.

Hab. In **Suecia** inter folia putrida multis locis frequenter a prov. Skane saltem usque ad Qvickjock in Luleå Lappmark, ubi legit v. Wallenberg. In **Norvegia** ad Skiaker et ad Kongsvold in Dovre (O. NORDSTEDT!!), nec non frequenter in Malmöen in sinu Christianiensi (C. M. POULSEN!).

Subfam. PUPINA.

Corporis pars posterior a pede distincta, spiraliter contorta et testa vestita. *Testa* oblonga, cylindracea vel fusiformis, apertura longitudinali.

Gen. BULIMINUS EHRENBERG.

Subgen. *Ena* LEACH.

Testa ovata vel ovato-oblonga; *apertura* longitudinalis, ovalis, dimidiam longitudinem testæ non superans; *peristoma* marginibus multo inæqualibus; *columella* stricta, simplex.

1. BULIMINUS MONTANUS (DRAP.).

Testa rimata, oblongo-conica, obtusa, fusca, striata et minutissime granulata; *anfr.* 7—8, ultimus $\frac{2}{5}$ longitudinis subæquans; *apertura* acute ovata; *peristoma* reflexum, rubicundum, sublabiatum, margine columellari late reflexo. Long. 15—16, diam. 6 mm.

Bulimus montanus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 74. t. 4. f. 22. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 86. f. 41. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 120. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 237. J. E. Zetterstedt Öfvers. Vet. Akad. Förhandl. 1864, p. 339.
Ena montana Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 60.
Buliminus montanus Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 48.

Hab. In **Suecia** haud infrequens ad prædium Rosenlund, $\frac{1}{8}$ milliar. suec. ab urbe Jönköping prov. Småland distans, in præruptis lacum Vettern versus (ZETT. l. c., ab O. A. ANDERSSON 1864 detectus); nec non in parte meridionali montis Omberg prov. Östergötland a clar. K. AHLNER 1868 inventus (teste prof. Lilljeborg).

2. BULIMINUS OBSCURUS (MÜLL.).

Testa rimata, ovato-oblonga, nitidula, fusca, pellucida, oblique substriata; *anfr.* 6—7, ultimus $\frac{1}{3}$ longitudinis vix æquans; *apertura* ovalis; *peristoma* expansum, albo-sublabiatum, margine columellari brevi, dilatato, patente. Long. 8—10(11), diam. $3\frac{1}{2}$—4 mm.

Helix obscura Müller Verm. Hist. II (1774) p. 103.
Bulimus obscurus Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 36. Rossmässler Iconogr. IV (1836) p. 46. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 124. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 291. t. 21. f. 5—10. Nord. et Nylander Finl. Moll. (1856) p. 30. f. 25. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 237.
Ena obscura Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 26. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 61.
Buliminus obscurus Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 49.

— **oblonga**; long. 11, diam. $3\frac{1}{2}$ mm.; anfr. penultimus præcedentem subæquans.

Hab. In **Suecia**, prov. Skane: ad Esperöd (NILSSON), Bäckaskog, Akesholm, Lillös lund prope Christianstad et ad Ignaberga (MALM), Fogelsäng prope Lund (J. A. WALLIN!!), Smedstorp (E. HEMBERG!), Belteberga (C. A. W.); ins. Öland: in Kungsträdgården et infra arcem ad Borgholm, nec non ad Tveta (C. A. W.); per totam insulam Gotland (G. LINDSTRÖM); prov. Småland: ad Rosenlund prope Jönköping (J. E. ZETTERSTEDT); prov.

Westergötland: in monte Kinnekulle ad Mörkeklef (ZETTERST.!!), in Mösseberg (C. A. W.); prov. Östergötland: in monte Omberg juxta viam ad Alvastra (C. A. W.) et ad Mjölsefall (E. v. Goës!!); prov. Nerike: ad Hamrarne par. Göthlunda (C. HARTMAN) nec non ad Apelsviks kalkbrott (HARTM.!). *β obl.* ad Rosenlund prov. Småland (ZETT.) et ad Tveta ins. Öland (C. A. W.).

Gen. COCHLICOPA (FÉR.) RISSO.

Testa ovato-oblonga vel oblonga, lævis, pellucida, splendida; *apertura* ovata, $\frac{1}{3}$ longit. attingens; *peristoma* obtusum, subincrassatum, marginibus callo junctis; *columella* brevis, arcuatula, plus minus truncata.

1. COCHLICOPA LUBRICA (MÜLL.).

Testa ovato-oblonga, fulvo-cornea; *anfr.* 6, convexi, ultimus basi rotundatus; *apertura* ovali-elliptica; *peristoma* rectum, tenue vel margine dextro intus callo tenuissimo munito. Long. 6—6$\frac{1}{2}$, diam. 2—2$\frac{1}{2}$ mm.

? *Turbo muscorum* Ström Trondhj. Selsk. Skrift. III (1765) p. 437.
? *Helix subcylindrica* Linné Syst. Nat. XII (1767) p. 1248.
Helix lubrica Müller Verm. Hist II (1774) p. 104.
Bulimus lubricus Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 37. Friele Norske Moll. (1853) p. 19.
Achatina lubrica Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 88. f. 43. Pfeiffer Monogr. Helic. II (1848) p. 272. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 31. f. 26.
Bulimus subcylindricus Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 304. t. 22. f. 15—19.
Cochlicopa lubrica Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 292. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 50.
Férussacia lubrica Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 26.
Zua lubrica Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 62.

1. **ovata** JEFFR.: testa obscure brunnea; long. 6; diam. 3 mm.
2. **nitens** KOK.: testa magna, nitidissima; long. 8—10, diam. 3 mm.
3. **viridula** JEFFR.: testa subhyalina, splendida, vitrea, viridula.

Hab. In **Suecia** per totum regnum fere ubique saltim ad 67—68° lat. bor. usque destributa. 2 *nit.* ad Ronneby prov. Blekinge raro (C. A. W.). 3 *virid.* ad viam inter Tollarö et Lännersta ins. Wermdön prope Stockholm (C. HARTMAN) et in silvis fagineis ad Ringsjön prov. Skåne (C. A. W.). In **Norvegia** multis locis ad Christiania et Bergen (FRIELE) ad Eiswold, Trondhjem etc. (MARTENS), ad Volden in Söndmöer? (STRÖM), ad Starvik in

Vaage (O. NORDSTEDT!!), ad Herstad par. Hof, ad Sagatun prope Hamar vulgaris (O. S. JENSEN!), Forset sæteren in Herfjeld, 2500′ s. m. (C. M. POULSEN!).

Quand STRÖM l. c. dit de son *Turbo muscorum* qu'il présente à peu la même forme que les Clausilies, mais qu'il n'atteint qu'à la moitie de leur grandeur, que la coquille est dextre, de couleur de corne, présente une ouverture ovale, non dentée, on serait tenté d'appliquer cette description à l'espèce présente, mais comme l'on ne peut complètement s'empêcher de pensèr à la coquille que STRÖM lui-même avait en vue, savoir le *Turbo muscorum* de LINNÉ (S. Nat. X, 1758), il est impossible d'adopter le nom specifique du premier auteur. Il est difficile de décider si *H. subcylindrica* de LINNÉ appartient ici, comme l'admettent plusieurs auteurs; c'est au rest peu probable, Linné disant qu'elle habite les eaux douces, et est "pallida, anfractibus 4, apice obtusissimo, rotundato, apertura ovali, margine interiore reflexo."

COCHLICOPA *MINIMA SIEMASCHKO.

Testa parvula, gracilis, elongata, cylindracea, rubescenti-fusca vel albido-cornea, subhyalina; *anfr.* 5; *apertura* angusta, pyriformis; *peristoma* incrassatum, callo albido. Long. 4—5, diam. $1\frac{1}{2}$—$1\frac{5}{6}$ mm.

Bulimus lubricus — *pulchellus* Hartmann apud Sturm Fauna V (1821) s. 51 (nomen).
Bulimus lubricus var. β Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 37.
Achatina lubrica var. c. exigua Menke Syn. Moll. (1830) p. 29 (nomen).
Helix (Cochlicopa) *lubricella* Ziegler Consp. meth. test. (1830) p. 5 (nomen).
Achatina minima Siemaschko Bull. Nat. Mosc. (1847). Pfeiffer Monogr. Helic. III (1853) p. 506; IV (1859) p. 627.
Glandina lubrica var. nilssoni Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh. Handl. II (1851) p. 123.
Achatina collina Drouët. Moll. Fr. (1854) p. 46. Pfeiffer Monogr. Helic. IV (1859) p. 620.
Férussacia minima Pfeiffer Monogr. Helic. VI (1868) p. 246.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Ignaberga (MALM et ipse); prov. Blekinge: ad Ronneby multis locis haud infrequens (C. A. W.); prov. Upland: in fissuris rupium ad Kungshamn (HARTMAN).

Gen. ACICULA RISSO.

Testa elongata, fusiformi-clavata, polita, *sutura* marginata, *spira* subturrita; *apertura* longissima, dimidiam longitudinem testæ subæquans, oblonga, acuminata; *peristoma* simplex, acutum; *columella* libera, subarcuata, distincte truncata.

1. ACICULA HYALINA E. A. Bielz.

Testa minuta, fusiformi-cylindrica, apice attenuata, obtusa, alba, hyalina, polita; *apertura* lanceolata, angusta; *peristoma* rectum, acutum. Long. 4—5, diam. $1\frac{1}{4}$—$1\frac{1}{2}$ mm.

Buccinum acicula Müller Verm. Hist. II (1774) p. 150.
Achatina acicula Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 38. Rossmässler Iconogr. X (1839) p. 35. f. 658. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 274. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 297.
Bulimus (Acicula) *acicula* Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 309. t. 22. f. 32—34.
Cæcilioides acicula Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 29. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 63.
Acicula hyalina Bielz Fauna Moll. Siebenb. (1867) p. 89. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 51.

Hab. In **Suecia** in hortis, præsertim in horto botanico urbis Lund, prov. Skåne; ad Ekerum par. Högsrum ins. Öland (clar. C. H. Johanson!) et prope Jönköping prov. Småland (stud. Wickbom sec. clar. v. Porath!).

Gen. CLAUSILIA Draparnaud.

Testa turrita, fusiformis, sinistrorsa; *apertura* elliptica vel pyriformis, semper lamellis duabus parietis aperturalis coarctata et ossiculo elastico (clausilio) in fundo clausa; *peristoma* plerumque continuum, solutum.

Outre les types énumérés ci-dessous, nous en possédons encore un, trouvé par moi sur des racines decouvries dans la forêt d'Alnarp près de Lund en Scanie. La seule chose que je croie devoir signaler ici de ce type, c'est le jugement suivant, dû à l'obligeance de M. le Dr E. v. Martens, de Berlin: "ganz unbekannt und neu ist mir die kurze und bauchige Clausilie; sie nähert sich von allen mir bekannten am meisten der *Cl. corpulenta* Frivaldsky aus Klein Asien; diese hat aber viele Fältchen am Mundsaum wie *Cl. plicata*, was die Ihrige nicht zeigt; ferner ist bei *corpulenta* die Spitze merklich schlanker als bei der Ihrigen."

1. *Marpessa* Ad. *Lunella* nulla; *plicæ palatales* 3 vel plures; *lamella spiralis* disjuncta; *clausilium* emarginatum. *Testa* plerumque lævigata, nitida; *apertura* basi rotundata.

1. CLAUSILIA LAMINATA MONT.

Testa minutissime rimata, fusiformis. subventricosa, rufo-cornea, obscura, glabriuscula, nitida, cervice subtiliter striata; *anfr.* 10—11, vix convexiusculi, duo infimi subæquales; *apertura* ovali-pyriformis; *peristoma* connexum, album, limbatum; *lamella supera* compressa, marginem attingens; *infera* valida, flexuosa; *plicæ palatales* tres (1ª et 2ª superæ, sutura parallelæ, 3ª infera, remota; 1ª et 2ª longiores, e callo transverso profundo exeuntes, 2ª brevissima); *plica columellaris* emersa. Long. 17, diam. 4 mm.

Helix bidens Müller Verm. Hist. II (1774) p. 116 (nec Turbo bidens Linné).
Turbo laminatus Montagu Test. Brit. (1803) p. 359. t. 2. f. 4.
Clausilia bidens Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 43. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 76. f. 29; VII (1838) p. 16. f. 461, 462. Friele Norske Moll. (1853) p. 24.
Clausilia laminata Pfeiffer Monogr. Helic. II (1848) p. 397. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 318. t. 23. f. 2—9. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 33. f. 27. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 284. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 30. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 77; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 66.

1. **minor:** pallide cornea; long. 12, diam. $3\frac{1}{4}$ mm.
2. **albina,** virenti-hyalina (Pfr l. c. var. ζ).

— **plicifera** mh.: testa ventricosa, nitidissima, glabriuscula, rufo-brunnea; anfr 11, superi convexi, infimi planiusculi; cervix callo flavo transverso cincta; spira obtusa; peristoma connexum, albo-limbatum, lamella supera mediocris, infera valida, profunda; plicæ palatales 6 (1ª, 2ª, 3ª et 4ª superæ, sutura parallelæ, 5ª et 6ª a prioribus ad sinistrum plus minus divergentes; 1ª, 2ª et 5ª longiores, 3ª et 6ª breves, 4ª exigua; 1ª, 2ª, 5ª et 6ª e callo palatali transverso profundo exeuntes; 1ª tenera, ceteræ prominentes, sepæ validæ); long. 16, diam. 4 mm.

— **propinqua** mh.: testa rimata, cylindraceo-fusiformis, gracilis, læviuscula, nitida, lutescenti-cornea; anfr. 12, supremi convexi, ultimi planulati, infimi 3; subæquales, ultimus antice costulato-striatus; cervix callo tenui flavo obliquo cincta; apertura pyriformi-ovali; peristoma continuum, subconnexum; plicæ palatales 4 (superæ 3, quarta infera; 1ª longissima, 2ª et 4ª breves, 3ª brevissima, sæpe obsoleta; 1ª et 4ª e callo palatali transverso profundo exeuntes); plica columellaris vix emersa; long. 19—20, diam. $3\frac{1}{2}$—4 mm.

— **pyrostoma** mh : testa corneo-flavida, pallida, palato fusco; anfr. 11, omnes planulati, ultimus antice costulato-striatus, ceteri lævigati; apertura pyriformis; peristoma continuum, subsolutum; plicæ palatales 4 (superæ 3); lamella supera tenuissima, infera valida; long. 17, diam. 4 mm.

Hab. In **Suecia** hæc species fere ubique et sæpe frequentissima in silvis, præsertim fagineis, prov. Skåne occurrit; in prov. Blekinge: in silva ad Pehrsborg prope Ronneby, ad Djupadal (C. A. W) et in silva ad Kärrtorp (J. ANKARCRONA!); prov. Halland: ad Fröllinge (MALM) et aliis locis (J. LINDAHL!); ins. Öland: ad Borgholm vulgaris, præterea rara (C. A. W.); ins. Gotland: ubique usque ad Gyllauen merid. versus (LINDSTRÖM); prov. Småland: ad Rosenlund prope Jönköping (ZETTERST.), multis locis in Helgarydsåsen, nec non ad Tenhult et Månsarp (E. HEMBERG!); prov. Östergötland: in monte Omberg etc. (C. A. W.); in prov. Westergötland: in Bokedalen prope Göteborg (MALM), in montibus Kinnekulle et Mösseberg (C. A. W.); in prov. Nerike: passim, præcipue in regionibus calcareis, per provinciam totam (HARTMAN); circa Stockholm: in Sicklaön et Wermdön vulgaris (HARTMAN); in prov. Upland: ad Upsala (LILLJEBORG! et JOHANSON!); in prov. Westmanland vulgaris (teste C. H. JOHANSON!); in prov. Dalarne: ad fodinam Bisbergensem et ad Ossmundsberget (C. G. ANDERSSON!). 2. *alb.* in prov. Skåne: ad Åkesholm prope Christianstad (MALM), ad Klinta prope Ringsjön (C. A. W.) et ad Tånga (J. LINDAHL!!) inventa; in prov. Småland ad Jönköping (G. EISEN!). — *plicif.* in Lillös lund prope Christianstad (C. A. W.) — *prop.* et — *pyrost.* ad Belteberga prov. Skane (C. A. W.). In **Norvegia** passim ad Christiania (ex. gr. ad Ekeberg: O. S. JENSEN! et in Malmöen et Ladegaardsöen: C. M. POULSEN!) et ad Trondhjem (FRIELE), nec non ad Herstad par. Hof (O. S. JENSEN!) et ad Eidsvold (C. M. POULSEN!).

2. *Papillifera* HARTM., Pfr. *Lunella* completa; *plicæ palatales* (plerumque) nullæ; *lamella spiralis* nulla. *Testa* pallide cornea vel rubella, *sutura* plerumque eximie papillifera; *peristoma* late reflexum.

M. le professeur S. NILSSON (Historia Molluscorum Sueciæ, p. 44) donne la *Clausilia papillaris* DRAP. comme suedoise. Cette détermination est évidemment erronée, car la Cl. pap. appartient exclusivement aux regions les plus méridionales de l'Europe, et elle est en outre infiniment plus grande que les mesures données par Nilsson. Mais chercher l'espèce de Nilsson dans une variété de la *Cl. laminata* ou le supposer avoir par une méprise quelconque eu devant les yeux une coquille de l'Europe méridionale lorsqu'il décrivit l'espéce qu'il dit expressément avoir prise en 1814 près de Fröllinge en Halland, c'est oublier complètement que la description vient d'un savant doué d'une grande perspicacité et particulièrement exact dans toutes ses données. Nous *devons* donc posséder dans la Suède méridionale une forme de Clausilia à suture papillaire à laquelle convienne la description de Nilsson. Et en effet, M. le professeur WALMSTEDT dit (Bulletin de l'Acad. des Sciences à Stockholm, XIIème année, p. 85) qu'il possède un exemplaire, venant de la Suède mé-

ridionale, d'une Clausilia "sutura papillifera", qui, du moins par ses dimensions (long. 11 mm., diam. 3 mm.) concorde avec la *Cl. papillaris* de Nilsson." "Parmi les espèces à moi connues", ajoute M. Walmstedt, "elle se rapproche le plus de *Clausilia* (Turbo) *labiata* Mont. — *C. solida* Dr. — et ne se distingue des exemplaires, tous de Nice, que je possède de cette espèce, que par des dimensions plus petites et une suture papillaire plus évidente. Cette espèce appartient à la France du S.E. et au N.O. de l'Italie, pays dans lesquels elle atteint sa grandeur normale, savoir long. 13 mm., larg. $3\frac{1}{3}$ mm., tandis que sa suture ne montre que des indices de papilles. En dehors de la patrie proprement dite de cette espèce, on en rencontre dans l'Italie méridionale une forme, *var. cajetana* Rossm., qui est plus petite que la forme typique, de laquelle elle se sépare en outre par un bourrelet palatal (callus palatalis), et par une suture papillaire évidente. Je n'ai pas eu l'occasion d'en voir d'exemplaire, mais la figure donné par Rossm. (Icon. f. 696) paraît, si l'on en excepte le bourrelet palatal clairement indiqué, correspondre à tous égards avec l'exemplaire suédois, chez lequel ce bourrelet, en conformité avec ce qui se présente dans la forme typique de *Cl. labiata*, se montre comme une tache blanche translucide sur la nuque, dans laquel se rend le pli palatal peu évident." Me fondant sur le fait qu'aucune des nombreuses varietés trouvées par moi et ressemblant beaucoup à celles appartenant a l'Europe méridionale, n'est complètement identique avec l'une ou l'autre de ces dernières, mais que toutes doivent être considérées comme des formes analogues à celles-ci, je ne crois pas non plus que la Cl. papillaris de Nilsson soit entièrement identique à l'une forme de l'Europe méridionale, mais je la considère comme très-probablement analogue à la C. labiata, c'est-à-dire, comme la représentante de ce type dans notre pays. Malheureusement, la description donnée par M. Nilsson n'est pas aussi complète que c'est *actuellement* de rigueur pour une Clausilie; elle manque de tous détails sur la forme du tour dernier, sur les lamelles, les plis palataux etc., ce qui rend très-difficile, sinon empêche totalement l'éclaircissement de la question par la "voie critique historique." Reste donc à chercher la Clausilia de Nilsson dans la localité où il l'a trouvée. A cet égard, voici ce que dit M. l'intendant Malm dans les Mémoires de la Société des sciences de Gothembourg (IIème cahier, p. 127): "Après avoir attentivement exploré la localité de Fröllinge sans trouver la *Cl. papillaris* de Nilss., laquelle était peut-être une *Cl. bidens* (Turbo) Lin., je ne puis admettre l'existence de ce mollusque en Suède. Cette déclaration est toutefois prématurée. M. Malm est probablement la *seule* personne qui ait cherché cette forme dans la localité de Fröllinge, et le fait qu'il ne l'a pas trouvé *cette fois-là* n'est pas une preuve qu'il n'y existe pas. Il n'y a sans doute pas un seul malacologue qui n'ait fait plus d'une fois l'expérience que des espèces peuvent se présenter en plus grand nombre certaines années que d'autres, qu'elles peuvent même totalement disparaître pendant plusieurs années, mais revenir ensuite subitement en aussi grand nombre que jadis. Je vais citer quelques exemples à cet égard. En août 1863, je pris, près de ma demeure, plusieurs exemplaires de *Planorbis riparius* m. et de *Pl. glaber* Jeffr., ainsi que plusieurs centaines d'ex. de *Hydrobia steini* Mart., mais malgré de nombreuses et persévérantes recherches, je n'ai pu depuis lors, découvrir un seul exemplaire de ces espèces. M. le dr Lindström raconte ce qui suit, p. 41 de ses "Mollusques vivants de Gotland (Gotlands nutida mollusker)":

"Pendant l'été de 1859, *l'Helix bidentata* se trouvait en grande quantité à Fardhem, mais elle a été cherchée en vain des lors dans la même localité, quoique la temperature ait été tout aussi favorable pendant plusieurs années subséquentes. En 1840, Högberg trouva sur la colline dite de l'eglice (Kyrkberget) à Visby, une si prodigieuse quantité de *Pupa costulata*, qu'il pensait la distribuer dans sa collection typique. Par contre, il ne paraît pas avoir découvert de *P. minutissima*. Je trouvai à plusieurs occasions réiterées dans la même localité presque exclusivement la dernière espèce (une fois parmi 110 ex., seulement 2 ex. de *P. costulata*)." Or comme il s'agit ici de la recherche d'une espèce relativement rare dans un district très-étendu, *une tentative* infructueuse à cet égard ne peut autoriser à nier l'existence de la dite espèce.

Je crois donc pouvoir avec toute sureté proposer pour cette coquille, à la recherche de laquelle j'engage vivement les malacologues, la dénomination de

CLAUSILIA NILSSONI.

(*Cl. papillaris* NILSSON, nec DRAP.).

"*Testa* præcedenti (C. laminata) minor, et pro longitudine aliquantulum ventricosior, ceterum forma eadem, albida vel cinerea, pellucida, tenuiter striata, striis haud confertis; *anfr.* 9, convexiusculi, vertice obtuso; *sutura* parum profunda, linea subfusca et tuberculis parvis albis ornata; *apertura* rotundato-ovata, patula; *columella* biplicata, interstitio plicarum et peristomate lævibus; *clausilium* apice rotundatum, non emarginatum; peristoma album, reflexum; fissura umbilicalis magis profunda quam in præcedente. Eminentia dorsalis juxta fissuram magis prominens.

Habitat in silvis frondosis, præsertim faginis, in truncis muscosis et putridis, rarissime. Ad *Fröllinge* in Hallandia reperta 1814; alibi Sueciæ nondum visa." (NILSS. l. c.).

3. *Alinda* AD. *Lunella* perfecta; *plicæ palatales* superæ adsunt, sæpius 2; *lamella spiralis* disjuncta. *Testa* costulata, opaca, fusca, anfractu ultimo cristato; *apertura* basi distincte canaliculata, *peristomate* sæpe multiplicoso.

2 CLAUSILIA BIPLICATA (MONT.)

Testa fusiformis, subventricosa, costulata, *spira* attenuata, cervice basi in carinam compressa, lutescenti-cornea vel ferruginea; *anfr.* 11—12; *apertura* pyriformis, basi canaliculata; *peristoma* continuum, solutum, reflexum, sublabiatum; *lamella supera* longa, a spirali disjuncta, inferiore immersa; *plica lunata* distincta, magna, semicircularis; *plicæ palatales* superæ 2, ponc clausilium convergentes. Long. 16—17, diam. 4 mm.

Turbo biplicatus Montagu Test. Brit. (1803) p. 361. t. 11. f. 5.
Clausilia similis Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 77. f. 30.

Clausilia biplicata Pfeiffer Monogr. Helic. II (1848) p. 469. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 337. t. 24. f. 11, 12. E. v. Martens Binnenmoll. Norv. in Mal. Blätt. 1857. p. 94. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 283. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 31. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 82; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 69.

1. **sordida** ZIEGL.: minor, anfr. 10—11; long. 12—13, diam. $3\frac{1}{2}$ mm.
2. **albina**, pallidissime virenti-hyalina.

Dextrorsa.

Hab. In **Suecia** hæc Clausilia in prov. Skåne ad Esperöd invenit clar. C. ROTH, ad Öfvedskloster copiosissime et in silva ad Blommeröd frequenter cepit clar. L. P. HOLMSTRÖM. Deformationem dextrorsam et mutationes allatas ad Öfvedskloster lectas habeo. In **Norvegia** unicum exemplar ad Manger prope Bergen invenit prof. SARS (ex. in museo Christian. asservatur, teste celeberr. POULSEN!).

3. CLAUSILIA PLICATA DRAP.

Testa fusiformis, gracilis, costulata, cornea, albo-strigillata, *spira* attenuata; *anfr.* 12—15, ultimus basi compresso-cristatus; *apertura* pyriformis, basi canaliculata; *peristoma* continuum, solutum, reflexum, intus utrinque plicullis confertis circumdatum; *lamella supera* longa, infera profunda; *plicæ palatales* superæ 2, prope plicam lunatam parum arcuatam convergentes; *plica columellaris* immersa. Long. 17, diam. $3\frac{1}{2}$—4 mm.

Clausilia plicata Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 72. t. 4. f. 15, 16. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 78. f. 31; VII (1838) p. 18. f. 470. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 78. f. 31. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 338. t. 24. f. 13—16. Walmstedt Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. 1855. p. 82. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 32. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 83; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 70.

Hab. In **Suecia** locis paucis montis Hoburgen ins. Gotland, numquam aliis Clausiliæ speciebus socia, a celeberr. prof. WALMSTEDT anno 1855 detecta. A. 1868 et 1869 mihi 350 ex. benigne miserunt clar. LINDSTRÖM et EISEN.

4. *Pyrostoma* v. VEST. *Lunella* perfecta; *plica palatalis* una supera adest; *lamella spiralis* conjuncta. *Testa* striata vel costulata, opaca; *apertura* rotundato-pyriformis, basi rotunda.

4. CLAUSILIA VENTRICOSA DRAP.

Testa ventricoso-fusiformis, costulato-striata, ad suturam raro strigillata, nigricanti-rufa vel brunnea, vix nitidula, solida, *spira* longe attenuata;

anfr. 11—12, primi 5 vix accrescentes, ultimus cervice tumidus, basi subcarinatus; *apertura* rotundato-elliptica, marginibus lateralibus subparallelis; *peristoma* continuum, solutum, albidum; interlamellare læve; *lamella supera* recta, *infera* superne medio ramis duobus divergentissimis; *callus palatalis* tenuis, cerasino-brunneus, oblique descendens; *plica palatalis* 1 supera, *subcolumellaris* vix emersa; *plica lunata* parva, arcuata. Long. 17—20, diam. $4\frac{1}{4}$—$4\frac{2}{3}$ mm. Apert. 4—$4\frac{1}{2}$ mm. longa, 3 mm. lata.

Clausilia ventricosa Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 71. t. 4. f. 14. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 9. f. 102; IV (1836) f. 276. Hansén Öfvers. af K. Vet. Akad. Förhandl. 1848. p. 201. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 465. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 128. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 344. t. 24. f. 8—10. A. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 11. f. 1—5, 158 (159). Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 31. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 78; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 67.

1. **tumida,** curta; long. 16, diam. $4\frac{1}{3}$ mm. (Schm. l. c. var. 6).
2. **gracilis;** long. $17\frac{1}{2}$, diam. $3\frac{2}{3}$ mm.; apert. $3\frac{1}{2}$ longa, $2\frac{1}{3}$ lata. (Schm. l. c. f. 159).

Hab. In **Suecia,** prov. Skåne: ad Ignaberga et Åkesholm (MALM), Esperöd (HULTMARK teste Malm), Skäralid (ROTH!! ex. $18\frac{1}{2}$ mm. longa, $4\frac{3}{4}$ mm. lata), Belteberga (C. A. W.) etc.; prov. Smaland: ad prædium Rosenlund prope Jönköping (ZETTERSTEDT!!); prov. Westergötland: ad Mörkeklef in monte Kinnekulle frequens (ZETTERST.!!, K. LINROTH!); prov. Östergötland: in monte Omberg (C. A. W.).

5. CLAUSILIA ROLPHI LEACH, GRAY.

Testa ventroso-fusiformis, confertim costulato-striata, cerasino-brunnea vel cornea, raro strigillata, sericina, *spira* breviter attenuata; *anfr.* 11, primi 4 v. 5 vix accrescentes, ultimus basi distincte carinatus; *apertura* rhomboïdeo-pyriformis, margine sinistro subsinuato; *peristoma* continuum, breviter solutum, albidum; interlamellare modo læve, modo plicatulum; *lamellæ* mediocres, *infera* antice biramosa; *callus palatalis* pertenuis, fuscus; *plica palatalis* conspicua, *subcolumellaris* vix emersa; *plica lunata* arcuatula. Long. 12—15, diam. $3\frac{1}{3}$ mm. Ap. $3\frac{1}{3}$ mm. longa, $2\frac{1}{3}$ mm. lata (Schm.).

Clausilia rolphi Leach in Gray Nat. arrang. Moll. in Med. repos. XV (1821) p. 239. Gray in Turt. Man. (1830) p. 215. t. 5. f. 54. A. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 12. t. 1. f. 6—9. t. 9. f. 160, 161. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 281.

Hab. In **Norvegia,** Christiania ad "Agershuus Fæstning". (Ex. 3, a celeberr. J. GWYN-JEFFREYS determinata, in museo univers. Christian. asservantur, teste clariss. POULSEN!).

6. CLAUSILIA PLICATULA Drap.

Testa fusiformis, costulato-striata, raro-strigillata, modo nigricans, modo violaceo- vel corneo-fusca; *spira* attenuata, acutiuscula; *anfr.* 10—13, ultimus basi tumidus, gibbosus; *apertura* rotundato-pyriformis; *peristoma* continuum, subappressum, reflexum, expansum, margine dextro et basali circularibus; *sinulus* parvus; *interlamellare* plicatulum; *lamella supera* valida, infera subtruncata, superne medio ramis 2 divergentissimis; *callus palatalis* margini parallelus; *plica palatalis* supera 1, ultra lunellam distinctam arcuatam parum producta; *plica subcolumellaris* vix emersa; *clausilium* antice rotundatum. Long. 12—13, diam. $2\frac{2}{3}$—3 mm. Ap. $2\frac{1}{2}$ mm. longa, 2 mm. lata.

Clausilia plicatula Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 72. t. 4. f. 17, 18. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 45. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 79. f. 32; VII (1838) p. 18. f. 471. Pfeiffer Monogr. II (1848) p. 481; IV (1859) p. 779. Friele Norske Moll. (1853) p. 26. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 340. t. 24. f. 28—31. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1865) p. 34. f. 28. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 25. f. 43—51. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 31. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 79; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 68.

1. **curta** (Schm. l. c. f. 49): long. 11—12, diam. 3—$3\frac{1}{2}$ mm.
2. **labiosa:** peristomate incrassato.
— **major,** elongata (Schm. l. c. f. 179?): testa anfr. $14\frac{1}{2}$—15, apertura oblongo-pyriformi; long. 17—19, diam $2\frac{2}{3}$—3 mm.
— **fallaciosa** mh.: lamella infera antice truncata, bigibba, superne e medio ramis 2 valde divergentibus; spatium interlamellare prorsus læve.
— **leucostoma** mh.: apertura, faux et plicæ lacteæ; plicæ interlam. 3—4, argutæ.

Hab. In **Suecia** multis locis in prov. Skåne; prov. Blekinge: ad Ronneby raro, ad Carlskrona passim; prov. Halland: ad Fröllinge (Malm); prov. Småland: ad Rosenlund prope Jönköping (Zetterst.); ins. Öland: ad Borgholm frequens, præterea rarior (C. A. W.); ins. Gotland: ad Hallbros, Thorsburg et Lindeklint (Lindström); in prov. Östergötland passim (C. A. W.); in prov. Westergötland: in Bokedalen ad Göteborg vulgaris (Malm), in Kinnekulle, Billingen et Mösseberg (C. A. W.), certe in omnibus regionibus montosis; in prov. Nerike passim (Hartman); circa Stockholm rarior, in Stora Ängsviken ins. Wermdön et ad Kungshamn (Hartm.); in prov. Upland: ad Upsala (Lilljeborg! et Johanson!); prov. Westmanland: ad Engelsberg par. W. Wåhla et ad Klacken par. Norberg (Johanson!); prov. Dalarne: ad fodinam Bisbergensem et ad Spjutbo (C. G. Andersson!!). 1 *curta:* prov. Skåne ad Belteberga, prov. Öster-

götl. in Omberg (C. A. W.), prov. Dalarne ad Säther (ANDERS.!!). — *major:* prov. Skåne ad Belteberga et in Skäralid (C. A. W.), prov. Östergötl. in Omberg (C. A. W.), prov. Westergötl. in montibus septentrionem versus a Fahlköping (K. AHLNER!!). — *fallax.* prov. Skåne ad Belteberga (C. A. W.). In **Norvegia** passim ad Christiania et ad Bergen (FRIELE). — *leucost.* ad Drammen (R. COLLETT!!).

CLAUSILIA *ÆMULA mh.

Testa rimata, fusiformis, rufo-brunnea, raro strigillata, argute costulata, apice attenuata, obtusa; *anfr.* 11, convexiusculi, ultimus majusculus, deorsum attenuatus, vix planiusculus; *cervix* dense et minutim costulata, subcristata, crista superne sulco levi terminata; *apertura* pyriformis, marginibus et basi rotundata; *peristoma* continuum, solutum, patulum, in limbum subtilem album, reflexiusculum; *lamella supera* mediocris vel parva; *lamella infera* remotissima, oblique curvata, intus valde elata, antice truncata, rami obsoleti ad marginem porrecti, rarius ramis duobus subparallelis; *interlamellare* plicatulum vel læve; *plicæ palatales* duæ superæ, altera (superior) longa, ultra lunellam producta, altera (infera) brevissima, *plicæ lunatæ* superne strictæ, inferne curvatæ apice oblique subadhærens; *callus palatalis* crassiusculus, remotus, margini parallelus; *plica columellaris* immersa, vix conspicua; *lamella spiralis* superam *non* attingens. Long. $10\frac{1}{4}$—$10\frac{1}{2}$, diam. $2\frac{2}{3}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc formam infra arcem ad Borgholm ins. Öland a. 1865 et in monte Mösseberg prov. Westergötland a. 1867 inveni. Ad Hallbros par. Westerhejde ins. Gotland cepit et misit cl. G. EISEN.

CLAUSILIA *SCANICA mh.

Testa fusiformis, cerasino-brunnea, vix nitidula, subtiliter striatula; *anfr.* 9, convexiusculi, ultimus tumidus, basi gibbus, antice costulato-striatulus; *apertura* subovato-pyriformis vel rotundato-elliptica; *peristoma* continuum, suboppressum, album, reflexiusculum, marginibus dextro et sinistro parallelis, basali circulari; *sinulus* parvus; *lamella supera* alta, *infera* profunda, valida, vix obliqua, medio bigibba, antice truncata; *callus palatalis* margini parallelus, supra validus, incrassatus; *plica palatalis* supera ultra lunellam parum producta. Long. $9\frac{1}{4}$, diam. 2 mm.

Clausilia plicatula forma 2 Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 80.

Hab. In **Suecia** in prov. Skåne ad Belteberga inveni.

CLAUSILIA *OREAS mh.

Testa fusiformis, rufo-brunnea, nitida, costulato-striata; *spira* brevis; *anfr.* 10—12, sutura tenui disjuncti, ultimus basi tumidus, gibbus; *apertura* rotundato-pyriformis; *peristoma* continuum, reflexiusculum; *interlamellare* sæpius plicatum; *lamella supera* mediocris, *infera* antice dichotoma, ramis longis parallelis usque ad marginem porrectis; *callus palatalis* margini parallelus, validus, albus, supra incrassatus, cum plica columellari emersa connexus, infra fascia tenui rufobrunnea terminatus; *plica palatalis* supera ultra lunellam distinctissimam, inferne arcuatam longe prolongata. Long. 13—15, diam. 3 mm.

Clausilia plicatula forma 1 Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 80.

Hab. In **Suecia** in prov. Skåne ad Belteberga inveni.

5. *Iphigenia* GRAY. *Lunella* perfecta; *plica palatalis* una, supera; *lamella spiralis* conjuncta. *Testa* striata vel costulata, opaca; *apertura* elongato pyriformis, basi angustata, callo basali interno prædita.

7. CLAUSILIA PUMILA ZIEGL.

Testa ventrosulo-fusiformis, cornea vel fusca, costulato-striata, strigillata; *spira* attenuata; *anfr.* 10—13, sat convexi, primi 5 non, sextus et septimus vix, reliqui sensim accrescentes, ultimus basi carinatus; *apertura* pyriformis, basi subcanaliculata; *sinulus* mediocris, non depressus; *peristoma* continuum, solutum, reflexiusculum, albidum limbatum; *interlamellare* haud raro uni- vel bi-plicatulum; *lamella supera* plerumque a spirali disjuncta, *infera* parva, interdum minima, profunda, sæpius ⋋ formis, *postice semper furcata; callus palatalis* margini subparallelus; *plica palatalis* supera vix vel paullo ultra lunellam distinctam producta, *subcolumellaris* vix emersa; *clausilium* antice excavatum, infra oblique truncatum, marginibus lateralibus leviter arcuatis, fere parallelis. Long. 12—14, diam. 3—$3\frac{1}{2}$ mm. Apert. $2\frac{3}{4}$—3 mm. longa, 2—$2\frac{1}{2}$ mm. lata.

Clausilia pumila (Ziegl.) Rossmässler Iconogr. IV (1836) p. 15. f. 259. Pfeiffer Monogr. Helic. II (1848) p. 474; IV (1859) p. 772. A. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 41. f. 122—129. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 32. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 83; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 71.

Clausilia lineolata Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh. Handl. II (1851) p. 128; III (1855) p. 135 (nec Held!).

Clausilia rugosa var. pumila Lilljeborg Öfvers. K. Vet. Akad. Förh. 1858. p. 9, 10, t. III. f. 2—5.

1. **major** SCHM.: long. $13\frac{1}{2}$—15, diam. $3\frac{1}{4}$—$3\frac{1}{2}$ mm.; anfr. 14.
2. **minor** SCHM.: long. 10, diam. $2\frac{3}{4}$ mm.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Åkesholm (MALM), W. Wram (LILLJEBORG), Belteberga (LILLJEB. et ipse), circa Ringsjön passim (J. A. WALLIN!! et ipse), Alnarp (A. J. JOHANSSON!!), Skäralid (C. A. W.) etc.; prov. Östergötland: Wäfversunda Storäng et multis locis in monte Omberg (C. A. W.); prov. Westergtötland: in monte Mösseberg frequens (O. NORDSTEDT!! et ipse), in monte Billingen (C. HARTMAN!); prov. Nerike: in Skaleklint et Willingkullen (C. HARTMAN); prov. Södermanland: ad Grefsäter (E. HEMBERG!). *1. major:* prov. Skåne ad Belteberga (C. A. W.); *2. minor:* prov. Westergötl. in monte Mösseberg (C. A. W.). In **Norvegia** specimen unicum in Ekeberg ad Christiania invenit clar. O. S. JENSEN!

CLAUSILIA *SEJUNCTA A. SCHM.

Testa ventroso-fusiformis, corneo-fusca, costulato-striata, vix strigillata; *anfr.* 12—13, convexiusculi, primi 4 non, reliqui sensim accrescentes, ultimus basi carinatus; *spira* attenuata; *apertura* pyriformis, basi rotundata, nec subcanaliculata; *sinulus* depressus; *peristoma* continuum, solutum, reflexiusculum, albido-limbatum; *interlamellare* uni-plicatulum; *lamella supera* a spirali longe disjuncta, *infera* antice bifurcata; *callus palatalis* tenuis, margini parallelus; *plica palatalis* supera una, ultra lunellam producta; *subcolumellaris* profunda. Long. 12—13, diam. 3 mm.

Hab. In **Suecia** media, in montibus Omberg et Mösseberg, hanc formam inveni. (Spec. original. e Lolland Daniæ a celeberr. PARREYSS in Wien accepi).

CLAUSILIA *OMMÆ mh.

Testa ventroso-fusiformis, cornea, costulato-striata, vix nitidula; *spira* attenuata, apice acutiuscula; *anfr.* 12, primi 4—5 æquales, ultimus basi subbicarinatus (latere sinistro medio impressione longitudinali, sulciformi); *peristoma* continuum, solutum, expansum, album; *apertura* pyriformis; *sinulus* parvus, depressus; *interlamellare* uniplicatulum; *lamella supera* a spirali sejuncta; infera profunda, ≍ formis; *callus palatalis* margini subparallelus; *plica palatalis* supera inferne tenuis, superne valida, ultra *lunellam* strictiusculam validam longissime producta, *subcolumellaris* vix emersa; *canaliculus* basalis profundus. Long. 13, diam. $3\frac{1}{4}$ mm.

Hab. In **Suecia** in præruptis borealibus montis Omberg prov. Östergötland a. 1867 inveni. Nomen specificum reginæ potentissimæ Omma, quondam e traditione et opinione populi dominæ, nunc temporis tutelæ hujus montis, sanctum.

La coquille décrite ci-dessus ne se rapproche plus d'aucune des Clausilies connues et décrites jusqu'ici que de *Cl. pumila*, mais elle en paraît spécifiquement séparée et distincte par son pli palatal supérieur très long, dépassant beaucoup devant le pli lunulé, de telle sorte que ce dernier se termine presque au milieu du précedent; par sa gouttiére petite et fortement déprimée et par le dernier tour de spire, lequelle présente au côté gauche une dépression longitudinale peu considérable, mais d'où résulte toutefois une crista distincte à gauche de la base. En outre, si l'on tient la coquille renversée avec le côté gauche en face de soi, on remarque que la crista proprement dite est considérablement plus longue que chez la *Cl. pumila*, de sorte que le bord de l'ouverture en est presque droit, et non retiré fortement en arrière comme chez celle-là.

CLAUSILIA *CONNECTENS mh.

Testa forma *Cl. biplicatæ* plane similis, fusiformis, parum ventricosa, apice attenuato, rufescenti-fusca, albido-strigillata, nitescens, costulato-striata, costulis eminentibus, sinuatis, æqualibus, itaque sculptura elegans; *anfractus* convexiusculi; *sutura* inferne paullo marginata; *cervix* carinata; *apertura* pyriformis, basi canaliculata; *peristoma* expansum, album; *lamella superior* parva, a basali disjuncta, *inferior* magna, indivisa, versus superiorem reflexa; spatium *interlamellare* læve; *plica columellaris* vix emersa; *plica palatina* superior fortis, non ultra lunellam porrecta; *canaliculus* profundus. Long. 16, diam. $3\frac{1}{2}$ mm. Ap. long. fere 4, lat. $2\frac{1}{2}$ mm. (Lilljeborg).

Clausilia rugosa Drap. *forma major* Lilljeborg Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh 1858. p. 9. t. 3. fig. 6, a—c.

Clausilia pumila Z. *forma 1.* Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 84.

Hab. In **Suecia** ad W. Wram prov. Skåne prof. Lilljeborg invenit.

Par ses dimensions plus considérables, ses stries fortement marquées, la forme de son ouverture, son profond canal â la base, sa grande lamelle inférieur indivisée et par la briéveté de son pli palatal supérieur, cette coquille présente une conformité très-grande avec la *Cl. biplicata* Mont. D'un autre côté elle se rapproche de *Cl. pumila* par l'absence de l'un des plis palataux supérieurs (et la présence du pli palatal inferieur) ainsi que par les callosités brunes de l'ouverture. L'on ne doit pas, toutefois, la regarder comme une transition entre les deux espèces, qui, assurément,

sont très-distinctes, mais comme un rayon envoyé dans le district de *Cl. biplicata* par la *Cl. pumila*, qui en envoie d'autres dans la direction de *Cl. rugosa*. C'est sans doute aussi l'opinion de Rossmässler lorsqu'il dit (Icon., VII et VIII, p. 24): Ueber *Cl. pumila* schliesst sich *Cl. rugosa* an *Cl. similis* (*Cl. biplicata* Mont.) an.

CLAUSILIA PERSONATA mh.

Testa ventroso-fusiformis, solida, corneo-fusca vel rufa, sericina nitida, subtiliter costulato-striata, sparsim strigillata, *spira* breviter concave producta, *cervice* vix validius costulata; *anfr.* 11—12, ultimus latere sinistro depressiusculus, basi carinatus, late, non profunde sulcatus, ante marginem impressus, albus; *apertura* parva, rhomboideo-ovata, margine sinistro sinuato; *peristoma* connexum, reflexiusculum, incrassatum, albidum; *interlamellare* lævc; *lamella supera* recta, *infera* profunda, postice furcata, antice bigibba; *callus palatalis* latus, tenuissimus, peristomati parallelus, supra et infra subincrassatus; *plica palatalis* una, supera, ultra lunellam arcuatam longe producta; *infera* nulla; *plica columellaris* vix emersa. Long. 11, diam. 3 mm.

Hab. In **Suecia** in præclivis ad Belteberga prov. Skane specimen unicum hujus formæ reperi.

8. CLAUSILIA DUBIA Drap.

Testa ventroso-fusiformis (interdum ventrosulo-gracilis), *spira* breviter attenuata, striata, rarius distanter costata, sericino-nitidula, corneo-fusca vel brunnea, crebre strigillata; *anfr.* 10—12, *sutura* plerumque albida juncti, primi 4 æquales, ultimus subtumidus, basi carinatus; *apertura* ovato-pyriformis; *peristoma* continuum, reflexiusculum, solutum vel subappressum, albidum; *sinulus* mediocris, suberectus; *interlamellare* lævc; *lamella supera* cum spirali conjuncta, *infera* profunda, antice alba, bigibba; *callus palatalis* latus margini subparallelus, rarius evanescens; *plica palatalis* supera conspicua, ultra lunellam plerumque parum producta, subcolumellaris subemersa; *callus basalis* plerumque validissimus; *lunella* arcuata. Long. 11—12, diam. $2\frac{1}{2}$ mm.

Clausilia dubia Draparnaud Moll. (1805) p. 70. t. 4. f. 10. A. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 40. f. 92, 99, 197 (var. d. *transsilvanica* et f. *gracilis*). Pfeiffer Monogr. Heliceor. VI (1859) p. 768 (varr. δ et ζ).

Clausilia rugosa var. Rossmässler. Cl. rugosa Friele pr. p.

Clausilia nigricans β Pfeiffer Monogr. Heliceor. III (1853) p. 616. Clausilia nigricans α Moq.-Tandon.

Hab. In **Suecia**, prov. Blekinge: ad Ronneby (C. A. W.); prov. Dalarne: ad Ossmundsberget par. Rättvik (C. G. ANDERSSON!!); prov. Jemtland: ad Alsen (W. MEVES e spec. in museo reg.). In **Norvegia** ad Christiania specimina nonnulla a. 1868 legi, antea a clar. FRIELE inventa (cfr. descript. *Cl. rugosæ* in Norske Moll. p. 25). In insula Norvegiæ Svinvär celeberr. prof. NILSSON a. 1816 formam hujus generis insignem invenit, quam sub *C. rugosa* his verbis descripsit: "Cl. testa majori, subventricosa, brunnea, nitida, minutissime striata; plicarum columellæ interstitio pliculâ solitariâ obliquâ." Vel *Cl. pumila* vel potius *Cl. dubia* hæc forma, postea loco indicato non reperta, fuisse videtur.

9. CLAUSILIA BIDENTATA (STRÖM).

Testa cylindraceo-fusiformis, subtiliter striata, sericino-nitida, cerasino-brunnea vel nigricans, ad suturam strigillata, *spira* sensim attenuata; *anfr.* sepius 10, planulati, *sutura* albida juncti, primi 3 æquales, ultimus basi sulcatus, obtuse carinatus; *apertura* rhomboideo-pyriformis, elongata, basi profunde canaliculata; *peristoma* albidum, reflexiusculum; *sinulus* parvus, suberectus; *interlamellare* 1—2-plicatulum, interdum læve; *lamella supera* cum spirali conjuncta, *infera* simplex, furcata vel deltoidea; *callus palatalis* a margine plerumque divergens; *plica palatalis* supera ultra lunellam arcuatam vix producta; *subcolumellaris* parum emersa; *clausilium* fere cochleariforme. Long. 10, diam. $2\frac{1}{2}$ mm.

Turbo bidentatus Ström Trondhj. Selsk. Skrift. III (1765) p. 436. t. 6. f. 17.
Clausilia rugosa Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 46. Friele pr. p. Norske Moll. (1853) p. 25. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 278.
Clausilia nigricans Pfeiffer pr. p. Monogr. Heliceor. III (1853) p. 616; IV (1859) p. 771. E. v. Martens Binnenmoll. Norv. in Malak. Bl. (1857) p. 92. A. Schmidt Krit. Claus. (1857) p. 47. t. 6. f. 110—114, 204. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 36. f. 29. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 85; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 72.
Clausilia nigricans β obscura Moq.-Tandon Moll. Fr. (1855) p. 334.
Clausilia perversa Reeve Brit. Moll. (1863) p. 103.
Clausilia bidentata Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 30.

— **septentrionalis** SCHM.: curta, ventricosa, subtilius striata; long 8, diam. $2\frac{1}{2}$ mm. A. Schm. l. c. p. 47. fig. 105, 206.

— **exigua** mh.: testa cylindrico-fusiformis, subtiliter striatula, non vel raro-strigillata, apertura parvula; long. 8, diam. vix 2 mm. Rossm. f. 464.

— **erronea** mh.: testa parva, plica palatali supera ultra lunellam arcuatam *longissime* producta.

Hab. In **Suecia** per totum regnum saltem ad Funnäsdalsberget in prov. Herjedalen usque, ubi a clar. F. SÖDERLUND inventa. — *erron.* in silva faginea ad Klinta prope Ringsjön prov. Skåne inveni. In **Norvegia** passim ad Christiania et Bergen (FRIELE), Söndmör (STRÖM), Trondhjem (v. MARTENS).

J'ai adopté pour cette espèce, en conformité avec Mr Mörch, le nom donné par STRÖM, comme le plus ancien et comme appartenant indubitablement ici. Le nom de *perversa* admis par Reeve et plusieurs autres d'après Müller (Moquin-Tandon toutefois d'une manière erronnée pour *Cl. rugosa!*) paraît à tous égards devoir être exclu, vu qu'il peut se rapporter avec tout autant de droit à plusieurs espèces, telles que *Balea perversa*, *Clausilia plicatula* et *Cl. bidentata* (mais non *Cl. biplicata*, comme le croit Pfeiffer).

Gen. BALEA PRIDEAUX.

Testa turrito-conica vel fusiformis, sinistrorsa; *apertura* semiovalis vel subpyriformis; *columella* simplex; *paries aperturalis* lamella parva prope insertionem marginis externi munitus.

1. BALEA PERVERSA (LIN.).

Testa conico-turrita, tenera, subtiliter costulato-striata, sericina, olivaceo-cornea vel fusco-flavescens; *anfr.* 7—9 (10—11), convexiusculi, sæpe dense strigillati, ultimus basi angulato-rotundatus, valide costato-rugosus; *apertura* ovato-pyriformis; *peristoma* simplex, marginibus callo tenui (sæpe obsoleto), juxta insertionem labri tuberculum dentiformem, album (interdum laminam parvam) emittente, junctis, columellari subreflexo. Long. 8—9, diam. 3 mm.

Turbo perversus Linné Syst. Nat. X (1758) p. 767; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 525; Syst. Nat. XII (1767) p. 1240. Ström Trondhj. Selsk. Skr. III (1765) p. 427.

Pupa fragilis Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 68. t. 4. f. 4. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 48. Friele Norske Moll. (1853) p. 21.

Balea fragilis Rossmässler Iconogr. X (1839) p. 2ö. f. 636.

Balea perversa Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 387. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 37. f. 30. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 29. Westerlund pr p Sv. Moll. (1856) p. 76.

Pupa perversa Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 349. t. 25.

Balia perversa Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 273.

Hab. In **Suecia** in rupibus et sub lapidibus sæpium calcareis formationis transitionis insularum maris orientalis, scil. Gotland et Öland ubique; passim in prov. Skåne, raro in prov. Blekinge, passim frequens in prov. Westergötland et Östergötland, perrara in prov. Nerike (in monte Ullaviklint par. Kil: HARTMAN!) et Westmanland (ad Westerås: C. H. JOHANSON!). In **Norvegia** sat frequens ad Bergen, rarior ad Christiania (FRIELE), ad Volden in Söndmör (STRÖM), ad Drivstuen in Dovre alt. 2180′: MARTENS), ad Herstad par. Hof sat frequ. (O. S. JENSEN!!).

BALEA *PYRENAICA BOURG.

Testa elongata, fusiformi-turrita, pellucida, vix nitidula, costulato-striatula, fusco-flavescens; *anfr.* 10—11, planulati; *apertura* pyriformis, in parte superiore coarctata, inferiore dilatata; *peristoma* marginibus approximatis, callo validum tuberculum medianum præbente, junctis, sæpe continuis. Long. 9—10½, diam. 2½—3 mm.

Balea pyrenaica Bourguignat, L. Pfeiffer Monogr. Heliceor. VI (1868) p. 393.
Balea perversa Westerlund pr. p. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 65.

Hab. In **Suecia** multis locis in insulis balthicis, Gotland et Öland.

BALEA *RAYIANA BOURG.

Testa oblongo-turrita, tenera, nitida vel polita, fusca, olivaceo-cornea, confertim striata; *anfr.* 7—8, convexi, *sutura* profunda conjuncti; *apertura* paullulum angulata, rotundato-pyriformis; *peristoma* marginibus callo tenui, juxta insertionem labri externum tuberculum parvulum emittente, junctis. Long. 6—8, diam. 2½—3 mm.

Balea rayiana Bourguignat, L. Pfeiffer Monogr. Heliceor. VI (1868) p. 393.
*Balea *sarsi* Westerlund pr. p. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 65*.

— **polita** mh.: testa sæpe crebro-stigillata; apertura oblongo-semiovalis.

Hab. In **Suecia** ad Lund, circa Ringsjön etc. prov. Skåne; ad Ronneby et Carlskrona prov. Blekinge; passim in ins. Öland (C. A. W.); ad Kungshamn in Wermdön, ad Lilla Björknäs et Stora Ängsviken prope Stockholm (HARTMAN).

M:r PHILIPPI (Zeitschrift f. Malak., 1847, p. 84) décrit comme suit une coquille sous le nom de *Balea sarsi:* "Testa sinistrorsa, subperforata, oblongo turrita,

striatula, nitida, pellucida, olivaceo-cornea; spira acutiuscula; anfr. 7 convexi; ultimus basi rotundatus; columella substricta, paullo recedens; apertura oblongo-semiovalis; peristoma simplex, expansiusculum, margine sinistro sinuoso-dilatata. Long. 6, diam. $2\frac{1}{4}$ mm. Patria: Norvegia. Misit cl. Sars." On trouve dans PFEIFFER, Monogr. Heliceor. viv. II (1848) p. 388, la reproduction de ce diagnose, accompagnée de la remarque suivante: Forma *B. tristensi* similior, quam *perversæ*. Inter specimina collectionis Philippianæ unum tantum exstat peristomate perfecto, attamen plica parietali carens. Ex analogia autem evidente concludere licet, hanc plicam, sicut in testis perfectis adesse. Le Dr E. VON MARTENS admit, dans son mémoire: "Ueber die Binnenmollusken des mittleren und südlichen Norwegens" (Malak. Blätt. 1856, p. 91), cette espèce, à l'égard de laquelle il dit: Kurzer und breiter mit dichtern und wenig gewölbten Windungen, glänzender und dünkler gefärbt als B. perversa L. Insel Florö (stift Bergen), 12 norweg. Meilen nördlich von Bergen am offenen Meere. Nach Vergleichung mit Exemplaren in der Sammlung des Herrn Prof. SARS zu Christiania." Le Dr PFEIFFER ajoute dans une note, qu'en Sept. 1856 *il reçut* des exemplaires vivants de la même espèce pris a Gothembourg en Suède. En présence de ces faits je dus me mettre sur la vaste étendue des trois pays scandinaves, à la recherche de ce mollusque constaté comme une espèce nouvelle du genre *Balea* par l'examen auquel trois conchyologues distingués s'étaient livrés à des époques différentes sur des exemplaires pris par Mr SARS en personne. L'idée de la différence specifique étant malheureusement quelque chose de très-subjectif, je devais donc me préparer à trouver peut-être dans la nouvelle espèce, un type, d'un rang inférieur à mes yeux, mais toutefois le même que celui de PHILIPPI, PFEIFFER et MARTENS; et comme par suite de l'histoire de la dite espèce, la pensée devait nécessairement se porter sur une *Balea*, je crus enfin dans la forme plus petite donnée ci-dessus de *B. perversa*, avoir trouvé, malgré plusieurs déviations du diagnose de Philippi et de Pfeiffer, la *Balea sarsi*, d'autant plus que j'avais reçu sous ce nom la même forme de la Norvége. En attendant, je ne l'admis dans mon ouvrage sur "les Mollusques de terre et d'eau douce de la Suède" (Sveriges Land- och Sötvatten-Mollusker, 1865), que comme une des nombreuses formes du quelles se revêt la *B. perv.* Plus tard, je l'inscrivis dans le "Catalogus Moll. terr. et fluv. Sueciæ" (1868), sous le nom de "*B. *sarsi* PHIL.?" cette variéte comme une forme de B. perversa. A l'historique de "B. sarsi" appartient aussi la circonstance que dans sa "Syn. Moll. Dan." (1864) p. 30, Mr MÖRCH donne comme danoise "B. sarsi Philippi?", en l'accompagnant de la description suivante: "Differt a præcedente (B. perv.) testa majore, ventricosiore, colore obscure brunneo et tuberculo parietali minore." A l'effet de faire disparaître ces points d'interrogation, il ne restait plus qu'à contempler face contre face cet objet mystérieux. Je m'adressai en conséquence à l'université de Christiania, au Musée zoologique de laquelle appartiennent actuellement toutes les collections de M. le professeur SARS, et je dus à la bienveillante obligeance de M. le professeur ESMARK, de recevoir immédiatement en prêt deux des exemplaires originaux de "*Balea perversa* Phil.", pris à "Florö (département de Bergen), 12 milles norvégiens au nord de Bergen." C'etaient les mêmes qu'avaient examinés M. le Dr v. MARTENS lors de son voyage en Norvége. Je me vois de la sorte à même, non seulement d'effacer les points interrogatifs, mais encore *l'espèce même* de la liste des Mollusques scandinaves, *la Balea sarsi* PHIL. *et* PFEIFF.

n'étant rien autre chose que des jeunes individus non encore développés de Clausilia bidentata STRÖM (C. nigricans Pult.). La description de PHILIPPI et de PFEIFFER n'est toutefois pas entièrement conforme: au lieu de "striatula, nitida", on doit lire: "confertim costulato-striata, sericina, albido-strigillata", de même que, par suite, de la *lamelle spirale translucide*, la suture est *marginée*. A part cela, toute personne, comparant avec la description un exemplaire de cette Clausilia fourni seulement de 7 tours de spire, y retrouvera *completement*, la *Balea sarsi*, oblongo-turriforme de 6 mm. de longueur.

Gen. PUPA DRAPARNAUD.

Testa cylindrica, obtusa; *anfr.* 5—9, ultimus pro ratione parvus; *apertura* subrotunda, dentibus pliciformibus intrantibus plerumque instructa; *peristoma* marginibus æqualibus, subparallelis, plerumque lamina callosa junctis.

Subgen. *Pupilla* LEACH. *Testa* dextrorsa, abbreviato-cylindracea, obtusa; *apertura* rotundata, plicis paucissimis vel nullis; *peristoma* plus minus expansum.

1. PUPA CYLINDRACEA (DA COSTA).

Testa cylindraceo-oblonga, glabra, nitida, fulvo-cornea; *anfr.* 6—7; *apertura* semiovalis, plica parietali superne dentiformi et cum margine externo connexa; *peristoma* plano-reflexum, albo-labiatum. Long. 3—4 $\frac{2}{3}$, diam. 1 $\frac{3}{4}$—2 mm.

Turbo cylindraceus Da Costa Test. Brit. (1778) p. 89. t. 5. f. 16.

Pupa umbilicata Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 58. Rossmässler Iconogr. V (1837) p. 15. f. 327. Högberg K. Vet. Akad. Handl. 1841 p. 202. Pfeiffer Monogr. II (1848) p. 329. Friele Norske Moll. (1853) p. 23. Wallengren Ant. i Zool. (1856) p. 85. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 246. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 65; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 52.

Pupa cylindracea Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 390. t. 27. f. 42, 43; t. 28. f. 1—4. Reeve Brit. Moll. (1862) p. 111.

b. **edentula** (*Pupa dilucida* WALLENGREN l. c. p. 88?): testa plica angulari aperturæ destituta.

Hab. In **Suecia** hæc species insignis in monte Skäralid prov. Skåne (forma obscura, minor, ventricosa, spira brevi et rotundata, umbilico subinfundibuliformi) rarior (C. A. W.), in insula Gotland (forma typica) ubique et frequenter obvenit (HÖGBERG, WALLENGREN, LINDSTRÖM ll. cc.). b. *edent.* cum forma normali in Gotland, sed rarissima. In **Norvegia**

loco unico, scil. in muris superioribus circa arcem Sverresborg ad Bergen naturæ specei idoneis frequenter (KOREN, SARS, FRIELE) occurrit.

Le nom généralement adopté pour cette espèce est celui de *Pupa umbilicata*, donné par DRAPARNAUD en 1801, mais DA COSTA (l. c.) la décrivait et en donnai déjà un dessin en 1778, sous le nom de *Turbo cylindraceus*, nom qui date en réalité de l'anné 1678, époque à laquelle LISTER lui donnait l'appellation de "*Buccinum* exiguum, subflavum, mucrone obtuso, sive *cylindraceum*", lequel appartient à la même espèce, d'après le témoignage de *tous* les auteurs anglais. Considérant pour ma part que l'on doit pour autant que c'est compatible avec la justice et la vérité, conserver le nom spécifique fondé sur un synonyme plus ancien, fût-il même antérieur à Linné, j'ai adopté le nom de Da Costa, dont les ancêtres remontent à 123 ans plus loin que celui de Draparnaud. Il y aura, il est vrai, conflit avec la *P. cylindracea* ZIEGLER, Ross. Icon. de l'année 1837 (une coquille de la Dalmatie), mais cette dernière devra céder la place à son homonyme plus ancien, ce qui ne sera pas au reste si difficile, la forme de Ziegler n'etant sans nul doute qu'une variété de la *Pupa frumentum* DRAP.

PUPA *ANCONOSTOMA LOWE.

Testa subcylindrica, sub lente striatula, nitida, tenuis, fulvo-cornea; *anfr.* 6, sensim accrescentes, convexiusculi, ultimus basi angulato-compressus; *sutura* profunda; *apertura* semi-ovalis, basi angulata; paries aperturalis lamella tenui cum margine externo paralleli, superne obsolete dentiformi, a margine separata; *peristoma* oblique reflexiusculum, concolor. Long. 4, diam. 2.

Pupa anconostoma Lowe, Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 314.
Pupa nilssoni (nov. sp.) Wallengren Anteckn. i Zoologien (1856) p. 86.

Hab. In Suecia cum P. cylindracea in insula Gotland rara forma. (Spec. authentica a Madera multa habeo).

2. PUPA MUSCORUM (MÜLLER).

Testa cylindracea, corneo-fusca, sublævis; *anfr.* 7—8; *apertura* semicircularis, edentula vel subunidentata; *peristoma* reflexiusculum, extus callo albo valido cinctum. Long. $3\frac{1}{2}$—4 (—6), diam. $1\frac{3}{4}$—2 mm.

? *Turbo muscorum* Linné p. p. Syst. Nat. X (1758) p. 767; etc.
Helix muscorum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 105.
Pupa muscorum Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 49. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 83. f. 37; V (1837) f. 323. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 311. Friele Norske Moll. (1853) p. 21. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 392. t. 28. f. 5—15. Wallengren Anteckn. i Zool. (1856) p. 83. Nord. et Nyl. Finl.

Moll. (1856) p. 39. f. 31. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 27. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 66; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) N:o 54.
Pupa marginata Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 249.

b. **unidentata** PFR.: paries aperturalis denticulo obtuso.
— **minor** mh. (P. musc. *β.* Nilss.): testa brevior, ovato-cylindrica; anfr. 6; long. 3, diam. $1\frac{3}{4}$ mm.

Hab. In Suecia "a Scania usque in regiones alpinas Norrlandiæ et Lapponiæ" dicit Nilsson l. c.; terminus borealis mihi cognitus est Funnäsdalsberget prov. Herjedalen, a quo clar. F. SÖDERLUND exempl. misit. b. *unid.* passim cum f. typica, semper tamen perrara. — *minor* in prov. Skåne ad Stampe et Karstad prope Christianstad et in Westergötland in Stegeberget prope Göteborg (MALM), per totam ins. Öland (C. A. W), passim in ins. Gotland (LINDSTRÖM), prov. Östergötland in monte Omberg (C. A. W.), ad Stockholm in Rörstrandshage et ad Mariæberg frequens (WIKSTRÖM), et aliis locis. In Norvegia passim, ad Christiania frequentior, ad Bergen rarior (FRIELE: *α*, *β*, *γ*).

JEFFREYS et plusieurs autres auteurs anglais supposent que le *Turbo muscorum* de LINNÉ est la *P. cylindracea* de DA COSTA (P. umbilicata Dr), se fondant principalement sur la circonstance que Linné cite comme synonyme le "Buccinum exiguum flavum, mucrone obtuso s. cylindraceum" LIST. Angl. 121. t. 2. f. 6, qui, d'après TURTON, GRAY, JEFFREYS, REEVE, etc., est la vraie P. cylindracea. Cette citation est dans ce cas totalement incorrecte. DRAPARNAUD, MICHAUD, MERMET, MOQUIN-TANDON, GRAS, et plusieurs autres auteurs francais considèrent que l'espèce de Linné est la *Vertigo minuta*, qui pour cette raison porte chez eux le nom de l'espèce en question (Pupa s. Vertigo muscorum). Cela aussi est une erreur, d'autant plus inexplicable que Linné dit de son T. musc.: "magnitudo seminis secalis" ou "magnitudo seminis tritici". Gray, par contre est d'une autre opinion disant, en parlant du type *Vertigo edentula:* it is very probable, that this is the true Turbo muscorum of Linnæus, as it most accurately answers his definition in the Systema Naturæ: testa ovata, obtusa, pellucida, anfractibus senis, secundis, apertura edentula." La source du Turbo muscorum de Linné se trouve dans son "Voyage d'Öland" (1745) p. 99: "Ayant écarté quelques pierres (dans l'ancienne enceinte fortifiée de Triaberga, paroisse de Hulterstad) nous trouvâmes de petites coquilles de la longueur de 7 spires, grandes comme des grains de frument, brunâtres, à spires tournées du côté du soleil; Buccinum exiguum flavum mucrone obtuso s. cylindraceum List. Angl. 121, t. 2. f. 6. (Un preuve du peu d'intérêt qu'avait Linné pour cette classe d'animaux, c'est ce que cette coquille trouvé accidentillement par lui, en écartant des pierres non dans ce but, mais pour voir "si l'enceinte avait été murée à la chaux, ce que quelques vestiges semblaient confirmer", fut avec les Limax maximus, Helix hortensis et H. albella les seuls mollusques qu'il trouva dans l'île). Ce *Buccinum - - - - cylindraceum* de Lister, cité par Linné, et qui est notre P. cylindracea, était la seule coquille connue avec laquelle Linné pût comparer sa trouvaille, comparaison que même

notre époque trouverait légitime; mais par le mot *brunâtre*, il établit lui-même une protestation contre l'identification. Les auteurs qui, pour la critique des espèces Linnéennes, ne peuvent employer que la voi des déductions et des présomptions, s'appuient beaucoup sur les synonymes de Linné, mais ils sont *sans* valeur dans la plupart des cas, car Linné les citait principalement d'après la forme (l'habitus) des figures, cause pour laquelle elles ne fournissent aucun autre éclaircissement que celui résultant du fait que la figure doit exprimer l'aspect de l'espèce; LINNÉ lui-même dit expressement (dans sa Mantissa II) que les synonymes sont de peu d'importance dans la détermination, fait se rapportant tant aux végétaux qu'aux animaux. L'auteur de la presente traité a soigneusement exploré l'endroit où Linné trouva son Turbo muscorum, l'enceinte fortifiée de Triaberga sur l'île d'Öland (cette enceinte a une forme elliptique; grand diamètre 200 pieds, petit 143 pieds) et il est à même d'assurer que l'on n'y trouvera pas la moindre trace ni de *Pupa cylindracea* (Da C.) ni de *P. minutissima* HARTM., coquilles qui, du rest, n'ont jamais été trouvées dans l'île d'Öland; et pour ce qui regarde *P. edentula* DRAP., il lui a été impossible d'en découvrir un seul exemplaire dans toute la localité. Si, par contre, on soulève les blocs calcaires de la muraille d'enceinte écroulée, on trouve presque sous chaque pierre le type *Alloglossa* (Pupa) *avenacea* BRUG. C'est bien assurément la coquille trouvée par Linné a cet endroit le 9 juin 1741, et ce n'était que d'après ce type qu'il pouvait établir un diagnose tel que: testa magnitudine *tritici*, apertura *ovato-acuminata*, etc. Le fait que Linné ne dit rien des lamelles etc., ne doit pas nous étonner: il ne s'attachait à de semblables minuties, il ne *tamisait* pas la nature comme nous le faisons. — Ce ne fut qu'après avoir cherché le mot de l'énigme sur le point même de la trouvaille de Linné, que je fus à même de constater la supposition de MÜLLER, Verm. Hist. II, p. 106: "*Helix muscorum;* magnitudo ejus jam seminis secalis jam tritici apud Linnæum dicitur, nostræ et autorum vix *secalis*. Spiræ in Linnæano 4, 5, 6 et 7, in autorum et nostro perfectæ ætatis constanter sex. Apertura lunata, seu (si partim anfractus aperturæ oppositam excipias) circinnata, nullo modo ovato-acuminata, ut in Linnæano, hinc illustris autor forte aliam vidit, quod tamen Synonyma negant." Linné a véritablement décrit dans différents ouvrages des espèces différentes sous le nom de *Turbo muscorum;* la première trouvée par lui fut celle actuellement nommée *Alloglossa avenacea* (BRUG.); mais quoiqu'il cite partout la source même (Voyage d'Öland, p. 99), il ne l'a suivie nulle part complètement, mais l'a rendue troublée par des erreurs d'espèces. Je suis très-porté à voir avec GRAY dans le Turbo muscorum du *Syst. Naturæ* de Linné, la *Pupa edentula* DRAP.; en outre, tandis qu'une partie des descriptions de la *Fauna Su.*, ed. 1 et 2, est complètement la même que dans le S. Nat., la partie restante peut sans doute convenir à P. marginata Dr., mais les expressions "apertura ovato-acuminata" et "magnitudo seminis tritici" ne peuvent se rapporter qu'à A. avenacea. Le nom de LINNÉ (Turbo) muscorum ne pouvant donc être appliqué dans son entier à aucune espèce, et l'Helix muscorum de MÜLLER étant sans le moindre doute identique à la P. marginata de Draparnaud, le nom spécifique *muscorum* doit être maintenu, mais avec Müller comme auteur.

Subgen. *Isthmia* GRAY. *Testa* minuta, dextrorsa, omnino fere cylindrica, obtusa, costulata vel costulato-striata; *anfr.* 5—7; *apertura* rotundata, 2—3 dentata vel edentula.

3. PUPA COSTULATA NILSSON.

Testa cylindrica, regulariter et confertim costulata, fulvido-cinerascens; *anfr.* 6—7, convexi, ultimus latior; *apertura* subovalis, typice 3-dentata: dens parietalis 1, lamelliformis, columellaris 1, interdum minimus, parietalis 1, sæpe evanescens; *peristoma* expansum, intus callo albo nitido incrassatum, extus pone aperturam callo albido cinctum. Long. 2, diam. vix 1 mm.

Pupa costulata Nilsson Hist. Moll. (1822) p. 51. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 313. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 124. Wallengren Anteckn. i Zool. (1856) p. 89. (Nec P. costulata Bielz nec Gredler, quæ Vertigo muscorum γ dentiens Moq.-Tand.).

Pupa ascaniensis A. Schmidt Zeitschr. f. Malak. 1849 p. 141, Pfeiffer Monogr. Heliceor. III (1853) p. 554. (Ex spec. auth.).

Hab. In **Suecia** prov. Skåne ad Esperöd (LANDGREN sec. Nilsson); prov. Blekinge ad Sölvesborg (WALLENGREN); ins. Gotland ad Visby, Östergarn, Stora Carlsö, Hoburg et Stenkumla (HÖGBERG, WALLENGREN, LINDSTRÖM); in ins. Öland fere ubique copiosissima testa, præsertim ad Tveta, Wickleby, Ismantorpsborg, Borgholm, Horn etc. (C. A. W.); prov. Östergötland prope canalem ad Spellinge par. W. Harg (ex. in collectione d:ris E. v. Goës vidi).

4. PUPA MINUTISSIMA HARTM.

Testa cylindrica, eleganter et confertim costulato-striata, cornea; *anfr.* 5—6, convexi; *apertura* oblongo-subcircularis, edentula; *peristoma* reflexiusculum, tenue. Long. vix 2, diam. $\frac{2}{3}$ mm.

Pupa muscorum Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 56.

Pupa minuta Studer Verzeichn. Schw. Conch. (1820) p. 89 (sine charact.).

Pupa minutissima Hartmann in Neu Alpina (1821) p. 220, t. 2. f. 5. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 84. f. 38. Hartman Nerikes Moll. (1864) p. 6.

Vertigo muscorum Moquin-Tandon Hist. Moll. II (1855) p. 399, t. 28, f. 20—24.

Vertigo minuta Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 70; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 57.

Hab. In **Suecia** hanc testam ad pagum Kofta par. Glanshammar prov. Nerike primus invenit clar. C. HARTMAN a. 1862; postea inventa in monte Omberg prov. Östergötland (teste prof. LILLJEBORG), in collis ad

urbem Westerås prov. Westmanland (C. H. JOHANSON!!), ad Harg prov. Upland (G. EISEN!!) et in ins. Gotland ad Visby, nec non in insulis Stora Carlsö et Skälsö (LINDSTRÖM). In **Norvegia** hanc speciem in montibus ad arcem Aggerhuus prope Christiania legit prof. LILLJEBORG, duce cand. A. BOECK.

Mr J. GWYN-JEFFREYS considère (British Conchology Vol. I. p. 271) cette espèce et la précédente comme parfaitement identiques. Ces deux coquilles se ressemblent beaucoup effectivement, mais elles sont toutefois à coup sûr spécifiquement différentes. *P. minutissima* HARTM. a les côtes transversales beaucoup plus nombreuses, ce qui donne à cette coquille un aspect strié beaucoup plus fin; le peristome est mince, légèrement reflechi, sans le bourrelet fort et blanc qui se trouve principalement dans le bord extérieur de *P. costulata*, et il n'existe qu'un faible indice du bourrelet jaune blanchâtre qui traverçe la nuque de cette dernière. Le fait que *P. costulata* NILS. ne peut être identique avec *P. doliolum* (BRUG.), comme C. PFEIFFER (Naturg. Land- u. Süssw. Moll., III. p. 37) le suppose, en s'étayant sur NILSSON qui a admis quoique avec un point interrogatif ("?") P. dol. Dr. Hist. Moll., p. 62, t. 3. f. 41, 42, dans la synonymie, est evident pour quiconque sait combien cette dernière s'en sépare par les dimensions de la coquille (long. 5—6, larg. 3 mm.) et par sa forme (plus large en haut qu'en bas), ses 9 tours de spire, 1—2 dents evidentes sur le bord de la columelle, etc.

Subgen. *Vertigo* MÜLL. *Testa* minuta, ovata (rarissime cylindracea), obtusa, tenuis, nitida, dextrorsa vel sinistrorsa, lævis vel irregulariter striatula; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—6 (rarissime 7—8), ultimus rotundatus major; *apertura* fere semiovalis, sæpissime dentata vel plicata; *peristoma* marginibus æqualibus, plerumque lamina callosa tenui junctis.

1. *Alæa* JEFFR. *Testa* dextrorsa.

5. PUPA COLUMELLA BENZ.

Testa cylindracea, nitida, vix striatula, fulvo-fusca, apice obtusa; *anfr.* $6\frac{1}{2}$—$7\frac{1}{2}$, convexi, sensim, sæpe tardissime, accrescentes, superiores 5 subæquales, *sutura* profunda disjuncti, ultimus ceteris latior, ventrosiusculus, $\frac{1}{4}$ altitudinis vix superans; *apertura* parva, lunato-rotundata vel oblique ovato-pyriformis, edentula; *peristoma* non reflexum, acutum, marginibus callo tenui junctis, dextro arcuato, supra forte curvato, columellari multo breviore, rectiusculo, superne dilatato. Long. 3—$3\frac{1}{2}$, diam. $1\frac{1}{4}$—$1\frac{1}{2}$ mm.

Pupa columella Benz apud G. v. Martens "Ueber Würtemb. Fauna" (1830) p. 49 (ex spec. orig.!). Rossmässler Iconogr. X (1842) p. 11. f. 731. Pfeiffer Monogr. III (1853) p 531; v. Wallenberg pr. p. Malak. Blätt. V (1858) p. 102; Moll. Lapp. Lul. (1858) p. 25, fig.

Pupa inornata Michaud Complem. (1831) p. 63. t. 15. fig. 31, 32. Pfeiffer Monogr. Heliceor. III (1853) p. 531. Gredler.

Hab. In **Suecia** hanc testam ad Qvickjock in Luleå Lappmark cepit clar. v. WALLENBERG, ad Bollnäs prov. Helsingland legit et mihi benigne communicavit clar. F. SÖDERLUND. In **Norvegia** ad Storvik in Waage invenit et misit amic. O. NORDSTEDT.

M. le Dr E. v. MARTENS a eu la grande obligeance de m'envoyer en prêt deux exemplaires de *P. columella* BENZ, venant du lieu de la trouvaille originale (une paroi d'argile entre les villages de Hässlach et de Kaltenthal près de Stuttgart). Ces exemplaires originaux, pris par BENZ lui-même, qui a découvert et fixé l'espèce, remis par lui à GEORGES VON MARTENS, decrits par ce dernier dans son travail: "Ueber Würtembergs Fauna", inséré dans le Correspondenzblatt des Landwirthschaftlichen Vereins, Mars 1830, Stuttgart, p. 171 (tirage séparé, p. 49) — Benz quoique à tort est cité partout comme l'auteur de ce travail —, présentent la conformité la plus parfaite avec les exemplaires Suédoises et Norvégiens, entièrement comme P. inornata remis par Mr le prof. GREDLER, l'un et l'autre identiques, mais sans doute ils composant une espèce parfaitement distincte de la P. edentula Dr.

6. PUPA EDENTULA DRAP.

Testa cylindraceo-ovata, conico-ovalis vel oblongo-conica, acutiuscula, cornea, nitida, pellucida, lævis; *anfr.* 5—6 (rarissime 7—8, ultimus ventrosus), sat celeriter accrescentes, planulati, *sutura* levi conjuncti, ultimus præcedentibus duobus subæqualis; *apertura* rotundata, semiovalis, edentula; *peristoma* non reflexum, acutum, marginibus sejunctis, æqualibus, æque arcuatis. Long. 2—3, diam. $1\frac{1}{2}$—$1\frac{3}{4}$ mm.

Pupa edentula Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 59. t. 3. f. 28, 29. Högberg Wet. Akad. Handl. 1841, p. 204. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 305. Wallengren Anteckn. i Zoologien (1856) p. 90. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 40. f. 32. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 28.

Vertigo edentula Rossmässler Iconogr. IX, X (1839) p. 28. f. 646. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 402. t. 28. f. 28—30. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 268.

Vertigo columella v. Wallenberg pr. p. Malak. Blätt. V (1858) p. 102; Moll. Lapp. Lul. (1858) p. 25 f. Hartman Ner. Moll. (1864) p. 6; Öfvers. af Wet. Akad. Förh. 1866 p. 384. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 68; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 56.

Hab. In **Suecia** per totum regnum, usque in Lapponia boreali, distributa, ubique tamen testa anfr. 7—8 rarissima. Species inventa: prov. Skåne ad W. Wram et Esperöd (LILLJEB., HULTMARK), Håkanryd (WALLENBERG), Ignaberga (MALM), Fogelsång, Dahlby Hästhage, Belteberga, Alnarp, Skäralid et aliis locis (C. A. W.); prov. Blekinge ad Ronneby multis locis, ad

Carlskrona passim (C. A. W.); ins. Öland ad arcem prope Borgholm raro (C. A. W.); ins. Gotland locis paucis inter Irevik et Thorsburg (HÖGBERG, LINDSTRÖM); prov. Småland ad Tenhult et in silva ad Ingaryd (E. HEMBERG!); prov. Östergötland ad Mjölsefall sat frequens (E. v. GOËS!), in monte Omberg ad Alvastra frequens (C. A. W.); prov. Westergötland ad Dragsmark prope Göteborg (MALM); prov. Nerike ad Hjelmarsberg, Dylta bruk, Hamrarne par. Göthlunda et ad Skaleklint (HARTMAN); prov. Södermanland ad Rödkärr (E. HEMBERG!); circa Stockholm ad Kungshamn, Ängsvikarne et prope Lännersta ins. Wermdö (HARTMAN); prov. Upland (C. A. W.); prov. Westmanland in Fullerö et ad Klacken par. Norberg, frequens (C. H. JOHANSON!); in prov. Dalarne (teste clar. JOHANSON!); in Luleå Lappmark ad Qvickjock (BOHEMAN, WALLENBERG). In **Norvegia** ad Molde et ad Horgeim in Romsdalen (W. LILLJEBORG!) ad Christiania in Ladegaardsöen et in Malmöen frequens (C. M. POULSEN!).

7. PUPA ANTIVERTIGO DRAP.

Testa ovata, lævigata, splendida, castaneo-fulva; *anfr.* 5, planiusculi, penultimus convexior, ultimus antice tumidus, callo transverso cristatus, pone aperturam sulca parallela; *apertura* obliqua, subcordata, 7—dentata: dentibus parietalibus 2, columellaribus 3, palatal. 2, sublamelliformibus; *peristoma* margine dextro medio angulatim producto et impresso. Long. 2—2½, diam. 1½—1⅔ mm.

Pupa antivertigo Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 57. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 52. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 361. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 41. f. 33. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 28.

Vertigo antivertigo Michaud Complet. (1831) p. 72. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 407. t. 29. f. 4—7. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 253. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 70; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 59.

Vertigo septemdentata Rossmässler Iconogr. X (1839) p. 28. f. 647. Wallengren Anteckn. i Zool. (1856) p. 91.

b. **sexdentata** MONT., FLEM.: apertura dente superiore columellari evanescente.

c. **octodentata** HARTM., STUD.: apertura dentibus palatalibus 3.

d. **ferox** mh.: apertura 9—10 dentata: dentibus parietal. 2—3, columell. 3, palatal. 4, quorum 2 lamelliformibus, 2 minutis; *vel:* dentib. par. 3, columell. 2, palatal. 4—5.

— **seminulum** mh.: testa minima, ovalis; anfr. 4; apertura 5—6 dentata: 1—2 in par. aperturali, 2 in columella, 2 in palato; long. 1½, diam. 1 mm.

Hab. In **Suecia** in muscis humidis et inter vegetabilia putrida in ripis lacuum et fluviorum nec non in litoribus internis maris totius prov. Skåne; in prov. Blekinge ad Wesan, circa Ronneby passim frequens (ex. gr. Herrstorpsjön, Skärsjön, Tresjön, Lillsjön etc.); ins. Öland rarissime ad rivulum prope Tveta; ins. Gotland ad Tullträsk et Demberträsk in Fårö (LINDSTRÖM); prov. Småland ad Jönköping (O. NORDSTEDT!) et rara ad Tenhultssjön (E. HEMBERG!); prov. Östergötland in omnibus fere ripis lacuum (Dr Goës et ipse); prov. Westergötland in graminosis humidis $\frac{5}{4}$ milliar. succ. S.-O. ab oppid. Fahlköping, ex. gr. in pratis ad Gerum (K. AHLNER!); prov. Nerike loco unico inter Dylta bruk et Linnersta torp par. Axberg (HARTMAN); circa Stockholm passim, ex. gr. ad Clara sjö, lacum Trehörningen et Danvikstull (WIKSTRÖM), nec non ad Slätta träsk ins. Wermdön (HARTMAN); in prov. Upland ad Harg (G. EISEN!!); in prov. Westmanland et Dalarne (teste WALLENGREN); e prov. Jemtland ad NILSSON a prof. RETZIUS missa; in Luleå Lappmark summum ad Kurroweik invenit amic. E. HEMBERG. Quantum scio in provinciis maxime occidentalibus (Halland, Bohuslän et Wermland) nec in **Norvegia** nondum visa.

8. PUPA LILLJEBORGI WESTERL.

Testa ovata, splendida, lævis, fulvo-cornea, animale fœta rufo-nigra; *anfr.* 5, sat forte accrescentes, convexi, *sutura* profunda disjuncti, ultimus quam præcedens parum, penultimus quam tertius duplo latior, ultimus medio leviter depressus, pone aperturam tumidus, callo tenui integro transverso; *apertura* subpyriformis vel oblique cordata, 4—5 dentata: dente parietali 1 (interdum cum adjacente anteriori secundo punctiformi), dentibus columellaribus 2, inferiore minimo, sæpe defecto, palatalibus 2, altis, brevissimis, longe a peristomate remotis, antice fascia tenui rufobrunnea terminatis; *peristoma* margine dextro vix angulatim producto nec impresso, marginibus callo tenui junctis. Long. 2—2$\frac{1}{4}$, diam. 1—1$\frac{1}{4}$ (raro 1$\frac{1}{2}$) mm.

Vertigo moulinsiana Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 255 (ex spec. origin. ab auctore ipso missis!). Reeve Brit. Moll. (1863) p. 117 (descr. et syn., nec fig., quæ ex Moq.-Tand. cop.!). Nec P. moulinsiana Dup.!

Vertigo modesta Westerlund Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1865 p. 556; Malak. Blätt. XIII (1866) p. 45. Nec *V. modesta Say* in Long's sec. exped. App. II (1824) p. 259. t. 15. f. 5.

Vertigo lilljeborgi Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 60.

Pupa modesta Pfeiffer Monogr. Heliceor. VI (1868) p. 332.

Hab. In **Suecia** hanc speciem in prov. Blekinge in ripa meridionali lacus Tresjön prope Ronneby d. 23 Aug. 1865 inveni, postea fre-

quentem in ripis lacus Langasjö; in prov. Smaland ad Tenhultsjön cepit et misit amic. E. HEMBERG; in prov. Östergötland ad lacum prope Mjölsefall non parce (d:r Goës et ipse); in aggere molario ad Willingsberg prov. Nerike (HARTM. in litt.) nec non in palude ad Långhyttebruk par. Husby prov. Dalarne (C. G. ANDERSSON!!).

"Gegenwärtige Art hat in Aeussern (Form, Farbe, Grösse, Anfenthalt) so viel Aehnlichkeit mit *P. antivertigo* DRAP. (die an beinahe allen Ufern der hiesigen Seen vorkommt), dass ich beim ersten Anblick sie für eine junge Schnecke dieser Art hielt, bis die etwas verschiedene Farbe mich meine Entdeckung durch das Vergrösserungsglas zu untersuchen veranlasste. Dann trat die grosse Verschiedenheit dieser Arten gleich hervor und ich zweifelte keinen Augenblick, eine wenigstens der nördlichen Fauna neue Schnecke gefunden zu haben. Durch die gelblich, nicht röthlich braune, Farbe, die mehr gewölbten Umgänge, den starkeren Glanz, die Form des Nackens und der Mündung (bei *P. antivertigo* ist der Nacken wulstartig aufgetrieben, der Wulst aber oben durch einen strickformigen Eindruck abgeschnitten, die Furche zwischen dem Wulste und dem etwas zurückgebogenen Mundsaume tief und eng, die Mündung etwas herzförmig des bei dem oberen Zahne des Gaumens stark eingedrückten Aussenrandes wegen), durch keinen Eindruck des Mundsaumes, Anzahl und Form der Zähne (*P. antivertigo* hat 6—10 Zähne, die 2 auf dem Gaumen lang, faltenförmig und nahe zum Aussenrande gehend, vorzüglich der obere) unterscheidet sich unsere Art von jeder *P. antivertigo*, der einzigen Snecke dieses Landes, mit der das unbewaffnete Auge sie verwechseln kann, denn mit *P. alpestris* stimmt nur die Anzahl der Zähne überein, keineswegs die Form, die Grösse, die Farbe, die relative Breite der Umgänge, die Form der Zähne, der Aufenthalt u. s. w. In jeder Rücksicht scheint mir diese Art am meisten mit der in Frankreich und England vorkommenden *P. moulinsiana* DUP. verwandt zu sein, die auch "resembles *P. antivertigo* in Form and *P. pygmæa* in the number of teeth." - - - - - Doch sollen die 2 faltenförmigen dentes palatales bei *V. moulinsiana* bis an die Kante des Mundsaumes sich strechen, und dieses Kennzeichen ist genug, jeden Gedanken an zusammenwerfen dieser Formen zu vertreiben." (WESTERLUND in Malak. Blätt. l. c.).

Quand j'écrivais ces mots en 1866, je ne connaissais la *Pupa moulinsiana* tant anglais que français, que par des descriptions et des figures. J'ai depuis lors fait la connaissance du premier dans une collection très-intéressante de mollusques anglais, que je dois à l'obligeance de M. J. GWYN-JEFFREYS. Par là, je me vois à même de modifier la citation ci-dessus dans le point indiqué par la synonymie, savoir que la *P. moulinsiana* des anglais est identique à la *P. lilljeborgi* décrite plus haut, à l'exception qu'elle est un peu plus grande que cette dernière. Cette espèce diffère-t-elle, par contre, de la *P. moulinsiana* des français? Je n'ai pas le bonheur de pouvoir dans ce cas aussi baser ma réponse sur l'étude d'exemplaires authentiques; mais à en juger d'après la description et les figures de M:r MOQ.-TANDON, avec lesquelles les figures de Lovell Reeve présentent une conformité parfaite, il ne peut exister aucun doute à cet égard. L'espèce française est beaucoup plus grande ("hauteur $2\frac{1}{2}$—3 mm., diam. $1\frac{3}{4}$—2 mm."), beaucoup plus ventrue, avec des tours de spire moins convexes: "Les deux plis palataux arrivent jusqu'au péristome, le bord

extérieur du péristome est épais et semble double, et il présente un angle rentrant assez prononcé, qui correspond au pli palatal supérieur."

Dans l'appendice à sa Synopsis Moll. Dan. O. MÖRCH donne la "*Pupa charpentieri* SH. (*P. moulinsiana* DUP. = *P. ventrosa* HEYNEM.)" comme une nouveauté pour la faune danoise. J'ai eu le plaisir de recevoir de M. le Conseiller de justice, Dr POULSEN, qui l'a découverte, un *grand nombre* d'exemplaires de cette coquille, qu'il trouva en automne 1866 dans les angles de feuilles de *Carex paniculata* L. au bord du lac de Veile pres de la gare de Holte, île de Sélande. Quoique ma connaissance de *P. moulinsiana* DUP. soit incomplète comme exclusivement fondée sur MOQ.-TANDON, mais en admettant, que sa description et ses figures sont exactes, je crois devoir regarder, la forme danoise comme différent de la précédente. Je vais ici décrire cette forme avec toute l'exactitude possible, ce qui permettra facilement aux personnes connaissants mieux que moi la *P. moulinsiana*, de décider les rapports qui existent entre elles:

Pupa (*ventrosa* HEYNEMANN, ex spec. origin. ab auctore ipso!): *testa* dextrorsa, subperforata, tenuis, lævigata, nitida, pellucida, rufo-cornea, ovata, spira conica, obtusiuscula; *anfr.* 5—5½ convexi, *sutura* profunda, antice ascendente sejuncti, ultimus antepenultimo subæqualis, hic præcedente duplo fere latior, ultimus pone aperturam callo transversali sat valido, albido vel concolore, extus impressus, scrobiculatus; *apertura* oblique subcordata, dentibus et plicis 4—8 albis minuta; plica 1 parietali alta et longa, sæpe cum adjacente secunda dentiformi, 1 columellari, subconico, 2 palatalibus profundis, dentiformibus, sæpe denticulis 2 in angulo infra dentem columellarem extenso exeuntibus; *peristoma* patulum, marginibus sejunctis, dextro supra medium angulatim producto et extus impresso; long. 2¾—3, late 1¾—2 mm.

En comparant cette description avec celle donné par. MOQ.-TANDON de la *P. moulinsiana*, on trouvera des différences sensibles, surtout par rapport au nombre, a la grandeur relative et à la forme des tours de spire, à la forme de l'ouverture, au nombre des dents et à la position des dents palatales, outre que MOQ.-TANDON ne dit pas un mot de la lèvre forte et longue avec laquelle ces dernieres adhèrent.

9. PUPA SUBSTRIATA JEFFR.

Testa breviter ovata, costulato-striata, nitidula, flavido-fusca; *anfr.* 4½, convexi, ultimus latiusculus, antice sulculis 2 parallelis, pone aperturam callo rubro medio abrupto transverso; *apertura* oblique subpyriformis, 6 dentata: dentibus 2 parietalibus, 2 columellaribus, 2 palatalibus plicæformibus; *peristoma* margine dextro sinuoso, supra medium extus impresso. Long. 2, diam. 1⅓ mm.

Alæa substriata Jeffreys Trans. Linn. Soc. (1830) vol. XVI. p. 515.

Pupa substriata Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 363. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 125. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 28.

Vertigo substriata Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 261. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 71; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 58.

— **monas** mh.: testa minutissima, ovalis, obscura; anfr. 4½; long. 1½, diam. 1—1¼ mm.

Hab. In **Suecia** per provinciam quam maxime meridionalem, Skåne, late distributa, vix umquam frustra inter folia putrida et humida in silvis frondosis quæritur; in prov. Blekinge circa Ronneby ubique, in ripis lacus Bastasjön (C. A. W.), ad Kärrtorp (J. ANKARCRONA!!), ad Sölvesborg (C. O. v. PORATH); prov. Småland ad Tenhult, Ljungarp et in silva ad Ingaryd (E. HEMBERG!!); ins. Öland ad arcem prope Borgholm et ad Tveta (C. A. W.); ins. Gotland ad Thorsburg, Trullträsk par. Fleringe et in Stora Carlsön (LINDSTRÖM); prov. Westergötland ad Utterbäck, in silva juxta Dragsmark, in Levgrens park, ad Wejery et Bärby (MALM), in monte Mösseberg (O. NORDSTEDT et ipse), in lateribus montium Gerums- et Dverstorps-bergen (K. AHLNER!); prov. Östergötland ad Alvastra in monte Omberg (EISEN!); prov. Nerike ad Örebro multis locis, nec non in parte occidentali et meridionali (HARTMAN); prov. Södermanland in Gredby äng et ad Lidökna (HEMBERG!); circa Stockholm ad Kungshamn in Sicklaön, inter Tollarö et Lännersta in Wermdön (HARTMAN); prov. Upland ad Upsala (C. H. JOHANSON!); prov. Dalarne ad Säther (C. G. ANDERSSON!!). — *monas* in prov. Blekinge ad Ronneby et in prov. Westergötland in monte Mösseberg inveni. In **Norvegia** ad Molde (c. 68° l. bor.) prof. LILLJEBORG hanc testam invenit.

10. PUPA PYGMÆA DRAP.

Testa cylindraceo-ovata, nitidula, lævigata, castaneo-rufa; *anfr.* 5, convexi, ultimus medio impressus, antice tumidus, callo rubro transverso, pone aperturam paralleli-sulcatus; *sutura* inferne vix ascendens; *apertura* semi-ovata, 5 dentata: dente parietali 1, dentibus columellaribus 2 (inferiore minimo), palatalibus 2 (interdum 3, superiore punctiformi), rufis, plicæformibus, e callo vel labio rufo valido exeuntibus; *peristoma* marginibus callo tenui junctis, margine dextro vix impresso, superne forte curvato, columellari arcuato. Long. $1\frac{1}{2}$—2, diam. 1 mm.

Pupa pygmæa Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 57. Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 53. Pfeiffer pr. p. Monogr. Heliceor. II (1848) p. 362. Nord. et Nyl. pr. p. Finl. Moll. (1856) p. 42. Mörch Syn. Moll. Dan (1864) p. 28.

Vertigo pygmæa Rossmässler Iconogr. X (1839) p. 29. f. 648. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 405. t. 28. f. 37—42. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 257. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 72; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 61.

b. **quadridens** mh.: apertura dentibus 4, dente columellari infimo defecto.

c. **athesina** GREDLER: apertura dentibus 6, dent. palatalibus 3.

Hab. In **Suecia** hæc species late destributa, sed ubique rara. In prov. Skåne ad Lund, Malmö etc.; prov. Blekinge ad Ronneby locis paucis (Pehrsborg, Snäckbacken, Fridhem etc.); ins. Öland ad arcem prope Borgholm, ad Tveta et in Ismantorpsborg (C. A. W.); ins. Gotland ad Kopparsvik, Lindeklint, Löjsta, Östergarn et in Snäckgärdet (LINDSTRÖM); prov. Småland ad Tenhult (E. HEMBERG!) et ad Rottne par. Söraby (J. LINDAHL!); prov. Östergötland ad Lunna in horto frequens, ad Mjölsefall (d:r Goës!), in ripa lacus Tåkern, ad Norrköping etc. (C. A. W.), in horto ad Djurkälla (R. LUNDBERGH!); prov. Nerike tantum in regionibus calcareis, ex. gr. ad Lanna par. Hidinge, Qvinnerstatorp et Dylta par. Axberg, Kofsta par. Glanshammar et Åhlsta par. Hallsberg (HARTMAN); prov. Upland ad Upsala passim (LILLJEBORG!) et ad Harg (G. EISEN!!); prov. Westmanland ad Westerås (C. H. JOHANSON!). c. *athes.* ad Harg prov. Upland (EISEN!!). In **Norvegia** ad Fredrikshald legit prof. LILLJEBORG.

11. PUPA RONNEBYENSIS nov. spec.

Testa profunde perforata, oblongo-ovata, regulariter striatula, nitidissima, rufo-brunnea; *anfr.* $5\frac{1}{2}$, convexi, ultimus penultimo subæqualis, hic $\frac{1}{3}$ latior quam tertius, qui duplo latior secundo; *sutura* valde declivis, antice ad peristoma ascendens, qua causa anfractus penultimus, a latere visus, postice multo latior; *apertura* oblique subpyriformis, pariete aperturali forte declivi, 4 dentata: dente parietali 1, lamelliformi, columellari 1, conico, ad partem inferiorem cristæ prominentis obscuræ, palatalibus 2, brevibus, lamelliformibus, longe discretis; *peristoma* marginibus callo tenui junctis, margine columellari late reflexo, exteriore expansiusculo, supra medium vix producto, extus callo transverso, testæ concolore. Long. $2\frac{1}{3}$—$2\frac{1}{2}$, diam. $1\frac{1}{3}$—$1\frac{1}{2}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc formam sub foliis putridis silvæ fagineæ ad Pehrsborg prope Ronneby prov. Blekinge a. 1867 inveni.

Cette espèce se rapproche de *P. alpestris* par sa ouverture munie de 4 dents, mais elle s'en distingue considérablement par sa coquille de couleur foncée, oblongue-ovoïde et sensiblement plus grande (presque aussi grande que celle d'une *P. edentula* à 6 tours de spire), ses dents palatales courtes et hautes, la forme différente de la ouverture, la suture moins elevée près du péristome. Elle se rapproche davantage de *P. pineticola*, mais celle-ci n'a qu'une seule dent, savoir à la marge de la columelle, sans le moindre indice d'autres dents, et la suture est beaucoup plus oblique, la spire plus longue, le bord columellaire fortement reflechi etc.

12. PUPA ALPESTRIS ALDER.

Testa cylindracea, nitida, pellucida, subtiliter sed regulariter striatula, lutescenti-cornea; *anfr.* 5, convexi, *sutura* profunda, pone aperturam valde ascendente, separati; *apertura* semiovalis, 4 dentata: dente parietali 1, compresso, lamelliformi, columellari 1 acuto, palatalibus 2, lamelliformibus, præsertim inferiori, eburneis; *peristoma* album, marginibus callo tenui junctis, margine dextro subsinuato, brevissime expanso, superne forte arcuato, columellari curvato. Long. $2\frac{1}{4}$, diam. $1\frac{1}{5}$ mm.

Vertigo alpestris Alder Trans. Nat. Hist. Soc. Northumb. II (1830) p. 340. Jeffreys Brit. Conch. I (182) p. 259. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 73; Coll. Typ. Moll. Su. (4868) n:o 62.

Pupa pygmæa Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 53. Friele pr. p. Norske Moll. (1853) p. 22.

Pupa pygmæa var. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 363; VI (1868) p. 334. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1854) p. 125.

Pupa shuttleworthiana Gredler in Verh. des Zool.-bot. Ver. in Wien 1856 p. 128. v. Wallenberg Malak. Bl. V (1858) p. 91. f. Hartman Nerikes Moll. (1864) p. 7. Nylander Bidrag till Finl. Naturk. III. p. 135.

b. **mitis** mh.: apertura *bidentata:* dente 1 in pariete aperturali et 1 in columella; vel apertura *tridentata:* dente 1 parietali, 1 columellari et 1 in infera parte palati; long. 2, diam. $1\frac{1}{5}$ mm.

Hab. In **Suecia** hæc species per totum regnum distributa, usque in Lapponiam superiorem (ad Qvickjock, 67—68° l. bor. legit v. WALLENBERG), plerisque locis copiose vel copiosissime. b. *bid.* ad Ronneby prov. Blekinge inveni, ab Öfvedskloster prov. Skåne misit amic. L. P. HOLMSTRÖM, ad Westerås prov. Westmanland cepit clar. C. H. JOHANSON!; b. *trid.* ad Öfvedskloster prov. Skåne invenit HOLMSTRÖM et circa Stockholm in petris muscosis multis locis in convallibus ad Kungshamn, nec non in Stora Ängsviken ins. Wermdön legit clariss. HARTMAN. In **Norvegia** invenit FRIELE.

Cette espèce, parfaitement distincte de *P. pygmæa*, se reconnaît facilement à ses dimensions souvent beaucoup plus considérables, à sa forme presque cylindrique, son lustre brillant, sa couleur ordinairement claire, sa coquille mince et transparente, ses stries fines, mais marquées et régulières, ses dents d'un blanc d'ivoire, dont les deux appartenant à la marge extérieur sont séparées et non, comme chez la *P. pygmæa*, sortant d'un callus rouge épais, ou d'une lèvre, correspondante au bourrelet rouge proéminent placé derrière le péristome sur le côté extérieur de la coquille, que l'on trouve chez *P. pygmæa*, mais qui manque aussi dans la précédente.

13. PUPA SHUTTLEWORTHIANA Charp.

Testa ovata, nitidula, pellucida, cornea, striatula; *anfr.* 5, vix convexiusculi vel planulati, *sutura* levi, pone aperturam vix conspicue ascendente, conjuncti; *spira* sensim attenuata, obtusissima; *apertura* subsemiovalis vel oblique subpyriformis, quadridentata: dente 1 compresso, intrante in pariete aperturali, columellari 1 acuto, palatalibus 2, brevibus, sæpe minimis, punctiformibus; *peristoma* marginibus callo junctis, margine dextro medio angulatim producto, breviter expanso, superne forte arcuato, columellari strictiusculo. Long. 2, diam. $1\frac{1}{3}$ mm.

Pupa shuttleworthiana Charpentier msc. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 355. Küster Conch. Cab. tab. 16. f. 36.

Hab. In **Suecia** hanc, me judice, a P. alpestri bene distinctam, speciem solummodo sed sat frequentem in silva prope rivulum ad Belteberga prov. Skåne a. 1870 inveni.

14. PUPA OVOIDEA nov. sp.

Testa ovata, ventricosa, medio latissima, striatula, nitidula, pellucida, corneo-lutea; *anfr.* 5, convexi, ultimus a latere visus multo brevior ac vix latior penultimo, tumido; anfractus superi forte accrescentes, spira adeoque late conica; *sutura* profunda, superne forte declivis, pone aperturam vix ascendens, qua causa anfr. penultimus a latere visus antice et postice æqualis; *apertura* semiovata-rotundata, denticulis 3 coarctata: 1 parietali, 1 columellari, 1 palatali, profundo, omnibus minutis, brevibus, tuberculiformibus; paries aperturalis vix declivis; *peristoma* simplex, acutum, marginibus callo tenui junctis, columellari superne reflexiusculo. Long. 2, diam. $1\frac{1}{4}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc formam insignem ad Tenhult jurisdictionis Tveta, præfect. Jönköping, prov. Småland loco montoso et silvoso a. 1867 invenit et mecum communicavit amic. E. Hemberg.

15. PUPA ARCTICA Wallenb.

Testa dextrorsa, rimata, ovata, tenuis, sublævigata, nitidula, pellucida, fulvo-fusca; *anfr.* 5—$5\frac{1}{2}$, convexi, ultimus $\frac{2}{5}$ altitudinis fere æquans, basi rotundatus, antice tumide suberistatus; *sutura* profunda, antice ascendens; *apertura* parum obliqua semiovata vel pyriformis, dentibus tribus angustata, singulis: in medio pariete aperturali, in columella, minimoque in

palato (plerumque deficiente); *peristoma* patulum, vix labiatum, marginibus callo junctis, dextro supra valde curvato, columellari subdilatato, patente. Long. $2\frac{1}{2}$, diam. $1—1\frac{1}{2}$ mm.

? *Pupa hoppei* Möller Ind. Moll. Grœnl. (1842) p. 4. Pfeiffer Monogr. Heliceor. I (1848) p. 328; III (1853) p. 536. O. Mörch On the land and freshw. Moll. of Greenland in Amer. Journ. of Conch. 1868. I.

Pupa arctica v. Wallenberg Malak. Blätt. V (1858) p. 99. f. 3. Nylander Bidr. till Finl. Naturk. III. p. 134.

Vertigo arctica Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 73.

? *Pupa tirolensis* Gredler Verh. zool.-bot. Gesellsch. in Wien, 1869, XIX 6, 4 h., p. 912.

Hab. In **Suecia** sub lapidibus et inter vegetabilia putrida prope Qvickjock in Luleå Lappmark a. 1858 invenit clar. v. WALLENBERG; testam et in Malå Kapell et in regione betulina superiore ad Arjeploug vulgarem a. 1870 legit amic. HEMBERG; in prov. Herjedalen in Helagsfjellet, in Öfra Ljusnedalen et in Funnäsdalsberget a. 1866 cepit et misit clar. F. SÖDERLUND; nec non descendit usque in prov. Småland, ubi ad Tenhult a. 1867 invenit HEMBERG et ex. misit.

16. PUPA PINETICOLA nov. sp.

Testa rimata, ovata-cylindracea, nitida, minutissime striata, cornea vel fusco-fulva; *anfr.* 5, convexi, sensim accrescentes, ultimus penultimo subæqualis, hic tertio, secundo duplo latiore, $\frac{1}{3}$ latior, spira elongata, sensim attenuata, obtusa; *sutura* profunda, minime declivis, subhorizontalis, ad aperturam vix ascendens, adeoque anfractus penultimus a latere visus antice et postice æqualis et ultimus margine inferiore parum obliquus; *apertura* oblique pyriformis, pariete aperturali forte declivi, dente columellari conico 1, ad partem inferiorem cristæ prominentis profundæ, de cetero omnibus vestigiis dentium carens; *peristoma* undique expansiusculum, marginibus disjunctis, dextro supra medium vix angulatim producto. Long. $2\frac{1}{3}—2\frac{1}{2}$, diam. $1\frac{1}{2}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc testam ad Tenhult prov. Småland loco montoso et arboribus obtecto a. 1867 invenit et mecum benigne communicavit amic. E. HEMBERG.

17 PUPA GENESII GREDLER.

Testa subperforata, ovata, lævigata, nitida, corneo-rufa (purpureo-cornea: Gr.), spira sensim attenuata, apice obtusa; *sutura* profunda, pone

aperturam parum ascendens; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—5, convexi, sat forte accrescentes, penultimus subventrosus, ultimus antice sine vestigio cristæ vel calli, basi a latere visus constrictus; *apertura* oblique subpyriformis vel subsemicircularis, edentula; *peristoma* rectum, acutum, subsimplex (incrassatum Gr.), margine dextro superne arcuato. Long. $1\frac{7}{8}$, diam. 1 mm.

Pupa genesii Gredler Tirols Land- u. Süssw. Conchylien in Verh. des zool.-bot. Verein. in Wien 1856 p. 122. f. 3. (Exempl. origin. e loco hucusque unico bei Botzen ad 5000′ s. m. benigne communicavit celeberr. auctor). Pfeiffer Monogr. Heliceor. IV (1859) p. 662.

Hab. In **Suecia** in prov. Westergötland invenit clar. E. LINNARSSON. Ex. 3, quæ descriptionis causa mihi benigne misit prof. LILLJEBORG, in Museo Univ. Upsaliensis asservantur.

2. *Vertilla* MOQ.-TANDON. *Testa* sinistrorsa.

18. PUPA PUSILLA MÜLL.

Testa ovalis, nitida, subtilissime striatula, pellucida, corneo-lutea; *spira* sensim attenuata, obtusiuscula; *anfr.* 5—$5\frac{1}{2}$, convexi, *sutura* profunda disjuncti, ultimus latere impressus, sulcis 2 longitudinalibus; *apertura* semiovalis, 6—8 dentata: dentibus 2 parietalibus, lamelliformibus, 2—4 columellaribus, obtusis, inferioribus minimis, 2 palatalibus, e callo transverso exeuntibus; *peristoma* tenue, vix reflexiusculum, margine exteriore superne leviter curvato, medio angulatim subproducto. Long. 2—$2\frac{1}{3}$, diam. $1\frac{1}{4}$—$1\frac{1}{2}$ mm.

Vertigo pusilla Müller Verm. Hist. II (1774) p. 124. Rossmässler Iconogr. X (1839) p. 29. f. 649. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 409. t. 29. f. 12—14. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 263. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 74; Coll. Typ. Moll. (1868) n:o 63.

Pupa vertigo Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 57. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 53.

Pupa pusilla Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 44. f. 36. E. v. Martens Binnenmoll. Norweg. in Malak. Blätt. III (1857) p. 96. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 29.

Hab. In **Suecia** hæc testa plus minus frequenter occurrit per partes meridionales et medias saltem usque in prov. Westmanland. In **Norvegia** ad Bergen invenit prof. SARS (teste v. MARTENS), frequentem ad Christiania in Ladegaardsöen et in Malmöen cepit celeberr. POULSEN.

19. PUPA ANGUSTIOR JEFFR.

Testa ovata, subrimata, nitidula, fusco-cornea, striata; *spira* superne conica, obtusa; *anfr.* $5\frac{1}{2}$—6, convexiusculi, *sutura* profundiuscula disjuncti,

ultimus basi compresso-gibbus, latere sulco profundo longitudinali; *apertura* parva, subcordato-triangularis, 4 dentata: dentibus 2 parietalibus, sinistro lamelliformi, 1 columellari, obliquo, lamellæ Clausiliarum inferæ simili, 1 plicæformi, elongato palatali; *peristoma* reflexiusculum, margine sinistro angulatim producto. Long. $1\frac{7}{8}$, diam. $\frac{7}{8}$ mm.

Vertigo angustior Jeffreys Trans. Linn. Soc. vol. XVI (1830) p. 361; Brit. Conch. 1 (1862) p. 265. Westerlund Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1865 p. 530; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 64.

Vertigo venetzii Rossmässler X (1839) p. 30. f. 650. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 74.

Pupa venetzii Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 364. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1853) p. 152.

Vertigo plicata Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 408. t. 29. f. 8—11.

Pupa angustior Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 29.

Hab. In **Suecia** hanc speciem ad Böke par. Söderakra prov. Smaland a. 1853 inveni, nec non a. 1865 pluribus locis ins. Öland, ex. gr. ad Borgholm, Tveta, Ismantorpsborg etc., passim frequens, et anno 1866 non raro ad Bellevüe prope Carlshamn, prov. Blekinge; in Werkö juxta Carlskrona unicum ex. legit nob. J. ANKARCRONA; in ins. Gotland ad Hallbros, Kopparsvik, Galgberget et Trullträsk invenit clar. Lindström; etiam in prov. Bohuslän ad Christineberg inventa, teste celeberr. LILLJEBORG.

20. PUPA TUMIDA WESTERL.

Testa ventricoso-ovata, vix striatula, obscure fulva; *spira* superne conica, brevis, obtusiuscula; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—5, convexiusculi, ultimus in medio basi depressiusculus; *apertura* late sed inæqualiter (lobo sinistro minori) cordata (margo exterior basis), 6-dentata: dentibus 2 parietalibus, compressis, 2 columellaribus, superiori conico, recto, inferiore minore, sursum verso, palatalibus 2, e callo transverso exeuntibus; inter dentes columellares et palatales tubercula 2; margo exterior *peristomatis* simplex, tenuis, superne forte et valde curvatus, medio angulatim productus, columellaris reflexus; testa pone marginem aperturæ extus callo rufo-brunneo, elevato, sed angusto cincta. Long. $1\frac{7}{8}$, diam. $1\frac{1}{8}$ mm.

Vertigo tumida Westerlund in Malak. Blätt. XIV (1867) p. 203.

Pupa tumida Pfeiffer Monogr. Heliceor. VI (1868) p. 336.

Hab. In **Suecia** inter folia putrida et humida in silva faginea ad Pehrsborg prope Ronneby prov. Blekinge, nec non infra arcem ad Borgholm ins. Öland hanc formam inveni.

"Diese kleine Vertigo ist unzweifelhaft mit *P. pusilla* nahe verwandt, aber unterscheidet sich besonders dadurch, dass sie ausgewachsen viel kleiner ist, aber dicker; dass ihre Gestalt bauchig ist und stumpf (*P. pus.* hat das Gehäus länglich-eiformig und das Gewinde allmählig verengert); dass die Mündung von einer andern Gestalt ist (*P. pus.* hat die Mündung halb eirund, nach unten zu angezogen und desswegen die Zähne mehr zusammengedrängt); dass die Farbe dunkler ist und der Nabelspalt fast unmerklich. Von *P. angustior* ist sie noch weit mehr verschieden durch die bauchige Gestalt, welche dem nicht längeren Gehäuse ein grösseres Aussehen giebt, durch das fast glatte (nicht fein rippenartig gestreifete) Gehäus, durch die Zahl der Zähne im Schlunde und eine andere Gestalt dieser Zähne, endlich durch den Mangel der stark vertieften Längsfurche in der Mitte des Nackens, welche Furche bei *P. angustior* den letzten Umgang fast in zwei Stücke theilt." (Westerl. Malak. Blätt. l. c.).

21. PUPA COLLINA nov. sp.

Testa rimata, ovata, striatula, cornea; *spira* subconica, brevis, obtusiuscula; *anfr.* $5\frac{1}{2}$, planiusculi, *sutura* levi, ad aperturam non descendente, conjuncti, ultimus antice medio impressiusculus, a latere visus margine inferiore forte declivo; *apertura* oblique subcordata, dentibus palatalibus duabus lamelliformibus parallelis, marginem non attingentibus; *peristoma* simplex, rectum, margine exteriore circulos duos sat curvatos formante, in pariete aperturali callo sat valido cum columellari conjuncto. Long. 2, diam. $1\frac{1}{8}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc testam inter folia putrida in silva faginea ad Pehrsborg prope Ronneby prov. Blekinge d. 16 Juli 1870 raram inveni.

22. PUPA OTOSTOMA nov sp.

Testa late rimata, cylindrica, nitida, striatula, fulvo-brunnea, apice obtusiuscula; *anfr.* $6\frac{1}{2}$—7, convexi, tarde accrescentes, ultimus præcedenti multo latior, antice sulcis duobus longitudinalibus, colore pallidis, penultimus et antepenultimus subæquales; *sutura* profunda, ad aperturam non ascendens; *apertura* parva, auriformis, pariete aperturali valde obliquo, lamellis vel plicis palatalibus tribus, longitudinalibus, humilibus, albis, quarum duæ superæ longæ, inferior brevissima, ornata; *peristoma* margine columellari levissime S-formi, brevi, circulo perbrevi cum margine exteriore elongato, supra medium angulatim producto, non impresso, superne valde curvato, juncto; marginibus non callo parietali junctis. Long. $2\frac{2}{3}$, diam. $1\frac{1}{3}$ mm.

Hab. Hanc habitu et characteribus optimis egregiam speciem mensi Octobre a. 1868 ad Tenhult in prov. Smaland **Sueciæ** detexit et mecum communicavit amic. E. HEMBERG. Locus specialis est: Augustenborg, collis præceps contra viam ad prædium Tenhult, $1\frac{1}{2}$ mill. suec. ab urbe Jönköping, meridiem versus, quo loco testa cum *P. pineticola*, *ovoidea*, *arctica* et aliis hujus generis, ramulis et foliis dejectis affixa, obvenit.

Gen. ALLOGLOSSA LINDSTRÖM.

Animal quoad partes exteriores attinet Pupis simile, *cochlea* subgen. Torquillarum (*testa* oblongo-ovata vel fusiformi-turrita, apice acuminata, *anfr.* 7—11, *apertura* oblongo-ovali, sæpius multiplicosa, peristomate expanso). *Uncini* vero membranæ ut dicitur lingualis a typo Heliceo valde discrepantes: uncinus medius uncinis lateralibus primi ordinis minor, basi producta æquilatera, capite brevi, lata, cuspide unica vel pluribus usque ad quattuor; mandibulum marginibus rectilineis, infra regulariter surrectis, partes laterales latæ. (LINDSTR.).

1. ALLOGLOSSA AVENACEA (BRUG.).

Testa fusiformi-conica, substriata, jam saturate, jam pallide brunnea; *anfr.* 7—8; *apertura* oblonga, 7-plicata: plica maxima angulari, parietali 1 profunda, columellaribus 2, palatalibus 3, marginem non attingentibus. Long. 7, diam. $2\frac{1}{2}$ mm.

Bulimus avenaceus Bruguiére Encycl. meth. I (1789) p. 355.

Pupa avena Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 64. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 82 (descr. falsa!) f. 36; V (1837) p. 13. f. 319. Högberg Vet. Akad. Handl. 1841, p. 211 (descr. falsa!).

Pupa avenacea Pfeiffer Monogr, II (1848) p. 347. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 357. t. 25. f. 33, t. 26. f. 1—4. O. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 27. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 64.

Alloglossa avenacea Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 18. t. 1. f. 11 et 13 (fig. anat.). Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 52.

— **hordeum** STUD.: testa sublævigata, plicis palatalibus semper 2; long. 5, diam. 2 mm.

— **subcereana** mh.: apertura 8-plicata: plica maxima angulari, parietali 1 profunda, columellaribus 2, palatalibus 4, subæqualibus, marginem non attingentibus; long. $7\frac{1}{2}$—8, diam. $2\frac{1}{2}$ mm.

Hab. In **Suecia** hæc testa primum in ins. Gotland a clar. HÖGBERG detecta, sub lapidibus calcareis totius insulæ frequenter occurrit, nec

non in ins. Öland per maximam insulæ partem locis æqualibus vulgaris; in prov. Östergötland in monte Omberg inveni et in monte Kinnekulle prov. Westergötland obvenit, teste prof. S. LOVÉN.

B. *Orificia org. gen. externa discreta, in fundo sulci.*

Fam. SUCCINIDÆ.

Maxilla postice lamina magna subquadrata expansa, acie media producta. *Testa* tenuis, oblonga, apertura magna, sæpe maxima, longitudinalis, peristomate simplice, recto.

Gen. SUCCINEA DRAPARNAUD.

Testa imperforata, oblonga, plus minus pellucida, spira porrecta; *anfr.* 3—4, ultimus magnus, rotundatus; *apertura* ovalis.

1. *Neritostoma. Maxilla* subtridentata, dente mediano validissimo, conico.

1. SUCCINEA PUTRIS LIN.

Testa oblongo-ovalis, tenuis, rugoso-striatula, succinea vel straminea; *spira* conica, acutiuscula; *anfr.* 3—3½, supremi convexiusculi, ultimus inflatus, ventricosus; *sutura* lævis, juxta aperturam subito descendens. *Animal* albidum, supra plus minus cœruleum. Long. 15—17, diam. 7—9 mm.; apert. 11—12 mm. longa, 7 mm. lata.

Helix putris Linné Syst. Nat. X (1758) p. 774; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 531; Syst. Nat. XII (1767) p. 1249.

Helix succinea Müller Verm. Hist. II (1774) p. 97.

Succinea amphibea Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 58. t. 3. f. 22, 23. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 41. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 91. f. 45. Friele Norske Moll. (1853) p. 27.

Succinea putris Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 9. f. 2. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 151. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 32. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 31; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 12. Lindström Gotl. Moll. (1868) t. 2. f. 4 (maxilla), 9 (radula).

— **maxima,** rubella PFR.: long. 19—21, diam. 11—12 mm.

— **trianfractu** DA COSTA: testa late ovalis, lævis, cinereo-fulva; spira brevis, obtusa; sutura profunda; long. 15—16, diam. 9—10 mm.; apert. 11 mm. longa, 6 mm. lata.

Hab. In **Suecia** a parte meridionali prov. Skåne hæc testa frequenter occurrit usque in Westerbotten (ad Sävast invenit clar. v. WALLENBERG) et Luleå Lappmark, ad Qvickjock, teste prof. BOHEMAN (Öfvers. 1844). — *maxima*, forma gigantea, ad 27 mm. longa, ponderosa, elongata, spira acutiori et parietalibus anfractuum subrectis ad Kopparviksdam ins. Gotland a clar. G. LINDSTRÖM, non tamen viva, inventa. — *trianfr.* ad Ronneby prov. Blekinge. In **Norvegia** passim ad Christiania (FRIELE, POULSEN! JENSEN!), rara ad Bergen et a prof. SARS ad Trondhjemsfjorden, teste celeberr. E. v. MARTENS, capta; ad Altenfjord sub 70° lat. bor. testam invenit amic. J. E. ZETTERSTEDT.

SUCCINEA * TEMPORALIS mh.

Testa elongata, subhyalina, pallida flavo-virescens, tenuissima, fragilissima, intus margaritacea, striatula; *spira* producta, acuta; *anfr.* 4, vix convexi, ultimus juxta suturam planulatus; apertura elongato-ovata, superne acutiuscula; *sutura* subcapillata, antice non descendens, brevius productus, adeoque margo exterior superne rectus et altius in anfractu penultimo affixus. *Animal* aterrimum, subtus in cœruleum vergens. Long. 16—17, diam. 8—9 mm., apert. 11—12 mm. longa.

Hab. In **Suecia** in litore lacus Herrstorpsjön prov. Blekinge.

2. *Amphibina* (HARTM.) MÖRCH. *Maxilla* medio dente prominulo, obtuso.

2. SUCCINEA PFEIFFERI ROSSM.

Testa elongata, solidula, striatula, succinea, intus sæpius margaritacea; *spira* brevis, conica; *anfr.* 3, vix convexi, ultimus utrinque attenuatus; *sutura* superficialis, lente descendens; *apertura* ovato-elongata. Long. 12 mm., diam. 6—7 mm.; apert. 8—9 mm. longa, medio 5 mm. lata.

Succinea amphibœa β Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 41. Friele Norske Moll. (1853) p. 27.

Succinea pfeifferi Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 92. f. 46 (fig. dextra suturâ mala!). Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 514. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1853) p. 132. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 10. f. 3. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 59. t. 7. f. 8—31. O. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 53. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 32. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 20. t. 1 (fig. anat.).

? *Succinea elegans* Risso Moll. Alp. Marit. IV (1826) p. 59.

Succinea elegans Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 153. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 43. Westerlund Öfv. af K. Vet. Akad. Förh. 1865 p. 544; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 13.

Forma typica: spira brevissima; long. 12, diam. 6 mm.; apert. $8\frac{1}{2}$ mm. longa, medio 5 mm. lata.

— **elongata** HARTM.: spira elongata, acuminata; long. 15—16, diam. 7—8 mm.; apert. 10 mm. longa, medio 6 mm. lata.

— **contorta** mh.: testa oblonga, solida, striata, succinea, intus sæpe margaritacea; spira elongata, acuminata, apice rosea; anfr. $3\frac{1}{2}$—4, valde contorti, supremi convexi, sutura profunda sæparati, ultimus elongatus, juxta suturam forte descendentem planulatus; apertura elongato-ovata; long. 12—16, diam. 6—7 mm.; apert. 7—8 mm. longa, medio 5 mm. lata.

— **ochracea** DE BETTA: testa ovata, solida, nitida, rugoso-striatula, ochracea vel sordide succinea, ad fusco-rufa; spira brevis, acuminata; anfr. convexi, sutura lente descendente separati; apert. subrotundato-ovata, superne angulata; long. 12—15, diam. $6—7\frac{1}{2}$ mm.; apert. 7—9 mm. longa, 5—6 mm. lata. S. ochracea Pfeiffer Monogr. III. p. 623. Gredler Tirols Conch. p. 11. — Sub nomine »S. caucasicæ Beyer» clar. Jickeli formam e monte Caucasus, nostræ omnino congruentem, misit.

— **intermedia** BEAN: testa acuminato-ovalis, flavescens; spira prominens, rosea; sutura impressa, descendens; long. 9, diam. 5 mm.; apert. 6 mm. longa, 3 mm. lata.

Hab. In **Suecia** forma *typica* Rossmässleri rarissima, loco unico (in litor. lacus Svinösjön prov. Dalarne: C. G. ANDERSSON!!) inventa; forma *elongata* per provincias meridionales et medias, saltim in prov. Dalarne usque, distributa, multis locis præcedente multo frequentior. — *cont.* in ripis fere omnium lacuum prov. Blekinge frequentem inveni. — *ochr.* frequens et sola in ripa lacus Tåkern prov. Östergötland (C. A. W.), nec non ad Träskhedarne par. Bunge ins. Gotland (LINDSTRÖM). — *intermed.* in rivulo ad Kohlstad prope Borgholm ins. Öland non rara (C. A. W.). In **Norvegia** forma elongata cum *S. putridi.*

†† *Spira turrita.*

3. SUCCINEA OBLONGA DRAP.

Testa oblongo-ovata, tenuis, diaphana, striata, fusco-virescens vel virenti-lutescens; *spira* subelongata, acutiuscula, contorta; *anfr.* 3—4, ventrosi, celeriter accrescentes, *sutura* subprofunda disjuncti: *apertura* ovalis,

superne plus minusve angulosa. *Animal* albidum vel albido-griseum, vertice et pallio griseo-punctatum; *Uncini radulæ* later. sec. ord. basi producta quam cuspides subæquales dupplo triplove longiore. Long. 7—10, diam. 4—5 mm.; apert. 4—5 mm. longa, 3—4 mm. lata.

Succinea oblonga Draparnaud Tabl. Moll. (1801) p. 56; Hist. Moll. (1805) p. 59. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 47. Högberg Vet. Akad. Handl. 1841 p. 200. Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 516. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 61. t. 7. f. 32, 33. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 34. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 33; Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1865 p. 545; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 14 et 15. Lindström Gotl. Moll. (1868) t. 1. f. 14 (fig. anat.).

— **impura** HARTM (Succ. arenaria Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II. p. 118?): testa limo in lineis transversalibus parallelis obducta, parvula, ovato-oblonga, leviter striata, spira brevi, anfr. 3, subtortis, apertura rotundato-ovali; long. 6—7, diam. 4 mm.; ap. $3\frac{1}{2}$—4 mm. longa, medio 3 mm. lata. — Testa junior? (Pullus = S. humilis Drouët? T. long. 4, diam. $2\frac{1}{2}$ mm., ap. $2\frac{1}{2}$ mm. longa, magis rotundata).

— **elongata:** testa oblonga, solida, pellucescens, striata, succineo-rufa; spira longa, acuminata, valde contorta; sutura profunda; long. 7, diam: $3\frac{1}{2}$ mm.; ap. 4 mm. longa, $2\frac{1}{3}$ mm. lata.

Hab. In Suecia hanc testam in Stockholm in Stora Humlegården detexit clar. HÖGBERG; postea inventa ad Nacka (G. EISEN!); in prov. Småland ad prædium Rosenlund prope Jönköping (J. E. ZETTERSTEDT!!); in prov. Westmanland in Björnö (C. H. JOHANSON!!). — *impura* cum normali (et in prov. Skåne ad Stora Råby prope Lund?). — *elong.* in monte Omberg prov. Östergötland frequ. (R. LUNDBERGH et ipse). In museo univ. Ups. ex. in Bohuslän capta asservantur (teste prof. LILLJEBORG!). In Norvegia inter folia putrida avellanæ in Malmöen in sinu Christianiensi hanc speciem a. 1870 detexit celeberr. POULSEN!

4. SUCCINEA ARENARIA BOUCH.?

Testa ovato-acuta, crassa, striatula, nitidula, sordide succinea; *spira* conica, acutiuscula, valde contorta; *anfr.* $3\frac{1}{2}$—4, convexi, *sutura* profunda disjuncti; *apertura* rotundata, vix ovata, superne vix angulosa. *Animal* omnino nigrum; uncini radulæ later., sec. ord. basi brevi, lata, cuspide unica longitudine æquali, cuspidibus lateralibus minutis. Long. 8—11, diam. 5—7 mm.; apert. 4—5 mm. longa, 3—$3\frac{1}{2}$ mm. lata.

Succinea armaria Bouchard-Chantereaux Catal. Moll. Pas-de-Cal. (1838) p. 54? Dupuy Moll. Fr. (1847) p. 67. t. 1. f. 10? Pfeiffer Monogr. Heliceor. II (1848) p. 517? Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 62. t. 7. f. 35, 36?

Succinea arenaria Westerlund Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1865 p. 445; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 16. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 21. t. 2. f. 2 (testa), 6 (maxilla), t. 1. f. 15 (radula).

Succinea oblonga Jeffreys Brit. Conch. I (1861) p. 154. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 44.

— **impura** mh.: testa limo in lineis transversalibus parallelis obducta; long. 5—6, diam. 3—3½ mm.; ap. 2½—3 mm. longa, 2—2½ mm. lata. — Testa junior?

Hab. In **Suecia** in Träskhedarne par. Bunge, ad Bungenäs, in Ruthe, in Snäckgärdet et Ejkesträsk ins. Gotland (LINDSTRÖM). — *impura* ad Löjsta et Bästeträsk ins. Gotland (LINDSTRÖM). Testam apud nos primus invenit prof. LILLJEBORG.

Pas plus ici que dans le passage cité des Bulletins de l'Acad. des Sciences, je n'ose décider avec certitude la parfaite identité de cette forme avec l'espèce de BOUCHARD; mais je crois avec M. le Dr LINDSTRÖM que c'est le cas. Outre les différences existantes dans la coquille et l'aspect extérieur de l'animal, les deux petites espèces, trouvées chez nous et données ici comme *S. oblonga* et *arenaria*, se distinguent en outre l'une de l'autre par la forme des crochets de la membrane linguale, car chez la seconde, ceux du second ordre ont une base aussi longe et aussi courte que les pointes, tandis que chez la première, la base est longue et la tête munie de plusieurs pointes. (Cfr. LINDSTR. l. c.).

SECT. II. HYGROPHILA FÉR. (BASOMMATOPHORA KEF.)

Mollusca pulmonata, in aqua (vel saltem locis humidis) viventia, tentaculis duobus contractilibus, basi oculiferis. *Testa* non operculata.

Fam. AURICULIDÆ.

Animal terrestre, tentaculis subcylindraceis, brevibus, basi postice oculiferis, maxilla lunari, orif. org. gen. externis longe discretis, orif. respirationis postico, pallio margine incrassato. *Testa* oblonga, spiralis, apertura dentata, margine exteriore incrassato.

Gen. CARYCHIUM MÜLLER.

Testa minima, dextrorsa, ovato-oblonga; *apertura* obliqua, longior quam lata, dentata vel plicata; *peristoma* incrassatum, reflexum.

1. CARYCHIUM MINIMUM Müll.

Testa subrimata, ovato-oblonga, alba, hyalina, tenuissime striata; *anfr.* 5—5 $\frac{1}{2}$, convexi, ultimus maximus; *apertura* ovata; *peristoma* reflexum, subtiliter labiatum, margine exteriore impresso, intus subunidentato, columella et pariete aperturali unidentatis. Long. 2, diam. 1 mm.

Carychium minimum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 125. Rossmässler Iconogr. X (1838) p. 36. f. 660. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 413. t. 29. f. 15—26. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 300. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 35. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 87; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 73.
Auricula minima Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 55. Friele Norske Moll. (1853) p. 29. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 46. f. 37.

1. **inflata** Hartm.: testa ventricosior.

Hab. In **Suecia** hæc testa minuta passim frequens in provinciis meridionalibus et mediis usque in par. Husby prov. Dalarne, ubi invenit amic. C. G. Andersson. In **Norvegia** ad Christiania et Bergen non raro (Friele).

Fam. LIMNÆIDÆ.

Animal aquatile, tentaculis planis triangularibus vel subulato-setaceis, basi intus vel antice oculiferis, maxillis tribus, orif. org. gen. externis parum discretis, orif. respirationis antica, pallio margine tenui. *Testa* forma varia, apertura semper edentula, margine columellari sæpius plica longitudinali oblique adscendente, exteriore simplice et acuto.

Subfam. LIMNÆINA.

Testa oblonga, spira plus minus exserta, anfractu ultimo maximo, apertura longitudinali.

† *Animal tentaculis planis triangularibus. Testa dextrorsa.*

Gen. LIMNÆA Lamarck.

Testa impolita, oblonga, interdum turrita, spira exserta, acuta, apertura longiore quam lata. *Animal* velo os tegente bilobo, pallio testa plane condito.

1. *Lymnus* MONTF. *Testa* elongato-ovata vel ovata-elongata, *spira* elongato-turrita vel elongata, sæpe longissima.

1. LIMNÆA STAGNALIS (LIN.).

Testa solida, imperforata, acute elongato-ovato, albo- vel rufescenti-cornea; *spira* turrita, acuta; *anfr.* 7, celeriter accrescentes, ultimus elongato-ventricosus; *apertura* inæquilatera.

Helix stagnalis Linné Syst. Nat. X (1758) p. 774; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 530.
Limnæa stagnalis Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 60. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 95. Friele Norske Moll. (1853) p. 35. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 471. t. 34. f. 17—20. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 51. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 111. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 38. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 88; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 74 (*α*), 75 (*γ*), 76 (*δ*).
? Junior = *Helix fragilis* Linné Fn. Sv. p. 530.

α **vulgaris:** testa solida, spira elongato-conica; anfr. superne angulati; apertura subquadrangulari-ovalis; long. 50—60, diam. 26—29 mm.; apert. 26—34 mm. longa.

β **subulata:** testa spira subulata, longissima; anfr., etiam ultimus, elongati, planulati; apert. oblongo-ovata; long. 40—50, diam. 14—19 mm.; ap. 18—20 mm. longa.

γ **lacustris** STUD.: testa spira brevissima, dimidiam longitudinis aperturæ paullo superans; anfr. superne deplanati; a) long. 28, diam. 20, ap. 22 mm. longa, spira 6 mm. longa; b) long. 30, diam. 20, ap. 23 mm. l., spira 7 mm. l.; c) long. 39, diam. 32, ap. 29 mm. l., spira 13 mm. l.

δ **roseo-labiata** WOLF.: testa tenuis, brunnea, sæpe extus nigricans, intus lactea, margine exteriore aperturæ intus roseo-labiata; spira conica, mediocris; long. 47—50, lat. 20—22 mm.

ε **torsa** mh.: testa spira elongata, anfractibus superioribus convexis, sutura profunda disjunctis, ultimo ventroso, superne angulato.

ζ **borealis** BOURG.: testa ovata; anfr. 6—7½, ultimo ventroso, superne rotundato; spira abbreviato-conica, vix ⅔ longitudinis aperturæ; long. 41, spira 20 mm. longa, apert. 23 mm. longa; long. 43, diam. 23—24 mm., apert. 25 mm. l., spira 18 mm. l.; long. 50, diam. 27 mm.; apert. 31 mm. l., spira 22 mm. l. (Cfr. Nord. et Nyl. l. c. p. 52. f. 41. b.)

η **elegans** LEACH ap. JEFER.: testa subpollicaris, flavescens, subpellucida, labro intus margine incrassato sæpe pallide aurantiaco; spira subulato-conica, strigis variciformibus parcis; sutura alba; long. 29—32, diam. 12—14 mm., apert. 16—18 mm. l., spira 14—16 mm. l.

ϑ **lepida** GOULD?: testa fragilis, elongata, pallide cornea; anfr. 5, convexiusculi, spira acuminata; apertura oblique subsemicircularis;

long. 18, diam 8 mm., apert. $9\frac{1}{2}$ mm. l., spira $8\frac{1}{2}$ mm. l. (*L. lepida* BINNEY Smith. Misc. Coll., 143, 1865, p. 29, figuris optimis!).

ι **baltica** LINDSTR.: testa solida, opaca, perforata; apertura magna, margine columellari reflexo; long. 22, diam. 12 mm., ap. 15 mm. l., 10 mm. lata, spira 8 mm. l.; long. 30, ap. 16, spira 16 mm. l.; long. 30, ap. 17, sp. 10 mm.; long. 30, ap. 20, sp. 10 mm. (*L. stagnalis* γ NORD. et NYL. l. c. p. 52. f. 41. c.)

× **alata** mh.: testa magna, solidula, subpellucida, flavescens vel pallide cornea; anfr. 6—7, ultimo ventricoso-ampliato, superne deplanato, obtuse angulato; spira brevis, acuta; apertura amplissima, intus splendida, obscurior; peristoma auriculatim dilatatum, margine exteriore superne horizontali, columellari infra elongato; columella incisura obliqua profunda juxta plicam compressam notata; long. 55; diam. 29—33 mm., apert. 33—35 mm. longa, 23 mm. lata, spira 20 mm. longa.

Hab. In **Suecia** per maximam partem regni, saltim ad 67—68° l. bor. usque, in nonnullis regionibus tamen (ex. gr. circa Göteborg, fere in tota prov. Blekinge etc.) prorsus ignota. β *subul.* in prov. Skåne ad Christianstad (C. A. W.). γ *lac.* in prov. Skåne in lacu Ringsjön (MALM), prov. Östergötland in lacu Örn prope diversorium Örsäter et in lacu Sommen prope Boxholm (E. v. Goës!!), prov. Nerike in lacu Tisaren (HARTMAN), ins. Öland ad Borgby (C. A. W.), ins. Gotland in Tingstädeträsk et Lummelundsträsk (LINDSTRÖM). δ *ros.* — *lab.* in prov. Skåne ad Lund, Malmö etc. (C. A. W.), prov. Upland in Fyrisån ad Upsala (G. EISEN!!). ε *torsa:* prov. Dalarne ad Säther (C. G. ANDERSSON!!). ζ *bor.* in ins. Gotland in Bursträsk et Storsäf par. Mästermyr (LINDSTRÖM), prov. Dalarne ad Säther (C. G. ANDERSSON!!), Luleå Lappmark ad Qvickjock (v. WALLENBERG). η *elej.* in prov. Skåne ad Lund (C. A. W.), in Rönnea ad Hjelmslund et pagum Öja (J. LINDAHL!!). ϑ *lepida* in prov. Skåne in Wesums mosse (C. A. W.). ι *balth.* in aqua parum salsa maris balthici, ad litora prov. Skåne, Blekinge, ins. Öland, Gotland etc. × *alata* in prov. Småland ad Degla in lacu Noen (E. HEMBERG!!). In **Norvegia** passim ad Christiania et ad Walders (FRIELE).

2. LIMNÆA PALUSTRIS (MÜLL.).

Testa imperforata vel rimata, oblonga vel clavata, solida, fusca vel cinerea; *apertura* oblongo-ovata, plerumque brevior quam spira, intus sæpe rufa vel purpurascens.

α **normalis:** testa imperforata, ovato-elongata, corneo-fusca, epidermide olivaceo, spira exserta, conico-acuta; anfr. 6—7, convexiusculi,

fasciis raris albidis et purpureis picti; apertura intus flavida, nitida, labio intus fascia purpurea ornato; long. 22—23, apert. 10—11 mm.; long. 26—27, apert. 12—14 mm. — *Buccinum palustre* MÜLLER pr. p. Verm. Hist. II. p. 131. *Limnæus palustris* PFEIFFER Land- u. Wasser Schn. p. 88 t. 4. f. 20. DRAPARNAUD Hist. Moll. p. 52. t. 2. f. 40—42. ROSSMÄSSLER Iconogr. I. p. 96. f. 51. *Lymnæa pal.* NILSSON Hist. Moll. Su. p. 69. NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 57. f. 45. *Limnæa pal. var. 2.* MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 37. *Limnæa pal.* WESTERLUND Sv. Moll. p. 93; Coll. Typ. Moll. Su. n:o 82**.

β **corvus** GMEL.: testa imperforata, oblongo-ovata, obscure cornea vel nigricans; anfr. 3, ultimi latissimi, fasciis nullis; apertura oblongo-ovata, intus castanea vel purpurea, nitida; long. 33, diam. 14 mm., apert. 16 mm. longa; long. 40, diam. 15 mm., apert. 19—20 mm. longa, 10 mm. lata. — *Helix corvus* GMELIN S. Nat. p. 3665. *L. pal. var. 1.* JEFFREYS Brit. Conch. p. 114. MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 36. WESTERLUND Coll. Typ. Moll. Su. n:o 82*.

γ **attenuata** SAY: testa oblongo-clavata, turrita; anfr. convexi, sutura profunda vel constricta disjuncti; long. 23, apert. 9 mm.; long. 26, apert. 5—6 mm. — *Limnæa attenuata* BINNEY Smith. Misc. Coll., 143, p. 42. fig. 53 simillima. *L. pal. var. 4* MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 37.

δ **fusca** PFEIFF.: testa ovato-oblonga, obscura, fusco-grisea vel nigricans, spira conico-acuta; anfr. plerumque 6, convexiusculi, non fasciis ornati; apertura ovata, intus rufa vel purpurascens; long. 15, ap. 7 mm.; long. 21, ap. 10 mm. — *Limnæus fuscus* PFEIFFER Land- und Wasser-Schn. p. 92. t. 4. f. 25. *Lymnæa fusca* NILSSON Hist. Moll. Su. p. 70. FRIELE Norske Moll. p. 38. *Lymnæus fuscus* NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 58. f. 46. *Limnæa palustris var. 3 pumila* (vel jun.?) MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 37. *L. pal. β fusca* WESTERLUND Sv. Moll. p. 93; Coll. Typ. Moll. Su. n:o 82.

Hab. In **Suecia** forma normalis per provincias meridionales et medias passim occurrit, var. δ per totum regnum usque in prov. Jemtland (in Ragundaelf ad Kroken: NYSTRÖM Jemtl. Fauna p. 25) et Westerbotten (ad Sävast, 65° 60′: v. WALLENBERG) vulgaris. *β corvus* rarior, præsertim in prov. regni intermediis. *γ atten.* in prov. Skåne ad Lund inveni. In **Norvegia** forma δ passim ad Christiania et Bergen (FRIELE).

LIMNÆA * MARITIMA JEFFR.?

Testa ovato-oblonga, vix rimata, tenuis, pellucida, olivaceo-cornea, striata; *spira* exserta; *anfr.* $5\frac{1}{2}$, convexi, *sutura* profunda disjuncti, ultimus dimidiam testæ vix superans; *apertura* ovata, margine exteriore simplici,

acuto, columellari rectiusculo, reflexo, columella tereti, plica colum. obsoleta. Long. 13, diam. 6 mm.; apert. 6 mm. longa.

Hab. In **Suecia** ad litora maris juxta Carlskrona frequentem inveni.

Je ne puis rapporter avec certitude cette forme à aucune des espèces données ici, cause pour laquelle je l'inséris séparément. Peut-être est-elle identique à *Limnæa peregra var. maritima* JEFFREYS Brit. Conch. I. p. 105 et à *Limnæa peregra γ paludinoides* MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 43 (où *L. decidiosa* HALDEM. est donnée comme synonyme), coquilles vivant aussi dans la mer ou dans les eaux saumâtres; mais la forme danoise est beaucoup plus grande et elle a une ouverture relativement plus longue (long. 23, larg. 14 mm.; sommet long. 14, larg. 9 mm.). Par sa forme oblongue, sa columelle allongée, ses tours de spire fortement convexes, etc., elle paraît toutefois bien distincte de *L. peregra*. Elle se rapproche sans doute de très-près de la forme américaine *Limnæa desidiosa* SAY, telle qu'elle est décrite et dessinée par BINNEY dans le Smithsonian Miscellaneous Collections, 143, p. 481, et c'est peut-être la même quoique l'ouverture de cette coquille y soit dite: "equal to or rather longer than the spire", et cela d'autant que BINNEY dit, p. 51, que "*L. truncatula* is the European representative of *L. desidiosa*", car notre forme ressemble à un haut degré à un variété de *L. truncatula* (la même var. que BINNEY copie de MOQ.-TANDON), de laquelle elle se distingue par ses dimensions plus grandes et par la circonstance que les tours de spire sont partout également bombés, sans trace aucune de la dépression brusque qu'elles forment à leur marge supérieure chez *L. truncatula*.

3. LIMNÆA TRUNCATULA (MÜLL.).

Testa perforata, ovata vel ovato-elongatula, acutispira, solidula; *anfr.* 5—6, convexi, superne truncatuli; *sutura* profunda; *apertura* ovalis, quam spira brevior.

α **normalis:** testa rimata, ovato-oblonga, fusco-nigra vel atra, subpellucida, crassiuscula; anfr. 5; apertura inæquilatera, ovalis, margine columellari plicatim reflexo; long. 9—10, ap. 4—5 mm. — *Buccinum truncatulum* MÜLLER Verm. Hist. II. p. 130. *Lymnæa minuta* NILSSON Hist. Moll. Su. p. 72. *Limnæus minutus* ROSSMÄSSLER Iconogr. I (1835) p. 100. *Lymnæa truncatula* FRIELE Norske Moll. p. 40. *Limnæa truncatula* MOQ.-TANDON Moll. Fr. II. p. 473. t. 34. f. 22. JEFFREYS Brit. Conch. I. p. 115. MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 37. WESTERLUND Sv. Moll. p. 94; Coll. Typ. Moll. Su. n:o 83.

β **ventricosa** M. TAND.: testa profunde umbilicata, abreviato-clavata, albescens, subpellucida, spira turrita, acuta; anfr. 5, ultimus ventricosus vel ampliatus, superne angulatus; apertura oblongo-ovalis, supra et infra angustata, margine columellari reflexiusculo; long. 11,

diam. $5\frac{1}{2}$, apert. 5 mm. — *L. trunc. δ ventr.* MOQ.-TANDON Moll. Fl. c. r. f. 23. JEFFREYS l. c. p. 116.

γ **microstoma** DROUIT: testa perforata, minor, gracilior, fere cylindraceo-oblonga, spira acuta; anfr. 5, convexi, apertura oblonga; long. 6, lat. 3 mm. — *L. truncatula η microstoma* MOQ.-TANDON l. c.,

δ **minuta** DUP.: testa minuta, tenuis, ovata, brunnea, profundius striata; long. 5—$5\frac{1}{2}$, lat. $3\frac{1}{2}$—4 mm. — *Limnæus pullus* ZIEGLER. *Limnæa trunc. var.* JEFFREYS, MÖRCH.

Hab. In **Suecia** per totum regnum passim occurrit, fere nusquam frequens. In prov. Skåne ad Lund, Malmö, Stehag, etc.; Halland ad Skottarp (J. LINDAHL!); Blekinge ad Ronneby (C. A. W.) in Wämö et in fluvio Augerumsâ (ANKARCRONA!!); Smaland ad Ljungarp prope Månsarp (E. HEMBERG!); ins. Öland ad Borgholm et in parte merid. insulæ (C. A. W.); ins. Gotland in aquis plerisque fluitantibus, rarior in stagnis (LINDSTRÖM); Östergötland ad Lunna sat frequens (Goës!!), Nyby et aliis locis; Westergötland ad Masthugget et ad Slottskogsvägen prope Göteborg (MALM), ad mont. Billingen et Mösseberg (C. A. W.); Nerike ad Tegelbruket extra Örebro et ad Willingsberg (HARTMAN); ad Stockholm in fossis in Södermalm (HÖGBERG teste WIKSTRÖM); Upland ad Upsala (LILLJEBORG! JOHANSON!); Westmanland ad Westerås et Norberg (C. H. JOHANSON!); Dalarne in par. Gustaf (F. E. RIDDERBJELKE teste JOHANSON!) et in Säthersdalen (C. G. ANDERSSON!!); Jemtland in ripis lacus Storsjön (NYSTRÖM); Luleå Lappmark ad Qvickjock (WALLENBERG, qui duas formas in illis regionibus observavit: 1. color sordide flavus, apex plerumque erosus, alt. 5,6, diam. 3,4, ap. 3 mm.; 2. nitida et gracilis, anfractus suturam admodum profundam fac., apex plerumque illæsus, color corneo-flavus, alt. 5,4, diam. 2,9, ap. 2,5 mm.). *β ventr.* præcipue ad Lunna prov. Östergötland lecta et missa a beat. E. v. Goës. *γ micr.* ad Nyby prov. Östergötland inveni. *δ min.* in Lefre ad Lund prov. Skåne (MALM), in Sörby bäck et in Herrstorpsjön prope Ronneby prov. Blekinge (C. A. W.), ad Djupviken par. Ekska ins. Gotland (LINDSTRÖM), ad Nyby prov. Östergötl. (C. A. W.), ad Norrby par. Hedemora prov. Dalarne (C. G. ANDERSSON!!), ad Juckasjärvi in Luleå Lappmark (E. HEMBERG!!). In **Norvegia** frequens (FRIELE).

4. LIMNÆA GLABRA (MÜLL.).

Testa imperforata, cylindracea, turrita, lineis incrementi nigris sparsis flavo-marginatis; *apertura* obovata, brevis, plica exserta columellæ lactea.

Buccinum glabrum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 135.
Limnæus elongatus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 52. t. 3. f. 3, 4.
Lymnæa elongata Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 71. Friele Norske Moll. (1853) p. 39.
Limnæus elongatus Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 101. f. 58.
Limnæa glabra Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 478. t. 24. f. 36, 37. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 117. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 36. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 95; Coll. Typ. Moll. Su. n:o 84.

α **normalis:** testa luteo-fusca, acuminata; anfr. fere 8, teretes, sat parum decrescentes; apertura obovata; long. 9—10, lat. 3 mm.; ap. 4, spira 6 mm. l.
β **elongata:** testa conico-cylindracea, pallida, magis minusve nitida; spira apertura duplo longior; anfr. 7, convexi, sutura sat profunda, alba; apertura ovato-oblonga, superne angustata; long. 14, diam. 4 mm.; apert. 5, spira 10 mm.
γ **labiata:** testa brevior, elongato-conica, acuta; anfr. 6, infimus brevior et magis convexus; peristoma intus albo-marginatum.
δ **subulata** KICKX: testa minuta, subulato-conica; apertura parva; long. 8 mm.

Hab. In **Suecia** hæc testa præcipue in provinciis occidentalibus occurrit, saltem in illis multo altius septentrionem versus ascendit. In prov. Skåne inventa ad W. Wram (LILLJEBORG), Brösarp (HULTMARK), Lindholmen (ROTH!!), Ringsjön (WALLIN et ipse), Lundegård par. Källna (J. LINDAHL!!); prov. Blekinge in rivulo ad Munkahus prope Carlshamn, in fossa juxta viam ad Svenstorp non procul a Mörrum (GOSSELMAN) et in stagno ad Ronneby (var. δ: C. A. W.); in prov. Småland a prof. BOHEMAN teste NILSSON capta; ad Kalmar (sec. clariss. E. v. MARTENS Malak. Bl. 1857 p. 98); prov. Westergötland ad Göteborg (Slottsskogen, in rivulo ad Hofås, in Utterbäcks mosse et ad Steken: MALM), ad Grimstorp passim (O. NORDSTEDT!!), ad Lidköping (ZETTERSTEDT!, in Kartåsen: Goës!), ad Gökhem par. Källunga (J. HULTING!), inter templum par. Fredberg et Töreboda (E. M. STARCK, teste HARTMAN); prov. Bohuslän ad Marstrand (O. NORDSTEDT!). In **Norvegia** in fossa ad arcem Agershuus in Christiania copiosissime (FRIELE). Hanc fossam nunc temporis repletam esse et testam adeo hoc loco exstinctam mihi scripsit celeberr. POULSEN, quo teste in museo univ. Christian. ex. unicum ad Skudenæs lectum asservatur.

Subgen. *Gulnaria* LEACH. *Testa* subovata, spira brevissima vel brevis, anfractus ultimus maximus, inflatus.

5. LIMNÆA AURICULARIA (Lin.).

Testa rimata vel perforata, ampullacea, inflata; *spira* brevissima, acuta; *anfr.* 4, ultimus inflatus, auriforme dilatatus, superne obtusus, inferne ampliatus, maximam testæ partem efficit; *apertura* amplissima, semicircularis, superius et inferius rotundata; *peristoma* patulum, subreflexum, columella juxta plicam compressam excisa.

Helix auricularia Linné Syst. Nat. X (1758) p. 774; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 532.
Buccinum auricularia Müller Verm. Hist. II (1774) p. 126.
Lymnæa auricularia Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 61. Friele Norske Moll. (1853) p. 36.
Limnæa auricularia Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 462. t. 33. f. 21—31, t. 35. f. 1—10. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 108. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 10. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 77.
Limnæus auricularius Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 98.
Lymnæus auricularius Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 33. f. 42.
Limnæa limosa α auricularia Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 39.

α **normalis:** testa calcarea, tenuis, fragilis; spira prominula, mucronata; anfr. ultimus postice angustatus; apertura ovali-quadrangularis; columella torta, recta; paries aperturalis brevissimus; long. 25—28, lat. 22—27 mm. — Rossm. Ic. f. 55. Nord. et Nyl. l. c. f. 43.

β **acutior** Gras: testa solidior; spira elongata, acuta; anfr. ultimus postice latior; apertura semicircularis; paries aperturalis longa; long. 25—27, diam. 14—16 mm. — Gras Moll. du Dep. de l'Iscre pl. 5. f. 2.

γ **patula** Da Costa: testa ovatà, inflata, lutescens, tenera; spira conico-convexa, apice obtusa; paries apert. longa; columella brevis. — *Turbo pat.* Da Costa Test. Brit. p. 95. t. 5. f. 17. *L. ampullaceus* Rssm. Ic. II. p. 19. f. 124? *L. aur.* ζ *acronica* Moq.-Tandon l. c. p. 463. t. 34. f. 4.

δ **ampla** Hartm.: testa suborbicularis; spira vix prominula; anfr. ultimus postice abbreviatus; apertura late ovalis, postice obtuse angulata; paries aperturalis brevissimus; columella brevis. — *L. ampla* Hartmann Gaster. p. 69. t. 5. Moq.-Tand. Moll. Fr. p. 463. t. 34. f. 5.

b. **pumila:** testa tenuis, pellucida, depresso-semiglobosa, sæpe limo atro-brunneo obtecta, spira brevissima; apertura ovato-rotundata, margine exteriore late reflexo; long. 16—20, diam. 14—18 mm. — *L. aur. var. 2* Mörch l. c.

ε **monardi** Hartm.: testa latissima; spira obsoleta; apertura maxima, margine exteriore auriculatim dilatato, spiram multo superante. — Moq.-Tand. l. c. p. 463, t. 34. f. 7.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: in lacubus Ringsjön, Råbelöfsjön, Ifösjön, in fluviis Seje- et Höje-åar, ad Christianstad, Ignaberga et aliis locis; prov. Blekinge: in lacu Långasjö prope Ronneby (prof. LILLJEBORG et ipse); prov. Småland: in lacu Noen ad Degla (E. HEMBERG!!); prov. Östergötland: in lacubus plerisque frequens; prov. Westergötland ad Grimstorp etc.; prov. Nerike: in lacu Hjelmaren ab Örebro usque ad Humlemyrsviken et in lacu Tisaren (HARTMAN); prov. Wermland: ad Carlstad (C. LINROTH!!); circa Stockholm frequentissime, etiam in aqua parum salsa maris Östersjön (WIKSTRÖM, HARTMAN); prov. Westmanland: ad Westerås in fluvio Svartån (C. H. JOHANSON!); prov. Upland ad Upsala (LILLJEBORG! JOHANSON!); prov. Dalarne in lacu Åmungen par. Husby frequ. (C. G. ANDERSSON!). In insulis Öland et Gotland hæc testa desideratur. *δ amplam* in lacu Tåkern prov. Östergötland et formam *pumilam* in fossa ad Borgmästareängen prope Malmö prov. Skåne inveni. *ε monardi* in lacubus (ex. gr. Öfversjön, Ifösjön) prov. Skåne et in lacu Tåkern prov. Östergötland. In **Norvegia** rara in vicinitate urbis Christiania (FRIELE).

6. LIMNÆA LIMOSA MALM.

Testa rimata vel perforata, ovata vel elongato-ovata, spira brevi; *anfr.* 4—5, ultimus ventricosus, ovatus vel superne attenuatus; *apertura* ovata, plus minus acuta.

1. **Ovata** DRAP. *Testa* rimata, ovata vel ovalis; *spira* brevis; *anfractus* ultimus ampullaceo-ovatus; *columella* teres, incisura nulla vel parum distincta notata; *peristoma* simplex, acutum, margine columellari reflexo.

α **normalis:** testa ovali-ovata, corneo-lutescens, striata, tenera; spira brevis, acuta; apertura ovata vel oblongo-ovata, columella tereti, plica obsoleta; anfr. 4—5, ultimus ampullaceus, ovatus; long. 25—28, diam. 18—20 mm., apert. 20—22 mm. longa, 13—14 mm. lata. — *Lymnæa ovata β* NILSSON Hist. Moll. p. 63. *Limnæus ovatus* ROSSM. Ic. I. p. 100. f. 55. *Lymnæus ovatus α* NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 55. f. 43. a. *Limnæa limosa forma* MALM Göteb. Handl. VIII. p. 143. fig. c. d. WESTERLUND Sv. Moll. p. 91. *L. limosa ovata* WESTERL. Coll. Typ. Moll. Su. n:o 78.

β **vulgaris** (PFR?) ROSSM.: testa subrimata, ovata, tenera, tenuiter striatula, flavescens vel subobscura, spira productiore; anfr. 4—5, ultimus subventricosus, convexus; apertura ovata; peristoma rectum; long. 17—20, diam. 10—12; apert. 12—14 mm. longa, 8 mm. lata. — *Lymnæa ovata α* NILSSON Hist. Moll. p. 63. *Limnæus vulgaris*

ROSSM. Ic. I. p. 97. f. 53. WALLENBERG Moll. Lapp. Lul. p. 29. t. 1. f. 8. *Lymnæus ovatus β vulgaris* NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 55. f. 43. b. *Limnæa limosa forma* MALM Göteb. Handl. VIII. p. 143. fig. e^1, e^2, e^3. WESTERLUND Sv. Moll. p. 91. *L. limosa, vulgaris* WESTERL. Coll. Typ. Moll. Su. n:o 80.

— **margaritacea** WESTERL. (Sv. Moll. p. 91): testa in aqua et jamdudum excepta atra, postea flavescenti-cornea vel succinea, intus valde margaritacea; long. 18—19, diam. 9—10 mm., ap. 12 mm. longa, 8 mm. lata.

γ **balthica** (LIN.) NILSS.: testa subperforata, ovalis, tenuis, pellucida, griseo- vel fusco-virescens, striis inæqualibus subrugæformibus, spira sæpius brevi; anfr. 4, infimus ventricosus, maximus, inferius subampliatus; apert. ovata, subampliata; plica columellæ distincta; long. 12, diam. 7, ap. 10 mm. longa. — *Helix balthica* LINNÉ Gotl. Resa p. 261; Fauna Su. p. 532. *Lymnæa balthica* NILSSON Hist. Moll. Su. p. 61. *Lymnæus ovatus γ balthicus* NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 56. f. 43. *Limnæa limosa-balthica* MALM Göteb. Handl. VIII. p. 143. f. b. WESTERLUND Sv. Moll. p. 91; Coll. Typ. Moll. Su. n:o 79.

δ **succinea** NILSSON (Hist. Moll. p. 66): testa ovata, subperforata, lævis, fulvo-lutea, nitidissima; anfr. 4, ultimus subampullaceus, ovatus; spira brevis, albida; apertura ovata, peristomate simplice, haud patulo, albido; long. 9, diam. $5\frac{1}{2}$ mm.; apert. 7—8 mm. longa, spira 3 mm. l.

ε **burnetti** ALDER: testa subrotundo-ovata, striata; spira brevissima; apertura magna, ovalis; anfr. 3—4; long. 10, diam. 8 mm., apert. 9 mm. longa. — *Limnæus burnetti* FORB. et HANL. Brit. Moll. IV. p. 172. t. 123. f. 8—9, teste MALM Göteb. Handl. II. p. 144; VIII. p. 143. fig. a. *Limnæa peregra var. burnetti* JEFFREYS Brit. Conch. I. p. 105. *Limnæa limosa var.* WESTERLUND Sv. Moll. p. 90.

2. **Peregra** LAM. *Testa* ovato-oblonga, perforata; *spira* mediocris, quam in præcedentibus semper longior; *apertura* ovata, superne angulata vel subovalis, patula; *anfr.* $4\frac{1}{2}$—5, tereti-convexi, *sutura* profunda disjuncti, ultimus maximus, ovatus, subventricosus.

α **major** ROSSM. (Ic. I. p. 97); testa subumbilicata, tenuis, subpellucida, inæqualiter striata, griseo-lutescens; apertura exacte ovata, superne vix angulata, peristomate simplici, acuto; plica columellaris obsoletissima; long. 19—21, diam. 11—13 mm., apert. 12—$13\frac{1}{2}$ mm. longa, spira 9 mm. longa. — *Lymnæa peregra var. α* NILSSON Hist. Moll. p. 67. *L. limosa var.* MALM Göteb. Handl. VIII. p. 143. fig. e^b. WESTERLUND Sv. Moll. p. 91.

β **marginata** MICH. (Compl. p. 88. t. 16. f. 15, 16): testa minor, elongatior, solida; apertura rotundato-ovata vel ovata, superne angulata,

peristomate intus callo vel labio margaritaceo, nitidissimo, plano; long. 13—17, diam. 7—8½ mm., apert. 8—10 mm. longa, 5—6 mm. lata, spira 5—7 mm. longa. — *Lymnæa peregra var. δ* NILSSON Hist. Moll. Su. p. 68. *Limnæus pereger β labiatus* ROSSMÄSSLER Icon. I. p. 98. f. 54. *Lymnæus pereger* NORD. et NYL. Finl. Moll. p. 57. fig. 44. *Limnæa limosa var.* MALM Göteb. Handl. VIII. p. 143. fig. e[a]. *Limnæa limosa — labiata* WESTERLUND Sv. Moll. p. 94. *L. limosa — marginata* WESTERL. Coll. Typ. Moll. Su. n:o 81.

γ **atrata** CHEMN.: testa elongato-ovata, subcylindrica, tenuis, pellucida; color maxime respondet *Succ. putris;* apertura brevis: longitudo aperturæ testæ latitudini totali fere par est, totius longitudinis autem vix ⅔ efficit; spira subturrita. — WALLENBERG Moll. Lapp. Lul. p. 30. t. 1. f. 9. MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 44.

δ **minor:** testa minor, subimperforata, pallida, tenuissima, subtiliter striata; spira acuta, fusca; anfr. 4; columellæ plica compressa; apertura ovata, superne angulata; long. 8—10, diam. 5—6, apert. 6—6½, spira 3—4 mm. — *Lymnæa peregra var. β* NILSSON l. c. p. 67.

ε **succineæformis** (JEFFR.?) LINDSTRÖM (Gotl. Moll. p. 23. t. 2. f. 3): testa maxima, umbilicata, tenuis, fragilis, striis subrugæformibus, forma *Succineam æquans;* anfr. 4½, ultimus maximus, ovato-oblongus, medio et pone apert. compressus; spira brevis; apertura elongato-ovata, superne vix angulata, basi rotundata; plica columellæ distincta; peristoma margine exteriore simplici, acuto, superne breviter arcuato, columellari reflexo; long. 30, diam. 20 mm., apert. 21, spira 10 mm.

Hab. In **Suecia** sub una alterave forma hæc species per totum regnum, saltem ad Qvickjock in Luleå Lappmark usque occurrit. *Ovata β vulg. — margar.* in prov. Skåne in stagnis ad Säbyholm prope Landskrona (C. A. W.), nec non in Småland in piscina ad Kofryd (E. HEMBERG!). *γ balth.* in aqua parum salsa maris balthici, ad litora saltem ad 61° lat. bor. usque, sæpe prof. 2—3 orgyiar., in Kapellshamnsviken ins. Gotland prof. 80 orgyiar. (clar. F. SMITH, teste LINDSTRÖM). *δ succ.* ad litora maris juxta Trelleborg et Skanör prov. Skåne. *ε burn.* in litoribus ostii fluminis Göta elf (MALM) prov. Westergötland. *Peregram γ atr.* in Luleå Lappmark ad Qvickjock solummodo supra regionem arborum copiosissime invenit clar. v. WALLENBERG, in alfvaren ins. Öland multis locis ipse vide. *ε succineæformis* ad Klinta ins. Gotland, unde eam misit amic. LINDSTRÖM. In **Norvegia** *Ovata α* et *β* ad Christiania, *Peregra α* et *δ* ubique copiose occurrunt (FRIELE).

LINNÉ décrit comme suit son *Helix limosa* (Fauna Su. ed. I. p. 376. n:o 1314): "testa oblongiuscula, anfractibus 5, pellucida, ore ovato. Hab. in fluviis. Præceden-

tibus duabus (*H. vivipara* et *tentaculata*) duplo minor; operculo etiam clauditur. T. pellucida et valde tenera, præcedentibus duabus acuta magis." Le n:o 1312 est *Paludina vivipara*, au diagnose de laquelle appartient: "apertura ovata operculo membranaceo tecta." Le n:o suivant (1313) est la *Bythinia tentaculata* dont il est dit: "hæc quadruplo minor est (c.-à-d. que *P vivipara*); operculo etiam clauditur." Dans la Fauna Su. ed. 2. sont inscrites outre *H. vivipara* (n:o 2185) et ses congénères, *H. limosa* (n:o 2190) et *H. tentacula* (n.o 2191), *H. nemoralis*, *fragilis*, *stagnalis* et *putris*; mais il n'est pas fait mention d'opercule chez *H. limosa*, et il n'est donné qu'une partie de la description, tandis que pour *H. tentaculata* toute la description de la 1ère éd. est donnée, et cette dernière entre de la sorte en comparaison avec *H. limosa* et non avec *H. vivipara*, comme dans la 1ère éd. Cette interversion des espèces, sans une modification correspondente de leurs descriptions comparatives, rend à beaucoup d'égards la 2de éd. de la Fauna Su. difficile à comprendre. Pour ce qui concerne *H. limosa*, LINNÉ ajoute comme synonyme (Syst. Nat. ed. XII) Gualt. t. 5. f. H, figure qui est la *Succinea putris jun.* NILSSON (Hist. Moll. p. 72) admet, avec quelque doute, que l'espèce de LINNÉ est *Limnæa truncatula*, opinion partagée par MENKE; MOQ.-TANDON (Hist. Moll. Fr. II. pag. 467) croit que la figure H. est une erreur typographique au lieu de N, figure représentant la *L. ovata;* si c'était la fig. B, c'est une *Bythinia;* MÖRCH (Syn. Moll. Dan. p. 43) suppose que LINNÉ, de même que MÜLLER a fait deux espèces de *B. tentaculata*, à mesure que les exemplaires étaient maculés et corrodés ou non. Quand avec MALM j'admettais, p. 92 des Mollusques de terre et d'eau douce de la Suède, que *l'H. limosa* de LINNÉ était une *Limnæa*, je partais de la supposition que LINNÉ s'était, dans la nouvelle édition de sa Faune, servi du droit dont jouit tout auteur, de corriger une erreur faite précédemment; mais une étude plus attentive de ses écrits m'a convaincu qu'en fait d'exactitude et de critique la 2de éd. de sa faune est très-inférieure à la 1ère, et ne peut guère avoir été rédigée par LINNÉ lui-même, et que, pour ce qui concerne son *H. limosa*, il faut s'en tenir exclusivement à la description de la 1ère éd., indiquant expressément que la coquille est munie d'opercule. Voici encore un exemple de l'interversion négligée des espèces dans la 2de éd. Dans la description de la coquille n:o 1305, 1ère éd. (*Planorbis spirorbis*) se trouvent les mots "testa minime marginata uti sequentes", qui sont *Pl. umbilicatus* (1306), *Pl. vortex* (1307) et *Pl. complanatus* (1308); la même description est complétement conservée dans la 2de éd., mais les espèces qui la suivent, sont: *Pl. contortus* (2181), *Helix hispida* (2182), *H. pomatia* (2183) et *H. arbustorum* (2184). — Or comme il est impossible de séparer comme espèces *Limnæa ovata* et *peregra* et leurs nombreuses variétés, la question est de savoir quel nom elles doivent porter en commun. Les noms *ovata* et *peregra* indiquent des formes particulières et ne peuvent donc être employés. J'ai admis pour cette raison le nom *limosa* dans la signification et avec l'étendue que lui donne Mr. MALM dans les Mém. de la Soc. des Sciences de Goth., IIème c., p. 142 et suiv.

Gen. AMPHIPEPLEA NILSS.

Testa imperforata, subglobosa, tenuissima, polita; *spira* subplana, vix prominula; *apertura* magna, ovata; *columella* tortuosa, callo parietali lato.

Animal velo os tegente antice subrotundato, pallio largissimo, testam involvente.

1. AMPHIPEPLEA GLUTINOSA (MÜLL.).

Testa obovato-globosa, tenerrima, fragilissima, pallide lutescens, subplicato-striata, nitidissima; *anfr.* 3, ultimus ampullaceus totam fere testam efficit; *apertura* ampla, ovata. Long. 10, diam. 8 mm.; long. apert. 9, lat. 7 mm.; ex. max.: long. 18 mm., diam. 13 mm.; long. apert. 16, lat. 13 mm.

Buccinum glutinosum Müller Verm. Hist. II (1774) p. 129.
Limnæus glutinosus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 50.
Amphipeplea glutinosa Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 58. Rossmässler Icon. 1 (1835) p. 93. f. 48. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 49. f. 50. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 44. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 96; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 85.
Limnæa glutinosa Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 461. t. 33. f. 16—20. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 103.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne in lacu parvulo juxta fodinam lithanthracis ad Bosarp, in fluvio ad Köpinge, in amne Höjeå ad Lund (NILSSON), ad Trolleberg, in Wesums mosse frequens et maxima (J. A. WALLIN!!), in amne Helgeå ad Christianstad (MALM); prov. Halland ad Skottarp (J. LINDAHL!); prov. Westergötland in Stadswassen et in amne Mölndalsä (MALM); prov. Östergötland in lacubus Föllingarne, in lacu Limmaren (E. v. Goës!!); prov. Nerike in lacubus Tisaren et Sottern (HARTMAN); prov. Södermanland in lacu Öknasjön (E. HEMBERG!); ad Stockholm in lacu prope Stora Björknäs ins. Wermdön (HARTM.); prov. Upland ad Upsala (LILLJEBORG!, JOHANSON!); prov. Westmanland in lacu Mälaren ad Wiksäng et in Axholms sjö par. Haraker (JOHANSON!); prov. Wermland ad ostium amnis Forsviksä (C. LINROTH!); prov. Dalarne in par. Gustaf (RIDDERBJELKE teste JOHANSON!), nec non in lacu Sörbosjön ad Stjernsund frequens (C. G. ANDERSSON!).

†† *Animal tentaculis longis setaceis; testa sinistrorsa.*

Gen. PHYSA DRAP.

Testa ovalis, nitida, tenuis, fragilis; *spira* prominula; *apertura* ovalis, superne subangustata. *Animal* lobo ad basin externam tentaculorum, margine pallii supra testam reflexo, 3—7 digitata; maxilla triangularis, acie

angulatim inflexo; uncinus radulæ medius lobis duobus triangularibus apice lato, serrato; uncini laterales cultriformes, acie serrato pectinato (ex GOLDF.).

1. PHYSA FONTINALIS (LIN.).

Testa subovalis, substriata, pallide fulva vel lutescens; *anfr.* 4, infimus maximus, obovatus.

Bulla fontinalis Linné Syst. Nat. X (1758) p. 727; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 523; Syst. Nat. XII (1767) p. 1185.

Physa fontinalis Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 54. t. 3. f. 8, 9. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 56. Friele Norske Moll. (1853) p. 41. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 451. t. 32. f. 9—13. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 48. f. 38. Jeffreys Brit. Conch. I (1861) p. 98. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 45. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 97; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 86.

α **normalis:** testa anguste ovalis, sæpe obscure fulva; spira brevissima; apertura angusta, oblongo-ovalis, sæpe lanceolata, infra elongata, angulata, margine columellari longo, subrecto; long. 8, diam. 5 mm. (ex. max.).

β **typica:** testa ovalis vel ovata, pallide fulva; spira obsoleta; apertura ovato-oblonga, inferius rotundata, superne angustata et acuminata, margine columellari brevi, arcuata; long. 6—8, diam. $3\frac{1}{2}$—5 mm.

γ **bulla** MÜLLER: testa late ovalis; spira conico-convexa, prominens, apice obtuso; anfr. ultimus magnus, ventricosus, ad suturam planulatus, obtuse angulatus; callus parietalis latissimus; long. 10—13, diam. 6—8 mm. — *Planorbis bulla* MÜLLER l. c. p. 167. *Physa font. β inflata* MOQ.-TANDON l. c. p. 451. t. 32. f. 13. *Ph. font. var. 1) inflata* JEFFREYS l. c. p. 98. *Physa bulla* MÖRCH l. c. p. 45. *Ph. font. β bulla* WESTERL. l. c. p. 97.

δ **oblonga:** testa anguste ovalis, spira elevata, producta.

Hab. In **Suecia** vulgaris usque in prov. Dalarne. *γ bulla:* in prov. Skåne passim; (? ad Stockholm in Djurgårdsbrunnsviken, ex. 11 mm. longa, 7 mm. lata: HARTMAN; ins. Gotland ad Fardhem, ex. 12 mm. longa: LINDSTRÖM). In **Norvegia** passim.

PHYSA * SEMIGLOBOSA mh.

Testa late ovalis, sæpe subcircularis, semiglobosa, tenuissima, flavida, striatula, rugis incrementi numerosis iniqua; *anfr.* 4—5, ultimus inflatus; *spira* brevissima; *apertura* inferne rotundata, superne angustata, *peristomate* supra patulo. Long. 8—9, diam. 6—$6\frac{1}{2}$ mm.

Hab. In **Suecia** ad Nacka prope Stockholm (G. EISEN!!).

Gen. APLEXA FLEMING.

Testa ovato-oblonga, nitidissima, tenuis; *spira* conica, acuta; *apertura* angusta, superne acuta. *Animal* tentaculis ad basin inauriculatis, margine pallii simplici, non reflexo.

1. APLEXA HYPNORUM (LINNÉ).

Testa ovato-oblonga, subfusiformis, fulva s. rufescens, diaphana; *anfr.* 6, ultimus ceteris major, non tamen ventricosus; *spira* aperturam subæquans. Long. 12—15, diam. 4—5 mm.; apert. $8\frac{1}{2}$—9 mm.

Bulla hypnorum Linné Syst. Nat. X (1785) p. 727; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 522. S. N. XII (1767) p. 1185.

Planorbis turritus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 169.

Physa hypnorum Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 55. t. 3. f. 12, 13. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 57. Friele Norske Moll. (1853) p. 42. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 455. t. 33. f. 11—15. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 48. f. 39. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 96.

Aplexa hypnorum Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 46. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 97; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 87.

β **perrissiana** DUPUY: testa angusta; spira dimidiam aperturæ vix superans; long. 10, diam. 4 mm., apert. 7 mm. longa. — *Ph. perrissiana* MÖRCH l. c. p. 46. *Ph. acuta γ perr.* MOQ.-TAND. l. c. p. 453. t. 33. f. 5.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Lefre kärr prope Lund et ad Uddarp prope Christianstad (MALM), ad Raby prope Lund (ROTH!), ad Tivoli juxta Christianstad (C. A. W.), ad Smedstorp (E. HEMBERG!); prov. Blekinge in parte maxime occidentali; ins. Gotland: in fossis juxta viam ad Follingbo et Barlingbo (LINDSTRÖM); prov. Östergötland: ad Lunna par. Appunna frequ. (E. v. GOËS!!), in fossa ad radicem orientalem montis Omberg (C. LINROTH!), in fossis ad Nyby sat frequens (C. A. W.); prov. Westergötland: ad Göteborg (ex. gr. in fossa ad Gamla Alléen, in Hisingen, in rivulo ad Hofås et ad Nya Warfvet: MALM), ad Mörkeklef et Hjelmsäter montis Kinnekulle (C. LINROTH!); prov. Nerike ad Örebro (HARTMAN); ad Stockholm in Hembergs gärde et ad Landtbruks-Akademiens Experimentalfält (WIKSTRÖM); prov. Upland ad Upsala (LILLJEBORG!, JOHANSON!), prov. Westmanland ad Westerås (JOHANSON!); prov. Dalarne ad Säther (C. G. ANDERSSON!!). *β parr.* prov. Skåne in fossa ad Tivoli juxta Christianstad (C. A. W.). In **Norvegia** passim ad Christiania (FRIELE), ad Laurgaard in Gudbrandsdalen (O. NORDSTEDT!!).

Subfam. PLANORBINA.

Testa discoidea, spira depressa, *anfr.* omnibus sæpe utrinque conspicuis; *apertura* cordata, lunata vel rotunda.

Gen. PLANORBIS Guettard.

Testa dextrorsa. *Animal* tentaculis subulatis ad basin dilatatis; orificia org. int. ad sinistrum; maxilla lunaris, maxillæ laterales lineares, flexæ; uncinus radulæ medianus parvus, bifidus, uncini intermedii trifidi, laterales digitati (ex Goldf.).

Pour la description spécifique il est naturellement d'un grand conséquence d'avoir déterminé si la coquille de la *Planorbis* est dextre ou non, d'où l'on peut distinguer quel est le côté supérieur ou le côté inférieur de la coquille. Les auteurs sont toutefois loin d'être unanimes à cet égard. Richard, Cuvier, Rang, Gray (dans son Éd. du Manuel de Turton, p. 256), Say (Conch. Un. States by Binney, p. 209), Mörch (qui a fait de la question l'objet d'une dissertation spéciale dans le Journal de Conchologie, 1863, p. 235 et suiv. sous le titre: Le genere Planorbis est-il dextre?, Hist. Moll. Daniæ p. 47) et plusieurs autres la considèrent comme *sénestre*, tandis que Moq.-Tandon (Hist. Moll. p. 422), Binney (dans le Smithsonian Miscellaneous Collections, 143, p. 103), Reeve (Brit. Moll. p. 135), Jeffreys (Brit. Conch. I. p. 78), Rossmässler (Icon. I. p. 102), Bielz (Fauna Moll. Siebenb. p. 174), etc., la regardent comme *dextre*. Troschel (De Limnæaceis, 1834) ne la croit ni dextre ni sénestre, et l'appelle *testa rectrorsa*. Je me range pour ma part du côté des naturalists, qui la disent *dextre*. Je regarde comme correspondant à la columelle des autres coquilles le côté de la *Planorbis*, qui est le superieur quand l'ouverture est à droite, et que la partie la *moins* saillante de l'ouverture est dirigée vers la bas. Si le genre Planorbis était sénestre, il en résulterait ce qui suit: 1:o Il constituerait, que je sache, le seul exemple où le bord columellaire du peristome fût plus allongée que le bord exterieur; 2:o la partie inférieure de la coquille aurait toujours une couleur plus foncée et des stries plus fortes que la supérieure, ce qui ne se présente qu'à titre d'exception extrêmement rare chez d'autres genres; 3:o en plaçant la coquille de telle sorte que le bord la plus allongée du peristome, se trouve en bas, l'animal devra pour pouvoir poser son pied, tourner son corps d'un demi tour, et pour ramper tourner en haut le côté opposé de la coquille. Je ne sache personne qui ait jamais prétendu que la *Valvata antiqua* n'ait pas une coquille dextre, et de ce type, qui a une forme presque conique, la coquille se déprime de plus en plus par la *V. piscinalis*, *macrostoma* et *minuta*, jusqu'à ce qu'elle s'applatisse totalement et devienne semblable à une Planorbis chez *V. cristata*. L'intéressante et remarquable monstruosité en forme pyramidale de *Pl. umbilicatus* Müll. indiquée ci-dessous, dessinée par Woodward dans son "Manual des Mollusques", p. 172, est dextre, de même qu'une monstruosité en forme de tire-bouchon de *Pl. albus*, dont je possède toutefois

en outre un exemplaire sénestre. Pour ces raisons et plusieurs autres encore, je regarde comme dextre la coquille de ce genre, par suit de quoi je nomme supérieur le côté que GRAY, MÖRCH et d'autres désignent comme inférieur et vice-versa.

1. *Coretus* ADANS. (Spirodiscus Stein). *Testa* depressa, umbilico profundo, *spira* angusta, *anfract.* celeriter accrescentibus, teretibus, validis, *apertura* reniformi.

1. PLANORBIS CORNEUS (LIN.).

Testa crassa, solida, nitidula, transversim sulculis et striis vel costulis irregularibus prædita, obscura, olivaceo-nigrescens, interdum rufescens, subtus pallidior, parum umbilicata, supra profunde concava; *anfractus* $4\frac{1}{2}$—$5\frac{1}{2}$, celerrime accrescentes, teretes, ultimus rugis reticulatis sæpius notatus (fossularum seriebus transversis scrobiculatus), inflatus, finem versus ampliatus, utrinque ceteris multo altior, anfr. omnes tantum subtus visibiles, supra primi 2 obsoleti; *sutura* subtus profunda anfractus angulato-truncatos disjungit; *apertura* perobliqua reniformis, intus rufo-brunnea; *peristoma* simplex, albo-sublabiatum, marginibus ad basin sinulos formantibus, callo tenui junctis. Diam. 28, alt. ad apert. 12 mm.

Helix cornea Linné Syst. Nat. X (1758) p. 770; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 527; S. N. XII (1767) p. 1243.
Planorbis purpura Müller Verm. Hist. II (1774) p. 154.
Planorbis corneus Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 74. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 14. f. 113. Moquin-Tand. Moll. Fr. II (1855) p. 145. t. 32. f. 4, 5, 6. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 93. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 138, fig. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 104; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 94.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Christianstad multis locis ex. gr. in Södra grafven, ad Tivoli, in Södra lergrafvarne, ad Nosequarn, ad Möllerö (MALM et ipse), in Hörby å, ad Lund, in lacu Ringsjön, circa Stehag frequens (C. A. W.), ad Smedstorp (E. HEMBERG!); prov. Blekinge in stagnis ad Sissebäck (juxta finem Scaniæ); prov. Södermanland: in lacu Öknasjön (HEMBERG!); ad Stockholm vulgaris, ex. gr. in piscina in Carlbergs park, in K. Djurgården, in lacubus Bomsjö, Clara sjö etc. (WIKSTRÖM), ad Stora Sickla et in aqua salsa ad Skurusund inter Skuru park et Dufnäs (HARTMAN); prov. Upland: ad Ultuna prope Upsala (ZETTERSTEDT!!); prov. Westmanland: in regione lacus Mälaren sat frequens (JOHANSON!); prov. Jemtland: in lacu Storsjön rarior (NYSTRÖM). Testa ergo occurrit in provincia maxime meridionali et in prov. intermediis et subborealibus regni, desideratur autem in parte magna interjacente et in Norvegia.

PLANORBIS *AMMONOCERAS mh.

Testa magna, crassa, solida, parum pellucida, depressa, tenuiter arcuatim striata, polita, cornea, supra rufescens vel cœrulescens, medio late concava, subtus albida vel virescens; *anfr.* 6—7, celeriter accrescentes, teretes, ultimus aperturam versus parum dilatatus, utrinque ceteris parum altior; anfr tantum 3—4 supra visibiles; *sutura* supra profunda, subtus, anfractibus planulatis, sublinearis; *apertura* subobliqua, ovato-lunata, intra marginem linea alba et fascia purpurea; *peristoma* simplex, marginibus callo tenui junctis. Diam. 32, alt. ad apert. 13 mm. *Testa junior* (ad 10 mm. diam., anfr. 3—4) albida, pellucida, tenuis, striis longitudinalibus, parallelis, subundulatis, setigeris. (Mensuræ testæ lat. 25 mm.: apert. 10 mm. diam., 7 mm. alt., anfr. ultim. ad apert. 9 mm., spira subtus inter partem inferiorem aperturæ et anfr. ult. $11\frac{1}{2}$ mm. lat. — Mensuræ Plan. cornei lat. 25 mm.: ap. 13 mm. diam., $7\frac{1}{2}$ mm. alt., anfr. ult. ad apert. 11 mm., spira subtus 9 mm. lat.).

Planorbis corneus var. 1. nordenskiöldii Mörch Syn. Moll. Dan. p. 48 (ex spec. orig. a celeberr. Steenbuch missis). Bourguignat novam speciem *Pl. nordenskiöldii* verosimiliter ex figuris apud Nord. et Nyl. (Finl. Moll. f. 48) creavit, enim specimina hujus testæ e Finlandia mihi missa sunt omnia veri *Pl. cornei*, sed specim. "Planorbis sp. ind. n:o 1337" in museo zoologico in Helsingfors, a prof. Nordmann in Donau capta, omnino cum testa nostra congruunt.

*Planorbis *ammonoceras* Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 94.

Testa junior:

Planorbis etruscus Ziegl., Rossm.

Planorbis transsylvanicus Stenz, Bielz.

Planorbis banaticus Lang, Küster.

Planorbis similis Bielz (spec. numerosa misit Bielz).

Planorbis pumila Mörch.

Pullus:

Planorbis similis Müller?

Hab. In **Suecia** hæc forma in Öland multis locis, ex. gr. in Resmo mosse et in piscinis in Kungsträdgården ad Borgholm, copiosissime occurrit (C. A. W.); in ins. Gotland vivit in amnibus Dedeå, Gothemsån, Mästerby, et in stagnis ad Länna (LINDSTRÖM); in prov. Skåne ad Trollenäs (J. LINDAHL!!).

2. *Tropidiscus* STEIN. *Testa* anfractu ultimo carinato.

2. PLANORBIS UMBILICATUS MÜLL.

Testa fusca, cornea, opaca, sæpe strigis sanguineis, utrinque concava; *anfr.* 6—7, convexi, ultimo majori, deorsum carinato; *apertura* rotundato-ovalis. Diam. 12—20 mm.

Helix planorbis Linné Syst. Nat. X (1758) p. 769; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 527.
Planorbis umbilicatus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 160. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 50. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 99; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 88.
Planorbis marginatus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 45. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 80. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 102. f. 59. Friele Norske Moll. (1853) p. 30. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 63. f. 52.
Planorbis complanatus Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 76. t. 2. f. 18. Moq.-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 428. t. 10. f. 18—28. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 91. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 143.
Planorbis linnéi var. marginatus Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 137.

β **filocinctus** mh.: nitidula, carina expressa, filiformi, utrinque sulco impresso.
γ **submarginatus** JAN., HARTM.: testa anfractibus utrinque convexis, carina submediana. — *Pl. intermedius* CHARP.
δ **ecarinatus:** anfr. aperturam versus tereti; carina evanescens.
ε **labiatus** mh.: testa apertura albo-labiata.
Monstr. 1. Testa pyramidalis, rufo-brunnea, subtilissime striata; anfr. 6, lineares, vix convexiusculi, superne ad suturam truncati, ultimus margine inferiore acutangulo, convexus; apertura circinnata, marginibus conjunctis, exteriore acuto, columellari ad umbilicum profundum et apertum late reflexo. Alt. 7 mm., diam. ad basin 5 mm. — Figura optima in Woodwards Manual of the Mollusca p. 172.
Monstr. 2. Testa anfractibus obtuse angulatis, passim sejunctis, ultimus aperturam versus liber.

Hab. In Suecia hæc species passim vulgaris a parte maxime meridionali prov. Skåne, saltem usque in prov. Jemtland, ubi in fluvio Ragundaelf copiose invenit clar. NYSTRÖM. *Monstr.* 1. ad Klinta prope lacum Ringsjön in Skåne invenit et benigne communicavit amiciss. ROTH. *Monstr.* 2. ad Hjelmsund prov. Skåne invenit J. LINDAHL! In Norvegia passim ad Christiania et Bergen (FRIELE).

3. PLANORBIS CARINATUS MÜLL.

Testa pallida, calcarea, pellucida, nitida; *anfr.* 4—5, compressi, ultimo medio acute carinato; *apertura* ovalis, utrinque angulata. Diam. 10—16 mm.

Planorbis carinatus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 175. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 81. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 102. f. 60. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 431. t. 30. f. 29—33. Jeffreys Brit. Conch. I (1862)

p. 89. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 142. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 49. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 100; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 89.
Planorbis linnéi v. carinata Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 137.

β **disciformis** JEFFR.: testa lutescens, carina submediana, anfractu ultimo magno, aperturam versus dilatato. — *Pl. carin. var. disciformis* JEFFR. Brit. Conch. I. p. 90.

γ **numullaris** MÖRCH: testa compressissima, foliacea, inæqualiter flexa.

δ **turgidus:** testa obscura, supra convexa, subtus plana, inferne carina tenui; anfr. rapide crescentes, supra sutura profunda disjuncti; apertura rhombea, sæpe labio lato lacteo. — WESTERL. Coll. Typ. n:o 90.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Lund, Malmö, Christianstad, in lacubus Krageholmssjön (HEMBERG!), Ringsjön et multis aliis locis; prov. Blekinge in maxime occidentali parte (ex. gr. in lacu Wesan, in stagnis ad Gammalstorp et Sissebäck); prov. Småland: ad Jönköping (O. NORDSTEDT!), ad Westraby et in Romelsjö (HEMBERG!); ins. Öland in Resmo mosse rarior (C. A. W.); ins. Gotland in Dalhemså par. Löjsta (LINDSTRÖM); prov. Östergötland multis locis; prov. Westergötland in lacu Kopparsjön par. Mölltorp (J. A. WALLIN!!); prov. Nerike: ad Skebäck et in Markkärret (HARTMAN), ad Mellösa (HELLBOM) et ad Broby bro par. Wiby (ZETTERSTEDT!); ad Stockholm in lacu Trehörningen par. Brännkyrka (HÖGBERG sec. WIKSTRÖM), ad Carlberg (ANDERSSON!); prov. Upland ad Upsala (LILLJEBORG!); prov. Dalarne in par. Gustaf (RIDDERBJELKE sec. JOHANSON!), ad Säther (ANDERSSON!); prov. Helsingland ad Bollnäs, Björktjärn (F. SÖDERLUND!!).

Les deux dernières espèces décrites sont tout aussi souvent réunies que séparées par les divers auteurs, et persuadé qu'elles ne constituent que des formes locales d'une seule et même espèce, M:r MALM les a réunies sous le nom de *P. linnéi*. Je crois devoir, pour ma part, les considérer, avec NILSSON, ROSSMÄSSLER, STEIN, JEFFREYS, REEVE, etc. comme des espèces distinctes. Outre que la couleur des animaux est toujours constamment différente (toujours noire chez *Pl. umb.*, brun rouge chez de jeunes et jaunegris chez de vieux individus de *Pl. carinatus*) je n'ai jamais vu de transitions véritables, quoiqu'ils se présentent souvent des variétés accidentelles ou locales de *Pl. umb.* à coquille passablement aplatie et dont la caréne se trouve par suite placée plus au milieu du dernier tour de spire, et de *Pl. carin.* la forme indiquée ci-dessus, avec une coquille plus foncée et plus ventrue. Toutefois cela ne constitue pas des transitions. La nature de la coquille sépare toujours les 2 espèces, car chez *Pl. umbil.* elle est dure, solide et cornée, tandis que ches *Pl. carin.*, elle est mince, fragile, transparente et calcaire. Des exemplaires d'égales dimensions chez toutes les deux ont 6—7 tours d'hélice chez la première, mais 4—5 seulement chex la seconde, qui possède en outre une embouchure toujours plus pointue. M:r MALM dit dans les Mémoires de la Société des Sciences et de Belles-Lettres de Gothembourg (IIIième cah., p. 138): "je n'ai jamais trouvé le *Pl. carinatus* que dans des eaux

courantes (fraiches), et plus l'eau où s'est rencontré le *Pl. marginatus* à été enfermée et étroite, plus les tours de spire ont été arrondis chez ce type. "Je dirai pour mon compte que les deux espèces se rencontrent en abondance dans la même fosse presque desséchée près de la barrière de l'ouest à Lund, et que *Pl. carinatus* a été le seul de ces deux que j'ai trouvé dans les tourbières vaseuses de Sissebäck.

4. PLANORBIS VORTEX (LIN.).

Testa depressissima, supra concava, subtus planissima vel convexiuscula, pallida, lutescens, vel fusca; *anfr.* 6—7, sensim accrescentes, supra parum convexi, subtus omnino plani, ultimus penultimo multo latior, præsertim subtus tenuissime, sed regulariter et confertim striatus, deorsum subcarinatus, impressione margini paralleli, ad aperturam strictus; *sutura* supra profunda, subtus linearis; *apertura* omnino horizontalis, transverse subcordato-lanceolata, superne subcanaliculata; *peristoma* simplex, acutum, margine dextro parum producto. Diam. 10—12 mm.

Helix vortex Linné Syst. Nat. X (1758) p. 172; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 527.
Planorbis vortex Müller Verm. Hist. II (1774) p. 158. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 79. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 104. f. 61. Friele Norske Moll. (1853) p. 31. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 433. t. 30. f. 34—37. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 62. f. 51. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 88. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 51. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 101; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 91.

β **compressus** MICH.: testa depressissima, tenuis, fragilis, anfr. ultimus medio angulato-carinatus.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Lund, Sireköpinge (MALM), Hjelmslund (J. LINDAHL!), in Krageholmssjön (E. HEMBERG!), ad Tivoli prope Christianstad (C. A. W.) et multis aliis locis; prov. Blekinge, in parte maxime occidentali, ex. gr. in lacu Wesan et in stagnis ad Gammalstorp (GOSSELMAN); prov. Småland, ad Jönköping (O. NORDSTEDT!), Rosendal (E. HEMBERG!); ins. Öland, in rivulo ad Stora Dahlby (C. A. W.); ins. Gotland, in amnibus majoribus non frequens (LINDSTRÖM); prov. Östergötland, in plerisque fluviis et paludibus; prov. Nerike, ad Örebro et Askersund (HARTMAN!); prov. Wermland, in Hammarösjön (C. LINROTH!); ad Stockholm, in piscina ad Carlberg, in Kongl. Djurgården, in Clara sjö (WIKSTRÖM), in Djurgårdsbrunnsviken prope Blåporten (HARTMAN); prov. Upland, ad Upsala (ZETTERSTEDT!, LILLJEBORG!); prov. Westmanland, multis locis in lacu Mälaren (C. H. JOHANSON!); prov. Dalarne, in Ösjön, par. Fulkärna (C. H. JOHANSON!). In **Norvegia** ad Christiania et Bergen non rarus (FRIELE).

PLANORBIS *GOËSI mh.

Testa depressissima, supra et infra medio æqualiter excavata, rufescens; *anfr.* 6, lente accrescentes, primi utrinque æqualiter convexi, ultimus penultimo multo latior, supra convexus, subtus planulatus, striolis vix conspicuis, basi subcarinatus, ad aperturam deflexus; *sutura* utrinque profunda; *apertura* obliqua, deflexa, subcordato-ovalis; *peristoma* simplex, acutum, margine dextro arcuate producto. Diam. 6—8 mm.

Hab. In Suecia ad Mjölsefall prov. Östergötland, haud rarus. — Nomen subspecificum in memoriam inventoris, beat. doctoris E. v. Goës, qui faunam malacologicam patriæ sub vita longa et etiamnum in ætate provecta præcipue amavit et deligenter quæsivit.

5. PLANORBIS DISCUS Parr., Rossm.

Testa discoidea, supra convexiuscula, subtus concava, lutescenti-albida (sæpe limo obducta), glabra, nitidula, tenera; *anfr.* 5, lente accrescentes, ultimus supra convexus, subtus planiusculus, basi angulatus, impressione margini paralleli destituta; *sutura* utrinque profunda; *apertura* oblique subcordata; *peristoma* rectum, simplex, tenerum, lamella tenuissima continuum. Diam. 5—6, alt. 1 mm.

Planorbis discus Rossmässler Iconogr. XVIII (1859) p. 134. f. 965. Westerlund Malak. Bl. 1867, p. 201.

Hab. In Suecia hanc testam in lacu Täkern prov. Östergötland 1867 inveni et ab Ultuna prope Upsala prov. Upland specimina numerosa, a. 1851 lecta, amic. J. E. Zetterstedt communicavit. (Celeberr. Parreyss, cui exempl. a. 1869 misi, speciem approbavit).

6. PLANORBIS SPIRORBIS (Lin.) Müll.

Testa depressa, utrinque medio plus minus concava, corneo-fusca vel flavescens, interdum albida, arcuatim striatula, nitidula; *anfr.* 5—5½, sensim accrescentes, teretes, ultimus major, cylindraceus, inferne obsolete carinato-angulatus, subtus planulatus, ad aperturam fascia e labro flava; *apertura* parva, obliqua, rotundata, subangulata; *peristoma* albo-labiatum, marginibus lamina tenuissima albida sæpius conjunctis. Diam. 5—6 mm.

Helix spirorbis Linné Syst. Nat. X (1758) p. 770; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 528. *Planorbis spirorbis* Müller Verm. Hist. II (1774) p. 161. Nilsson Hist. Moll. Su. (1872) p. 78. Friele pr. p. Norske Moll. (1853) p. 34. Nord. et Nyl. pr. p.

Finl. Moll. (1856) p. 61 (nec fig. cit.). Jeffreys pr. p. Brit. Conch. I (1862) p. 87. Reeve pr. p. Brit. Moll. (1863) p. 145. fig. Westerlund pr. p. Sv. Moll. (1865) p. 102; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 93.

Planorbis rotundatus Mörch pr. p. Syn. Moll. Dan. (1865) p. 51.

β **major:** testa anfr. 6—7; diam. 7—8 mm. — *Pl. septemgyratus* MÖRCH Syn. Moll. Dan. p. 51 (ex spec. orig.). *Pl. spirorbis var. septemgyratus* WESTERLUND Sv. Moll. p. 102.

PLANORBIS *ROTUNDATUS POIRET.

Testa compressa, supra vix concava, centro impresso, subtus plana, corneo-fusca, nitidula, sublævis, sæpe limo obducta; *anfr.* 6—6 ½, tardissime accrescentes, supra semiteretes, subtus planiusculi, ultimus parum latior, deorsum obtuse carinatus; *apertura* parva, obliqua, angulato-rotundata; *peristoma* leviter albo-labiatum, marginibus sæpius sejunctis. Diam. 5—6 mm.

Planorbis rotundatus Poiret Prodr. (1801) p. 93. Mörch pr. p. Syn. Moll. Dan. (1864) p. 51.

Planorbis leucostoma Millet Moll. Maine et Loire (1813) p. 16. Rossmässler Iconogr. I (1853) p. 105. f. 62. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 75. t. 2. f. 16. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 435. t. 33. f. 38—46.

Planorbis spirorbis Friele, Nord. et Nyl. (f. 49!), Jeffreys, Reeve, Westerlund pr. p. ll. cc.

Hab. In Scandinavia illæ formæ eandem fere distributionem habent, prior tamen multis locis rarior videtur. In **Suecia** ubique in prov. Skåne; in parte maxime occidentali prov. Blekinge; in prov. Öster- et Westergötland multis locis; in regionibus mediis et meridionalibus ins. Öland vulgares (in ins. Gotland non inventæ!); prov. Nerike, nonnullis locis circa Örebro (HARTMAN); ad Stockholm passim, ex. gr. ad Carlberg, Djurgården, Clara sjö, Drottningholm etc. (WIKSTRÖM); prov. Upland ad Upsala (JOHANSON! LILLJEBORG!); prov. Westmanland passim, suis locis frequentes (JOHANSON!); prov. Wermland ad Carlstad et aliis locis (C. LINROTH!). *Pl. spir.* β ad Lund prov. Skåne (J. A. WALLIN!!) et prov. Dalarne in Hedemora (C. E. GRILL teste C. G. ANDERSSON!!). In **Norvegia** non parce ad Christiania et Bergen.

Dans le 1er Cahier p. 106 de son Iconographie, ROSSMÄSSLER décrit un Planorbis sous le nom de "*Pl. spirorbis* MÜLL.", sur quoi il dit: "hier haben wir den echten *P. spirorbis* von MÜLLER, über den nur Diejenigen in Zweifel sein können, die MÜLLER nicht selbst zu Rathe ziehen." Cette thèse est pourtant incorrect. La coquille que ROSSMÄSSLER décrit et dont il donne des dessins pl. 2. f. 63, n'est pas la même donnée par MÜLLER sous le même nom, mais une forme, peut-être même une espèce qui n'a pas encore été trouvée en Scandinavie et qui se distingue de la

précédente par un plus petit nombre de tours de spire (5 seulement) lesquels croissent rapidement, de sorte que le dernier est considérablement plus haut et plus large que l'avant dernier (subitement étendu à l'ouverture) parfaitement arrondi, sans indice de carène ou de marge, par une ouverture complètement ronde, échancrée légèrement en croissant uniquement par la paroi même de l'ouverture, par un lèvre plus évidente, etc. (Westerlund Sv. Moll. p. 103). Dès-lors O. Mörch l'a nommé *Planorbis dazuri* (Amer. Journ. of Conch., 1868). Le type (de Leipsic) de Rossmässler, est parfaitement le même decrit par Stein (l. c. p. 75) sous le nom de *Pl. spirorbis*, et dessinée par lui (T. 2. f. 17). M. le Dr. E. v. Martens a bien voulu m' en envoyer de magnifiques exemplaires typiques du jardin zoologique de Berlin. Cette forme se rapproche, il est vrai de *P. spirorbis* de Müller, mais elle constitue sans nul doute une espèce parfaitement distincte. Une description comparative avec la forme précédente, serait peut-être à sa place, quoique cette espèce n'appartienne pas à la région dont j'ai entrepris d'explorer les mollusques. Mais cette exploration ne peut être possible qu'avec la connaissance et la comparation assidue des autres types européens des même genres. Le même fait s'applique à une autre coquille très-voisine, mais non moins confondue avec elle, *Pl. septemgyratus* Ziegler, qui se rattache à *Pl. leucostoma*, à peu près de la même manière que *Pl. spirorbis* à *Pl. dazuri*.

Planorbis dazuri Mörch. *Testa* depressa, solida, supra centro impresso, subtus concaviuscula, cornea vel flavescens, lævis, nitidula; *anfr.* 5, teretes, sat celeriter accrescentes, ultimus amplior, aperturam versus latus, sed margine exteriore regulariter arcuato; *apertura* sat magna, subrotunda, *peristomate* intus labio crasso, nitido, marginibus callo albo sæpe valido nitidoque conjunctis. Diam. 5—5½ mm. — *Planorbis spirorbis* Rossmässler Icon. I. p. 106. f. 63. Stein Schn. u. Musch. Berl. p. 75. t. 2. f. 17. Bielz Fauna Moll. Sieb. p. 179. *Plan. spir. var. ecarinata* Jeffreys Brit. Conch. I. p. 87. *Pl. dazuri* Mörch Amer. Journ. of Conch. 1868. I. p. 27. *Pl. dalmatinus* Parreyss (in ex.).

Planorbis septemgyratus Ziegl., Rossm. *Testa* compressissima, fragilis, utrinque concaviuscula, flavescens vel pallide brunnea, dense arcuatim striatula, nitidula; *anfr.* 7, arctissime spirati, ultimus superioribus vix latior, deorsum carinatus; *apertura* angulato-rotundata, vix labiata, marginibus sejunctis. Diam. 7—9 mm. — *Planorbis septemgyratus* Rossm. Ic. I. p. 106. f. 64.

3. *Bathyomphalus* Agass. *Testa* depressa, vix carinata, subtus infundibuliformis, arctispira; *apertura* lunari-reniformis.

7. PLANORBIS CONTORTUS (Lin.).

Testa brunnea vel fulva, subnitida, subtiliter arcuatim oblique striata, supra plana cum fossula centrali, subtus infundibuliformis (excavatio regularis, æque lata ac profunda); *anfr.* 6—7 (8), vix accrescentes, anguste compressi, sibi invicem perpendiculariter adpressi, extus teretes, *sutura* profunda, canaliculata, disjuncti; *apertura* parva, oblique depresso-lunarireniformis; *peristoma* acutum. Diam. 4½, alt. 2 mm.

Helix contorta Linné Syst. Nat. X (1758) p. 770; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 528. *Planorbis contortus* Müller Verm. Hist. II (1774) p. 162. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 73. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 16. f. 117. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 443. t. 31. f. 24—31. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 94. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 52. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 103; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 92.

PLANORBIS *DISPAR mh.

Testa depressa, obscura, sæpe nigrescens, subtiliter arcuatim oblique striatula, supra plana, centro impresso, subtus medio concava (excavatio magna, irregularis, centro distincta, multo latior ac profunda); *anfr.* 6—7, arcte convoluti, tardissime accrescentes, sibi invicem subperpendiculariter adpressi, *sutura* profunda, canaliculata separati; *apertura* rotundato-reniformis; *peristoma* acutum. Diam. $4\frac{2}{3}$, alt. $1\frac{1}{2}$ mm.

Planorbis contortus Friele Norske Moll. (1853) p. 32. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 62. f. 50.

Hab. In **Suecia** hæc species sub formis allatis per totum regnum, a maxime meridionali parte prov. Skåne saltem usque in Luleå Lappmark, ad. 67—68 lat. bor., distributa, locis plerisque (prov. Blekinge, ubi rara, excepta) frequens. In **Norvegia** passim ad Christiania et Bergen (FRIELE). *Pl. *dispar* præsertim regiones boreales habitat.

4. *Gyraulus* AGASS., HARTM. *Testa,* saltem junior, sæpe hispida, anfractibus paucis, celeriter accrescentibus, ultimo aperturam versus plus minus dilatato.

8. PLANORBIS ALBUS MÜLL.

Testa tenuis, alba, raro fusca, virescens vel cornea, subtiliter et confertim transverse striata, semper lineis spiralibus plus minus prominentibus clathrata; *anfractus* ultimus aperturam versus dilatatus; *apertura* obliqua, expansa, subdeflexa.

α **mülleri:** testa albida, pellucida, raro subfusca vel rufescens, utrinque æque umbilicata; anfr. in adultis ad summum 4, celerrime accrescentes, subteretes, ultimus aperturam versus subite et forte dilatatus, reliquis omnibus major et latior, sine ullo vestigio anguli aut carenæ; apertura rotundato-ovata; diam. 4—5 mm. — *P. albus* MÜLLER Verm. Hist. II (1774) p. 164.

β **hispidus** DRAP.: testa tenuis, albescens, utrinque concaviuscula, supra plana cum fossula centrali, subtus umbilicata, lineis spiralibus spinulis

fragilibus et caducis, armato oculo elongato-conicis, hispidis; anfr. 3—4, teretes vel subdepresso-teretes; apertura larga, ovali-rotundata; diam. 4—5 mm. — *Pl. hispidus* DRAPARNAUD Hist. Moll. (1805) p. 43. NILSSON Hist. Moll. Su. (1822) p. 76. FRIELE Norske Moll. (1853) p. 33. *Pl. albus* NORD. et NYL. Finl. Moll. (1856) p. 65. t. 4. f. 54.

γ **lemniscatus** HARTM.: testa solidula, corneo-fusca, supra planiuscula, subtus umbilicata; anfr. $4\frac{1}{2}$—5, ultimus parum dilatatus et deflexus, membranaceo-carinatus; apertura cordato-ovata, oblique expansa; diam. 5—6 mm. — *Gyraulus lemniscatus* HARTMANN Gasterop. Schw. (1844) p. 93. *Pl. albus var. α* WESTERLUND Sv. Moll. (1865) p. 105.

δ **cinctutus** mh.: testa tomento albescente undique tecta, pallida, tenera, utrinque (subtus magis) centro-concava; anfr. 4—$4\frac{1}{2}$, ultimus depressus, demum subangulatus, membrana debili carinali cinctus; apertura satis obliqua, transverse ovali-rotundata, diam. 6—7 mm. — *Pl. albus var. cinctutus* WESTERLUND Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 96.

Hab. In **Suecia** hæc testa variabilis per totum fere regnum in fluviis et fossis haud raro occurrit (in ins. Gotland tamen loco tantum unico rarissime reperta). *γ lemnisc.* ad Ronneby prov. Blekinge, ad Borgholm ins. Öland (C. A. W.) nec non in fluvio Dalelfven ad Wabäck par. Gustaf prov. Dalarne (RIDDERBJELKE teste clar. JOHANSON!!). *δ cinct.* ad Carlstad prov. Wermland (O. LINROTH!!). In **Norvegia** passim ad Christiania et ad Bergen (FRIELE).

PLANORBIS *GOTHICUS mh.

Testa fulvo-cornea, solidula, tenuissime spiraliter et transversim striata, supra umbilicata, subtus omnino plana, vix medio impressiuscula; *anfr.* $4\frac{1}{2}$, celeriter accrescentes, omnes tantum in latere testæ inferiore visibiles, ubi sutura impressa, anfractus elevati et convexi; ultimus aperturam versus leviter dilatatus, in medio dorsi carinatus, utrinque convexiusculus; *apertura* cordiformis, perobliqua. Diam. 5 mm.

Hab. In **Suecia** hanc formam a. 1865 ad Pirkum par. Sandhem prov. Westergötland legit et mihi numerosa exempl. benigne misit amic. O. NORDSTEDT; infra Mösseberg a. 1867 ipse cepi.

PLANORBIS *DRAPARNALDI JEFFR.

Testa albida vel fulvo-cornea, solidula, supra planiuscula, subtus umbilicata, spiraliter confertim elevato-lineata; *anfr.* $4\frac{1}{2}$, regulariter et lente accrescentes, ultimus in junioribus teretiusculus, vix dilatatus, demum de-

pressus, angulato-carinatus; *apertura* rotundato-subovalis, in junioribus ovali-reniformis. Diam. 5—6 mm.

Planorbis draparnaldi Jeffreys in Linn. Soc. Trans. XVI (1830) p. 386; Brit. Conch. I (1862) p. 84 (ex exempl. orig. ab auctore ipso missis!). Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 53 (spec. juniora ex exempl. origin.). Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 105; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 96**.

Hab. In **Suecia** in Keflingeå prope Lund et in palude juxta urbem, occidentem versus, prov. Skåne; in lacu Herrstorpssjön, in fossa prope Ronneby et in rivo ad Möllenäs par. Hoby prov. Blekinge inveni; in Ljungstorps göl par. Rinna prov. Östergötland cepit et misit beat. E. v. Goës. In **Norvegia** in Jæderen (clar. H. FRIELE, ex specim.)

PLANORBIS *DEFORMIS HARTM.

Testa solidula, corneo-fusca, transverse dense et spiraliter minutissime striata, supra et subtus medio subæqualiter concaviuscula; *anfr.* ($4\frac{1}{2}$) 5, ultimus vix dilatatus, non deflexus, utrinque plano-concaviusculus, medio angulato-carinatus (raro membranaceo-carinatus), anfr. primi convexi, subteretes, sutura profunda distincti; *apertura* cordato-ovalis, obliqua. Diam. 5 mm.

Gyraulus deformis Hartmann Erd- u. Süssw. Gasterop. Schn. (1844) p. 95.

Hab. In **Suecia** ad Ronneby (in fossis ad amnem) prov. Blekinge copiose (C. A. W.); ad Hjelmslund prov. Skåne (J. LINDAHL!!); ad Carlstad prov. Wermland (C. LINROTH!!); in Olofsfors prov. Westmanland (C. H. JOHANSON!!). — In lacu Bodensee ad Fredrichshafen in Helvetia celeberr. E. v. MARTENS Planorbem cepit et mihi 2 exempl. sub nomine *Pl. deformis* benigne misit, quem pro specie optime distincta habeo et cui nomen *Pl. cavatum* propono. Diagn. Testa solida, subcrassa, pallide cornea vel albida, transversim ruguloso-striata, *lineis spiralibus omnino destituta*, supra convexiuscula, subtus *concava aut late et profunde umbilicata;* anfr. $4\frac{1}{2}$, celeriter accrescentes, ultimus latus, depressus, medio angulatus, subcarinatus, utrinque æque plano-convexiusculus, ad aperturam deflexus; apertura perobliqua, ovali-rotundata; peristoma simplex, *continuum*, affixum. Diam. 7 mm.

PLANORBIS *GREDLERI E. A. BIELZ.

Testa solida, corneo-lutescens vel pallide cornea, subnitida, sæpe sordide ferruginea vel fusca obtecta, supra concaviuscula, subtus umbilicato-concava, subtiliter et conferte transversim striata, striis spiralibus subtilissimis clathrata; *anfr.* $4\frac{1}{2}$, celeriter accrescentes, primi teretes, ultimus depresso-teres,

demum subangulatus; *apertura* satis obliqua, subovalis; *peristoma* sæpius simplex, acutum, interdum intus leviter albo-labiatum. Diam. 7 mm.

Planorbis gredleri E. A. Bielz in Tirols Land- u. Süssw. Conch. II. Abth. von V. M. Gredler p. 9. (Ex. orig. e Tirolia benigne misit rever. V. Gredler).

Hab. In Suecia in Funnäsdalssjön prov. Herjedalen (dr. F. Söderlund!!); ad Arjeploug etc. in Piteå Lappm. frequ. (E. Hemberg!!). In Norvegia ad Christiania et ad Drammen (amic. R. Collet!!), ad Laurgaard in Gudbrandsdalen (O. Nordstedt!!), in par. Hof (O. S. Jensen!!).

9. PLANORBIS ROSSMÄSSLERI Auersw.

Testa corneo-lutescens, nitida, sæpe sordide ferruginea obtecta, supra concaviuscula, subtus umbilicato-concava, subtiliter transversim striata, inconspicue clathrata; *anfr.* 4, celeriter accrescentes, teretes, non carinati; *apertura* subrotunda, parum obliqua; *peristoma* sæpius albo-labiatum, lamella tenui continuum. Diam. 5—6 mm.

Planorbis rossmæssleri Auerswald, Ad. Schmidt Zeitschr. f. Malak. 1851. p. 179. Rossmässler Iconogr. XVIII (1859) p. 131. f. 962 (ex. typica, a beat. Rossmässler ipso in loco originali ad Leipzig capta, communicavit clariss. E. v. Martens).

Planorbis albus Nord. et Nyl. pr. p. Finl. Moll. (1856) p. 68. v. Wallenberg Luleå Lapplands Moll. in Mal. Bl. V (1858) p. 114; De Moll. Lapp. Lul. (1858) p. 32.

Hab. In Suecia boreali, ad Jörn etc. in Piteå Lappm. (E. Hemberg!!); ad Qvickjock (anfr. 4, alt. ad ap. 1,8, diam. maj. 6, min. 5,2; exempl. max. alt. ad ap. 2,3, diam. maj. 7,4, min. 6,2 mm.: Wallenb. l. c.; ex. 2 ab eodem loco mihi benigne misit prof. Lovén) in Luleå Lappmark; ad Karesuando in Torneå Lappmark (ex. 5 juniora amiciss. prof. Lilljeborg misit); ad Juckasjärvi et in Enare cepit celeb. Malm (ex. 4 mihi donavit prof. Lovén).

10. PLANORBIS LIMOPHILUS Westerl.

Testa depressa, supra centro concaviuscula, subtus late et profunde concava, perspective umbilicata, corneo-lutescens, cum animale vivo pulchre coccineo-rufa, glaberrima, nitidula, striata, subtilissime spiraliter lineata; *anfr.* 5, parum celeriter accrescentes, teretes, ultimus demum depressiusculus, non carinati, vel ultimus interdum linea tenuissima carinali cinctus; *sutura* utrinque profunda; *apertura* rotundata, ne quidem minime superne angulata, obliqua; *peristoma* acutum, simplex, fragile, margine exteriore producto, columellari valde sinuato. Diam. 5 mm.

Planorbis limophilus Westerlund Beschreib. u. Kritik neuer Moll. in Malak. Bl. XIV (1867) p. 204; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 96*.

Hab. In Suecia hanc speciem in rivulo limoso ad litus orientale lacus Herrstorpssjön prope Ronneby prov. Blekinge inveni; ad Christianstad in prov. Skåne et ad Ultuna in prov. Upland cepit et misit celeberr. LILLJEBORG.

"Diese durch ihren Habitus, durch viele gute Kennzeichen und durch ihren eigenthümlichen Aufenthaltsort (sie ist immer tief in den Schlamm hineingekrochen) gut charakterisirte Schnecke (nach der grossen Anzahl vollkommen übereinstimmender Exemplare, die ich gefunden habe, zu urtheilen) gehört zur formreichen Sippschaft des *Pl. albus*. Von diesem unterscheidet sie sich durch einen Umgang mehr (*Pl. albus* hat gewöhnlich nur $3\frac{1}{2}$ Umgänge), durch das viel allmähligere Zunehmen der Umgänge, durch den letzten Umgang, der bei gleichen Exemplaren viel schmäler ist (nicht gegen das Ende hin niedergedrückt und erweitert) und die Schnecke also beinahe cirkelrund, durch die sehr tief und weit ausgehöhlte Unterseite, durch die schiefere Mündung (der Ausserrand schwach vorgestreckt, der Innenrand stark ausgebuchtet, bei *Pl. albus* umgekehrt) u. s. w. *Pl. rossmässleri* unterscheidet sich dadurch, dass die Mündung wenig schief ist, dass sie eine milchweise Lippe am Aussenrande hat, dass die Umgänge 4, sehr schnell an Breite zunehmend sind (dass die Naht oben eine tiefe Rinne bildet) u. s. w.; *Pl. glaber* dadurch, dass die Mündung viel weniger schief ist, dass die Umgänge 4 sind, dass die Unterseite viel weniger vertieft ist und dass die Spirallinien ganz fehlen; *Pl. draparnaldi* dadurch, dass die Umgänge 4, sehr schnell zunehmend sind, dass der letzte sehr starke Spirallinien und nach unten hin oft einen fadenförmigen Kiel hat (dass die untere Vertiefung viel kleiner ist) u. s. w.; *Pl cornu* dadurch, dass die 4 Umgänge sehr schnell zunehmen und der letzte eine zarte, vergängliche Hautliste hat, dass der Mundsaum innen mit einer zarten weissen Lippe belegt ist u. s. w. Immer und gleichmässig unterscheidet sich die neue Art von allen durch die sehr weit und tief ausgehöhlte Unterseite des Gehäuses." (WESTERL. Mal. Bl. a. a. O.) Nächstverwandt mit dem Amerikanischen *Planorbis defectus* SAY, jedoch auch von diesem gut verschieden.

11. PLANORBIS GLABER JEFFR.

Testa utrinque centro concava, tenera, nitida, subtilissime transversim striata (nec clathrata!), sordide luteola, supra convexiuscula; *anfr.* 4—$4\frac{1}{2}$, depresso-teretes, non angulati, celeriter accrescentes, ultimus aperturam versus non dilatatus, nec deflexus; *sutura* profunda; *apertura* ovali-rotunda, subcircularis; *peristoma* acutum, simplex, lamella tenui continuum, margine exteriore parum producto. Diam. 4—5 mm.

Planorbis glaber Jeffreys Trans. Linn. Soc. XVI (1830) p. 387; Brit. Conch. I (1862) p. 85 (ex. orig. auctor misit!). Reeve Brit. Moll. (1863) p. 140. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 52. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 106.

Planorbis lævis Alder Trans. Nat. Hist. Soc. Northumb. II (1830) p. 337 (teste Reeve). Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 442. t. 31. f. 20—23. Rossmässler Iconogr. XVIII (1859) p. 133. f. 964.
Gyraulus regularis Hartmann Gasterop. Schn. (1841) p. 97. t. 28.
Planorbis cupæcola v. Gallenstein Kärnth. Conch. (1852) p. 48.

Hab. In **Suecia** in rivo ad Kjelltorp par. Förlösa prov. Småland et in lacu Herrstorpssjön prope Ronneby prov. Blekinge inveni. In **Norvegia** ad Bergen (clar. H. FRIELE, ex specim.)

12. PLANORBIS MALMI nov. sp.

Testa minima, depressa, solidula, non pellucida, nitida, sed sæpius tegumine nigro-fusco illita, sæpe medio concaviuscula, subtus omnino plana; *anfr.* $3\frac{1}{2}$, teretes, parum crescentes, omnes utrinque visibiles, ultimus sine ullo vestigio anguli aut carenæ, aperturam versus nec dilatatus, nec depressus; *sutura* præsertim subtus profunda; *apertura* subcircularis, depressiuscula; *peristoma* simplex, acutum, marginibus callo conjunctis, exteriore parum producto, interiore sinuato. Diam. 2, alt. $\frac{2}{3}$ mm.

Hab. In **Suecia** hanc speciem in lacuna juxta viam inter oppidum Borgholm et pagum Kohlstad ins. Öland a. 1865 inveni. — Diligentissimo naturæ scrutatori A. W. MALM, cui multa et bona fauna nostra debet, hanc formam exiguam sed insignem dicavi.

Cette coquille n'a pas de plus proche congénère que *Pl. rossmässleri*, mais s'en distingue immédiatement par une coquille plus petite du double, avec le même nombre de tours de spire (*Pl. rossm.* diam. 5 mm., hauteur $1\frac{1}{2}$ mm.) qui augmentent lentement (de sorte que le dernier est le prépondérant, faisant ainsi de l'espèce une image en miniature de *Pl. corneus*), par le manque du bourrelet intérieur évident d'un blanc de laiteux, relativement épais, en dedans du bord de l'ouverture, etc. Un novice omettrait peut-être cette espèce dans la pensée que c'etait un jeune individu d'une espèce plus grande (chez les genres — et le genre Planorbis est de ce nombre — qui n'indiquent pas la coquille parfaitement adulte par la terminaison precise de l'ouverture, mais où l'on n'a à s'appuyer que sur l'expérience, il est difficile, quand elle manque, de décider si l'on a devant soi une coquille adulte ou une non développée), mais de mon su, il n'en a été décrit aucune à laquelle on puisse avec quelque apparence de probabilité, rapporter la coquille en question comme un jeune exemplaire.

**Armiger* HARTM.

13. PLANORBIS CRISTA (LIN.).

Testa cinerascens, supra plana, subtus umbilicata, striata; *anfr.* 3—$3\frac{1}{2}$, celerrime accrescentes, primi cylindracei, ultimus pagina superna pla-

nulatus, inferne convexus, finem versus ampliatus, ad aperturam sub margine anfr. penultimi depressus; *apertura* larga, oblique oblongo-rotunda, marginibus continuis.

α **Cristatus** DRAP. *Testa* tenuissima, pellucida, albida vel pallide fulva; *anfr.* ultimus transversim subtilissime striatus, lateribus præterea costatus, costis in marginem prominentibus, carinam denticulatam reddunt. Diam. 2—2½ mm.

Nautilus crista Linné Syst. Nat. X (1758) p. 709.
Planorbis imbricatus Müller pr. p. Verm. Hist. II (1774) p. 165. Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 76.
Planorbis cristatus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 44. t. 2. f. 1—3.
Planorbis nautileus Friele Norske Moll. (1853) p. 33. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 66.
Planorbis nautileus var. cristata Jeffr. Brit. Conch. 1 (1862) p. 82.
Planorbis crista α Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 54. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 107; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 97.

a) testa alba, costis lateralibus extus in aculeos longos, apice acutos, elongatis.

β **Nautileus** LINN. *Testa* solidula, vix pellucida, cinerascens vel fuscenticornea; *anfr.* ultimus subtilissime striatus, costis obsoletissimis margine lævis. Diam. 3—4 mm. (ex. max.).

Turbo nautileus Linné Syst. Nat. XII (1767) p. 1241.
Planorbis imbricatus Draparnaud l. c.
Planorbis crista β Westerlund Coll. Typ. (1868) n:o 98.

Hab. In **Suecia** per partem meridionalem et mediam distributa, haud rara, sed magnitudinis suæ exiguæ causa facile prætervisa species. In prov. Skåne in fossis et stagnis circa Lund et Malmö multis locis, passim frequens; in prov. Blekinge in lacu Herrstorpssjön prope Ronneby et in stagnis ad Carlshamn (β maxima); ins. Öland in lacuna et in fossis inter Borgholm et Kohlstad nec non in rivulo ad Stora Dahlby; ins. Gotland ad Gröttlingbo, Länna et in Wallstena-à (LINDSTRÖM); prov. Småland in piscinis extra urbem Kalmar; prov. Westergötland in Stadswassen ad Göteborg (MALM), ad Mölltorp in Kopparsjön (J. A. WALLIN!!); prov. Östergötland ad Mjölsefall et in Alviken par. Nykil (E. v. Goës!!) nec non in fossis juxta viam inter Wäfversunda et Alvastra; prov. Nerike multis locis circa Örebro in amnis et fossis (HARTMAN); ad Stockholm in Gångsätra kärr in Lidingön (WIKSTRÖM), in lacu Bomsjön ad Carlberg (HÖGBERG sec. WIKSTRÖM), ad Stora Sickla et Nackanäs (HARTMAN); prov. Upland ad Upsala (JOHANSON!, LILLJEBORG!); prov. Westmanland ad Westerås et Norberg (JOHANSON!); prov. Dalarne (teste clar. JOHANSON!). Ubique forma

α rarior. *Crist. forma a)* prov. Skåne ad Rosenlund (clar. B. LUNDGREN!!) et in Rörsjön prope Malmö (O. NORDSTEDT!!), nec non ad Lund (O. NORDST.!!), prov. Blekinge ad Carlshamn. In Norvegia ad Christiania (FRIELE).

5. *Hippeutis* AGASS. *Testa* lenticularis, anfractibus paucis, depressissimis, ultimo forte ampliato; *apertura* depressa, oblique cordata.

14. PLANORBIS COMPLANATUS (LINNÉ).

Testa tenuis, plana, subdiaphana, supra convexiuscula, medio vix impressa, subtus anguste sed profunde umbilicata, nitidula, subcinerea, fusco-flavescens vel fulva (interdum albida); *anfr.* 4, valde depressi, ultimus subtilissime transversim striatus, forte ampliatus; *apertura* perobliqua, perverse cordata; *peristoma* simplex, acutum, margine dextro arcuate producto, sinistro subrecto. Diam. 4—5 mm. Animal atro-cinereum vel cœrulescens, tentaculis pallide cinereis, pede brevissimo et lato, vel griseo-lutescens, linea colli utrinque grisea.

Helix complanata Linné Syst. Nat. X (1758) p. 769; XII (1767); Fauna Su. ed. 2 (1746) p. 374; ed. 2 (1761) p. 527.

Helix fontana Lightfoot in Phil. Trans. LXXVI (1786) p. 165.

Planorbis complanatus Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 47. t. 2. f. 20—22. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 16. f. 116. Lilljeborg Vet. Akad. Öfvers. 1851. p. 282. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 139. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 54. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 108; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 99.

Planorbis fontanus Fleming, Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 79. t. 2. f. 22. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 129. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 426. t. 30. f. 10 - 17. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 147.

Planorbis lenticularis Sturm.

Planorbis nitidus Gray in Turt. Man. (1840) p. 268. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 81.

β **virescenti-alba.**

Hab. In Suecia, prov. Skåne ad Benestad (LILLJEBORG), Lund (O. NORDSTEDT!!), Hjelmslund (J. LINDAHL!!), Lillö prope Christianstad et in Lillasjö; prov. Blekinge ad Ronneby; prov. Halland (teste amic. ZETTERSTEDT!); ins. Gotland in Davidså ad Tröjeborg et in Gothems å (LINDSTRÖM); prov. Östergötland in Furåsa bete prope Lunna (E. v. GOËS!!); prov. Westergötland ad Göteborg in Stadsvassen et in fluvio Göta elf juxta Färjevägen (MALM); prov. Nerike ad Örebro in piscinis horti arcis et in Arnängarne, in fluvio Svartån prope Skibäck, in piscinis ad Esplunda

par. Ringkarleby (HARTMAN); ad Stockholm in Gângsätra träsk in Lidingön (HÖGBERG Typsaml. sub nomine *Pl. nitidi*), ad Blå Porten (ZETTERSTEDT!!); ad Upsala prov. Upland (JOHANSON! LILLJEBORG!); prov. Westmanland ad Johannisberg juxta Westerås (JOHANSON!). *β vir.-alba* in piscina horti Kungsträdgården ad Borgholm (diam. 5—5 ½ mm.) ins. Öland.

15. PLANORBIS RIPARIUS WESTERL.

Testa depressissima, subtus medio concava vel latissime umbilicata (omnes anfractus visibiles), subtiliter transversim striata, nitidula, subpellucida, lutescens, animale fœta suturate purpurea, sæpe crusta atra vel rufa obtecta; *anfr.* 3—3½ utrinque æqualiter plani, extremus ceteris multo latior, margine acutiusculo; *apertura* obliqua, elliptico-cordata (basi cordata, superne obtusissima); *peristoma* simplex, acutum, margine exteriore plus minus arcuate producto, columellari sinuato. Diam. 3, rarissime 3½ mm. Animal saturate purpureum, lineis longitudinalibus atris, tentaculis obscuris, basi purpureis.

Planorbis riparius Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 106; Malak. Bl. 1866. p. 47. O. Reinhardt Nachrichtsbl. Mal. Ges. 1870. p. 6.

Hab. In Suecia hanc speciem pulchram a. 1863 in ripa orientali lacus Herrstorpssjön prope Ronneby prov. Blekinge detexi, postea a. 1856 in rivulo ad Kohlstad prope Borgholm ins. Öland inveni; in prov. Skåne in fluvio Helgeå ad Christianstad hunc planorbem cepit prof. LILLJEBORG et in fossis ad Ringsjön, juxta pontem ad Bosjökloster, a. 1870 ipse legi. — Ex ore celeberr. MALM habeo, testam quam ad Göteborg in Stadswassen frequentem invenit, in Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III. p. 137 descripsit et "*Planorbem glabrum* JEFFR." nominavit, eandem ac meum *Pl. riparium* esse (testa speciei nostræ tamen non "utrinque subæqualiter convexiuscula", nec "apertura rotundato-ovalis"). Cfr. præterea quæ de illo *Pl. glabro* celeberr. E. v. MARTENS (in Malak. Blätt. VI. p. 164) et auctor (in Sveriges Moll. p. 106) scripserunt.

Subgen. *Segmentina* FLEM. *Testa* nitidissima, faucibus in omni ætate bis lamellis ternis coarctatis; lamina 1 parietalis, 2 laterales, rima intermedia triradiata.

16. PLANORBIS NITIDUS MÜLL.

Testa supra convexa, subtus planiuscula et umbilicata, nitidissima, subpellucida, rufo-fulva (raro viridi-cornea); *anfr.* 4, celeriter accrescentes,

ultimus amplior, omnes deorsum acutiusculi; *apertura* perobliqua, perverse cordata; *peristoma* acutum, margine dextro arcuate producto, sinistro subrecto. Diam. 5—6 mm.

Planorbis nitidus Müller Verm. Hist. II (1774) p. 163. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 82. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 15. f. 114. Friele Norske Moll. (1853) p. 31. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 424. t. 32. f. 5—9. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1863) p. 148. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 55. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 109; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 103.
Planorbis lineatus Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 79.

— **microcephalus** Charp., Moq.-Tand.: testa minor, pallida.

Hab. In Suecia ad Uddarp prope Christianstad (Malm), in Höje å (J. Lindahl!) ad Stehag (v. Porath), in lacu Ringsjön (A. J. Johansson!!), ad Lindholmen (Roth!!) et ad Lund prov. Skåne; ad Mörrum, in lacu Wesan, ad Gammalstorp, frequens et maxima ad Carlshamn (Gosselman et ipse), ad Carlskrona, copiose in piscinis ad Lyckeby (J. Ankarcrona et ipse), ad Hulta et aliis locis prope Ronneby prov. Blekinge; ad Kohlstad prope Borgholm (cum *Pl. rip.*) et ad Stora Dahlby (cum *Pl. crista*) ins. Öland; ad Jönköping (Zetterstedt!) et ad Ulfsborg (amic. A. Ahlrot!) prov. Småland; in prov. Halland (teste Zetterst.!); in fossa inter Åkerby et Åkerby torp par. Mellösa (dr. Hellbom sec. Hartman) prov. Nerike; in prov. Södermanland (A. W. Thamm sec. Lilljeb.). In Norvegia ad Bergen (Friele).

Subfam. ANCYLINA.

Testa patelliformis, absque spira.

Gen. ANCYLUS Geoffr.

Testa sinistralis, conoidea, apice verticis reflexo submediano ad dextrum leviter inflato. *Orific. org. int.* ad sinistrum; *maxilla* superior duplice serie papillarum, maxillæ laterales triplice serie (ex Moq.-Tandon); *dentes linguales* 35 in ser. long., 142—147 in ser. transv. (ex Goldf.).

1. ANCYLUS FLUVIATILIS Müll.

Testa mitræformis, oblique conoidea, tenuis, cornea vel calcarea, extus fusca, subtiliter radiatim striata, intus cœrulescens, nitida (interdum tota albida); *apertura* subrotundo-ovalis, interdum fere circularis. Long. 6—8 (9), lat. 5—6 $\frac{3}{4}$ mm.

Ancylus fluviatilis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 201. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 84. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 484. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 151. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 75. f. 68. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 120. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 171. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 55. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. III; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 102.

Hab. In Suecia, prov. Skåne: in rivulo ad Fogelsång prope Lund (NILSSON), in amne ad Hörby (MALM), ad Smedstorp (E. HEMBERG!), ad Mellby (HULTMARK ex MALM), in Rönneå ad Hjelmslund (J. LINDAHL!), in lacu Ringsjön et in amne ad Käflinge (J. A. WALLIN!!), in rivulo ad Stehag frequ. etc.; prov. Blekinge: in lacu Wesan, in amnibus ad Åryd, Mie et Mörrum (GOSSELMAN), in Augerumsa (ANKARCRONA et ipse); prov. Halland: ad Fröllinge (NILSSON), ad Syllinge par. Weddige (J. LINDAHL!); prov. Småland: ad Jönköping in lacu Vettern (ZETTERST.!); prov. Westergötland: ad Göteborg in rivo Utterbäck (MALM), ad Floda (O. NORDSTEDT!), in Munk- vel Kråk-bäcken ad Warnhem (E. v. Goës!!); prov. Östergötland: ad Omberg; prov. Nerike: ad Örebro in Svartån (HARTMAN); prov. Dalarne: in par. Gustaf (F. E. RIDDERBJELKE teste JOHANSON!), in Rörshytteån par. Husby (C. G. ANDERSSON!!). In Norvegia ad Christiania in rivulo a lacu Östensöen fluente copiosissime, nec non in fluvio ad Aker invenit clar. O. S. JENSEN; in fluvio ad Frogner cepit celeberr. C. M. POULSEN.

Gen. ACROLOXUS BECK.

(VELLETIA GRAY).

Testa dextralis, depressa, oblonga, apice laterali ad sinistrum. *Orif. org. int.* ad dextrum; *maxillæ* papillis confertissimis (ex MOQ.-TAND.); *dentes linguales* 14—15 in ser. longit., 88—90 in ser. transv. (ex GOLDF.).

1 ACROLOXUS LACUSTRIS (LIN.).

Testa scutiformis, oblonga, mediocriter convexa, tenuis, membranacea, pallide cornea, fuscescens, apice brevi resupinato et oblique declinato; *apertura* elongata, ovato-oblonga. Long. 6, lat. 3 mm.

Patella lacustris Linné Syst. Nat. X (1758) p. 783; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 534. *Ancylus lacustris* Müller Verm. Hist. II (1774) p. 199. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 83. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 488. t. 36. f. 50—55. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 150. Nord. et Nyl. Finl. Moll.

(1856) p. 76. f. 64. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 122. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 172.

Acroloxus lacustris Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 56. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 110; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 101.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: in Höjeå prope Lund et in Odensjö (Nilsson), ad Christianstad (Malm), ad Smedstorp (Hemberg!) etc.; prov. Halland ad Syllinge (J. Lindahl!); prov. Blekinge: in rivo Sörbybäck prope pagum Sörby et ad Ronneby, in lacu Emmahultssjön (C. A. W.), in Jemjö bäck (Gosselman); ins. Öland: in piscina maxime occid. in horto Kungsträdgården ad Borgholm; ins. Gotland: in Gothems å et in amne in silva Gyllauen (Lindström); prov. Östergötland multis locis (teste dr. E. v. Goës!); prov. Westergötland: in Stadswassen et Masthamnen ad Göteborg (Malm); prov. Nerike: ad Örebro in Svartån vulgaris, in lacu Qvismaren et in Fjugestabäcken par. Knista (Hartman); ad Stockholm passim, ex. gr. in Rörstrandsviken, in Bomsjön ad Carlberg, in Gångsätra et Mölna träsk ins. Lidingön, in lacu Trehörningen par. Brännkyrka (Wikström, Hartman), in lacu Sågsjön ins. Wermdön (Hartman); prov. Upland: ad Upsala (Lilljeborg!); prov. Westmanland: in lacu Mälaren et amne Svartån (Johanson!); prov. Dalarne (teste amic. Johanson!). In **Norvegia** in lacu Östensöen prope Christiania vulgarem invenit clar. O. S. Jensen.

Ordo II. GASTROPODA (PROSOBRANCHIA M. E.) OPERCULATA.

Moll. aquatilia, branchiis pectiniformibus aquam respirantia, sexubus (excl. *Valvatidæ*) distinctis. Testa spiralis, operculata.

Sect. I. CTENOBRANCHIA.

Moll. prosobranchiata, branchiis duabus pectiniformibus (una minima), sexubus distinctis (mas pene instructus).

Fam. VALVATIDÆ.

Animal pede brevi antice bilobo, tentaculis 2, setaceis, basi postice oculiferis, ore proboscidiformi, branchiis pinnatis, supra tentaculum dextrum exsertilibus, basi appendice filiformi. *Testa* apertura circulari, operculo multi- et arcti-spira, nucleo centrali.

Gen. VALVATA MÜLL.

Testa discoidea vel conoidea, anfractibus cylindraceis, peristomate continuo, acuto.

1. VALVATA CRISTATA MÜLL.

Testa discoidea, supra subplana, subtus concava, striatula, nitidula, pallide fusca aut lutescens; *anfract.* tres, spira immersa et sutura canaliculata. Diam. 2—3 mm.

Valvata cristata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 198. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 87. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 88. t. 2. f. 30. Friele Norske Moll. (1853) p. 44. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 544. t. 41. f. 32—42. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 69. f. 58. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 74. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 200. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 117; Coll. Typ. Moll. Su. (1863) n:o 108.

α **planorbis** DRAP.: testa discoidea, supra plana, subtus concava; peristoma simplex, acutum. — *Valvata planorbis* DRAPARNAUD Tabl. Moll. (1801) p. 42. *V. cristata* MOQ.-TANDON l. c. fig. 34—36.

β **spirorbis** DRAP.: testa discoidea, supra et subtus concava; peristoma reflexiusculum. — *Valvata spirorbis* DRAPARNAUD Hist. Moll. (1805) p. 41. t. 1. f. 32, 33. *V. crist.* β *spirorbis* MOQ.-TANDON l. c. f. 37, 38.

Hab. In **Suecia** in prov. Skåne et Halland passim frequens; in prov. Blekinge rarissima testa (tantum in lacu Wesan a clar. GOSSELMAN et in Tresjön prope Ronneby unicum specimen a me inventum); in ins. Öland passim frequens; in ins. Gotland in amnibus copiose (LINDSTRÖM); in prov. Östergötland passim, ad Alvastra vulgaris; in prov. Westergötland circa Göteborg vulgaris; in prov. Nerike in omne regione campestri vulgatissima, in reg. silvestri passim (HARTMAN); ad Stockholm in Djurgårdsbrunnsviken ad Blå porten, nec non in lacu Badstusjön ad Skuru ladugård (HARTMAN); in prov. Upland passim; in prov. Westmanland vulgaris (JOHANSON!); in prov. Wermland in lacu Wenern par. Botilssäter (C. LINROTH!). Teste celeberr. NILSSON usque in Lapponiam hæc species ascendit. In **Norvegia** non raro (FRIELE).

2. VALVATA MACROSTOMA STEENB.

Testa subdiscoidea, cornea, nitidula, supra convexiuscula, *spira* prominula, subtus umbilico patulo, distincte et argute transversim striata; *anfr.* 3, sutura mediocri disjuncti. Diam. 5—6 mm.

Valvata macrostoma Steenbuch Amtlicher Bericht Naturf. u. Aerzte 1847. p. 123. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 59. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 118.

Valvata depressa Hansén K. Vet. Akad. Öfvers. Förh. 1848) p. 201. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 87. t. 2. f. 9. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 69. f. 57.

β **malleata:** testa lineis spiralibus elevatis, interstitiis malleatis.

Hab. In **Suecia** hæc species primus detexit dr. HANSÉN in Svartgölen prov. Östergötland et in hac provincia præterea multis locis occurrit (teste beat. E. v. Goës!); ad Christianstad prov. Skåne legit clar. C. O. v. PORATH, ad Ultuna prope Upsala prov. Upland amiciss. J. E. ZETTERSTEDT et W. LILLJEBORG et in rivulo ad Stora Dahlby ins. Öland hanc testam ipse inveni.

3. VALVATA PISCINALIS Müll.

Testa oblique orbiculato-trochoidea, aperte seu subobtecte umbilicata, fusco-cornea, subtiliter striata; *spira* convexa; *anfr.* 4—5, sutura mediocri disjuncti, ultimus superne depressiusculus, ampliatus, subventricosus. Diam. 4—5, alt. 4 mm.

Nerita piscinalis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 172.

Valvata piscinalis Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 85. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 86. t. 2. f. 28. Friele Norske Moll. (1853) p. 43. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 540. t. 41. f. 16—18. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 72. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 198. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 59. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 118; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 109.

Junior ("anfr. 3—$3\frac{1}{2}$, spira magis depressa seu depresse globosa, apertura circinnata, patula": Nilss.) = *Valvata depressa* C. Pfeiffer Deutschl. Moll. I. p. 100. t. 4. f. 33. *V. pisc.* γ *depressa* Moq.-Tandon l. c. fig. 24. Jeffreys.

Hab. In **Suecia** in fluviis et fossis plerisque prov. Skåne, ex. gr. in Höje å (NILSSON), Alma å (MALM), in amne ad Käflinge (WALLIN!!), ad Krageholm (HEMBERG!), ad Trolleberg etc.; in prov. Blekinge: in lacu Wesan (GOSSELMAN), in Herrstorpssjön prope Ronneby raro; ins. Öland: in rivo ad Kohlstad prope Borgholm parcissime; ins. Gotland specim. mortua in stagnis fere omnibus (diam. et alt. 8 mm.: LINDSTRÖM); prov. Östergötland multis locis (frequens in Nackebosjön: E. v. Goës!); prov. Westergötland: ad Göteborg passim (ex. gr. Möllndals å, Qvillebäcken, Tingsstadsränna, Stadswassen: MALM); prov. Nerike: ad Skebäck et in Fjugestabäcken par. Knista (HARTMAN); ad Stockholm: in lacu Bomsjön ad Carlberg (HÖGBERG, WIKSTRÖM); prov. Westmanland: in amne Svartån

et in lacu Mälaren ad Westerås raro (JOHANSON!); prov. Upland: ad Upsala (JOHANSON! LILLJEBORG!); prov. Dalarne: in fluvio Dalelfven ad Wåbäck par. Gustaf (RIDDERBJELKE teste clar. JOHANSON!); prov. Jemtland: in Storsjön et ad Krokam in fluvio Ragundaelf (NYSTRÖM). In **Norvegia** ad Christiania (FRIELE).

VALVATA *PUSILLA (MÜLL.).

Testa solidula, pellucens, cornea, subviridis, *spira* sat elevata, apice planiusculo, *sutura* profunda, striis argutis; *umbilicus* perspectivus, cylindricus; *anfr.* 4—4½ mm. Diam. 3—3½ mm.

Nerita pusilla Müller Verm. Hist. II (1774) p. 171.
Valvata piscinalis var. α Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 86. *Valvata piscinalis* Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 63. f. 56.
Valvata pusilla Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 60.

Hab. In **Suecia** passim cum præcedente.

4. VALVATA ANTIQUA SOWERBY.

Testa ovato-conoidea, calcarea (viva viridula), solida, anguste perforata; *spira* altissima, contabulata; *anfr.* 5, ultimus teres; *sutura* impressa, canaliculata; striæ incrementi argutæ; testa sæpe spiraliter lineata. Diam. 4—5, alt. 5—6 mm.

Valvata antiqua Sowerby Mag. of Nat. Hist. 1838 p. 547 teste Morris Catal. of Brit. Foss. ed. 2 (1854) p. 285. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 60. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 119; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 110.
Valvata contorta Menke Zeitsch. f. Malak. 1845 p. 115. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 85. t. 2. f. 27.
Valvata contorta β trochoidea Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 130.

Hab. In **Suecia** in maxima orientali parte prov. Skåne: in lacu ad Råbelöf et ad Ölsjö (MALM), ad Krageholm (E. HEMBERG!!), in Lyngsjösjön (LILLJEBORG!!) et in Lefrasjön (O. NORDSTEDT!!); in prov. Östergötland copiose in lacu Tåkern. In lacubus Lefrasjön et Tåkern viva occurrit.

Fam. PALUDINIDÆ.

Animal pede magno, antice subtruncato, tentaculis 2, subulatis. *Testa* conoidea vel turrita, epidermide olivaceo, apertura ovali, operculo pyriformi-ovali, concentrice striato, nucleo laterali vel subcentrali.

Gen. PALUDINA Lamarck.

Testa sæpius 3-fasciata, ovata vel conoidea, anfractibus convexis vel subcylindraceis; *peristoma* continuum, tenue; *operculum* corneum, nucleo laterali. *Animal* ♀ viviparum; penis ♂ in tentaculo dextro crassato occultus; oculi pedicellati.

1. PALUDINA VIVIPARA (Lin.).

Testa imperforata (obtecte perforata), ovato-conoidea, solida, obsoletissime spiraliter striata, vix pellucida, fasciis longitudinalibus rufo-fuscis, tribus; *spira* obtusiuscula; *anfr.* 4—5, parum convexi, celeriter accrescentes, *sutura* mediocri, ultimus tumescenti-ampliatus; *apertura* rotundato-ovata, superne subacute sinuata; *peristoma* acutum, margine columellari reflexo. Diam. 18—20 mm., alt. 25—28 mm.

Helix vivipara Linné Syst. Nat. X (1758) p. 772; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 529.
Nerita fasciata Müller Verm. Hist. II (1774) p. 182.
Paludina vivipara Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 88. Högberg Typsamling. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 126. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 535. t. 40. f. 25. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 71. f. 60. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 58. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 195. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 113; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 103.
Paludina achatina Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 109. f. 66*. Hansén Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1845 p. 254.
Paludina fasciata Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 90. t. 3. f. 2.
Vivipara fasciata v. Frauenfeld Verzeichn. Nom. Gatt. Paludina in Verhandl. zool.-bot. Gesellsch. in Wien XIV (1864) p. 605.
Viviparus fasciatus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 62.

1. **efasciata.**

Pullus: testa seriatim ciliata; margo pallii lobis tribus triangulari-subulatis.

Hab. In **Suecia** media et ejus parte orientali hæc species passim frequens. Terminus borealis mihi cognitus est ostium amnis Gefleån (teste amic. C. G. Andersson!) et meridionalis est regio urbis Westervik (teste beat. E. v. Goës!). In prov. Östergötland ad Norrköping invenit dr. Hansén; in Nerike in lacubus et amnibus regionis campestris (ex. gr. in lacu Hjelmaren, Mosjön, Qvismaresjöarne, in amne Svartån ad 33 mm. alt.) ubique copiosissime (Hartman); in provinciis circa Mälaren (Södermanland, Upland, Westmanland), in hoc lacu, in fluviis et amnibus in illo

se evomentibus fere ubique (Fyrisån, Sagån, Svartån, Kolbäcksån, Hedströmmen, Thorshällaån etc.), passim frequentissime, nec non in aqua subsalsa maris balthici ad ostium lacus Mälaren.

2. PALUDINA CONTECTA (MILLET).

Testa perforata, globoso-conoidea, ventricosa, tenuis, lineis subtilissimis spiralibus (ad suturam interdum regulariter ciliatis), magis minusve pellucida, fasciis longitudinalibus rufo-fuscis tribus; *spira* spec. jun. mucronata; *anfractus* 6—7, convexi, celeriter accrescentes, *sutura* profunda disjuncti, ultimus ampliato-tumidus; *apertura* rotundato-ovata, superne leviter sinuata; *peristoma* acutum, margine columellari reflexiusculo.

Nerita vivipara Müller Verm. Hist. II (1774) p. 182.
Cyclostoma contectum Millet Moll. Maine et Loire (1813) p. 5.
Paludina vivipara Nilsson pr. p. Hist. Moll. Su. (1822) p. 88. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 108. f. 66. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 89. t. 3. f. 1. Friele Norske Moll. (1853) p. 45. Bielz Fauna Moll. Siebenb. (1867) p. 189.
Paludina listeri Forbes a. Hanley Hist. Brit. Moll. (1853) III. p. 8. t. 71. f. 16. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 127. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 71. f. 59.
Paludina contecta Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 532. t. 40. f. 1—24. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 56. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 194. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 113; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 104.
Vivipara vera v Frauenfeld in Verh. der K. K. Zool.-Bot. Gesellsch. in Wien 1862 p. 1161; in Verh. 1864 p. 592 et 658.
Viviparus contectus Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 61.

1. **efasciata.**

Pulli testa ciliata et pallio lobato.

Hab. In Suecia, prov. Skåne: in amne ad St. Köpinge (NILSSON), ad Christianstad pluribus locis frequens (MALM et ipse), ad Fryde, Eweröd et Sälshög (E. HEMBERG!), ad Stehag; prov. Blekinge in amnibus et lacubus passim; prov. Småland in amne Hossmo-å copiose, in amne ad Kjelltorp etc.; prov. Westergötland ad Göteborg frequens (MALM). In Norvegia ad Christiania passim (FRIELE).

Dans ses travaux sur les Paludines M. G. RITTER VON FRAUENFELD nomme cette espèce *Vivipara vera* et dit dans les Verhandl. der K. K. zool.-bot. Gesellsch. in Wien (XIV, 1864, § 202, p. 592), au nom de *contectum* MILLET: "ich kenne die kritische Beleuchtung nicht, die diesen Namen für die bisherige *Paludina vivipara* in Anspruch nimmt und der Müller'schen *Pal. fasciata* den Namen vivipara zutheilt."

La cause de ce changement, c'est que tous les auteurs cherchant à l'instart de M. v. Frauenfeld l'espèce de Linné se fourvoient évidemment. Jeffreys dit avec une pleine raison à l'article de *P. contecta* dans la Brit. Conch. I. p. 57: The Linnean description of *Helix vivipara* accords more properly with that of the next species (H. vivipara L. = Cycl. achatina Drap.), which has only an umbilical chink ("imperforata") and is particularly "subovata" and "obtusa". Une preuve encore plus probante de la justesse de cette opinion nous est fournie par l'extension singulièrement différente et toujours rigoureusement séparée des deux espèces dans le pays où Linné prit son *Helix vivipara*. Quand Linné dit son espèce très-abondante "in fluvio Sahla", cela concerne *exclusivement* la *Paludina fasciata* ou *achatina* Auctt., qui y est encore abondante, tandis que la *P. contecta* Mill. ne se trouve que *deux degrés de latitude plus au sud!*

Gen. BYTHINIA (Prideaux) Gray.

Testa unicolor, ovato-turrita, anfractibus convexis vel planiusculis; peristoma intus leviter incrassatum; *operculum* calcareum, subconchaceum, solidum, nucleo subcentrali. *Animal* ♀ ovoviviparum; penis ♂ nudus, intra cavitatem basi interni tentaculi dextri situs, oculi sessiles.

J'ai encore conservé avec presque tous les autres auteurs ce genre dans la même famille que les Paludines, quoique je me range complètement a l'opinion de M. le D:r Lindström (Gotl. Moll. p. 26): Quoique Troschel (Gebiss der Schnecken I. p. 102) demandât avec raison il y a longtemps déjà la séparation du genre Bythinia des Paludinides, on le voit toutefois encore placé dans cette famille même par les principaux manuels de malacologie. L'armement de la langue n'est pas le seul à montrer qu'il doit être comme le voulait Troschel placé à côté de Hydrobia, Paludinella et plusieurs autres Rissoïnes (peut-être de préférence comme une subdivision spéciale: *Hydrobiinæ*). En outre, il n'a comme les Rissoïnæ qu'une seule et grande otolithe dans la vesica auricularia et non plusieurs petites comme les Paludinides. Les organes de la génération sont aussi tout différents de ceux de cette dernière famille. L'organe mâle est externe, situé du côté du dos a égale distance des deux cornes. Les Bythinies ne sont pas non plus ovovivipares, mais déposent leurs oeufs comme toutes les autres Hydrobiines. Il y faut ajouter encore des ressemblances de moeurs rapprochant les Bythinies et les Hydrobiines, comme la faculté de filer un mince fil muqueux attaché aux plantes aquatiques auxquelles elles se tiennent suspendues comme en état de repos avec l'opercule à moitié clos."

1. BYTHINIA TENTACULATA (Lin.).

Testa ovato-ventricosa, subturrita, imperforata vel augustissime rimata, nitida, pellucida, pallide cornea (sæpe crusta obscura obducta); *anfr.* 5—6, sensim accrescentes, convexiusculi, *sutura* tenui vel mediocri juncti,

ultimus ventricoso-ampliatus, descendens; *apertura* ovalis, superne acute angulata; *peristoma* intus albo-labiatum, margine columellari reflexo. Long. 10—12, diam. 6—7 mm.

Helix tentaculata Linné Syst. Nat. X (1758) p. 774; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 531; Syst. Nat. XII (1767) p. 1249.
Nerita jaculator Müller Verm. Hist. II (1774) p. 185.
Paludina impura Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 89. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 107 f. 65. Nord. & Nyl. Finl. Moll. p. 72 f. 62.
Paludina tentaculata Friele Norske Moll. (1853) p. 46.
Bithinia tentaculata Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 127. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 63. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 115.
Bythinia tentaculata Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 92. t. 3. f. 3. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 528 t. 39. f. 43—44. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 60. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 189. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 108. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 26. t. 2. f. 10, 11 (animal), t. 3. f. 1. (unc. radulæ.)

β **producta** MENKE: testa elongato-conica, minus ventricosa. Drap. Hist. Moll. t. 1. f. 19. M.-Tand. l. c. f. 41.
γ **ventricosa** MENKE: testa ventricosa, conico-globosa. Drap l. c. t. 1. f. 20.
δ **gigas** MÖRCH: testa late ovata, decollata, rimata, strigis incrementi 2—3; long. 14, lat. 9 mm.
ε **albina.**

Hab. In **Suecia** in provinciis omnibus meridionalibus et mediis, saltem usque in Dalarne fere ubique plus minus vulgaris. δ *gigas* in Höjeå prov. Skåne (J. A. WALLIN!!). In **Norvegia** ad Christiania passim (FRIELE).

2. BYTHINIA LEACHI (SHEPP.)

Testa ovato-turrita, subperforata vel rimata, nitidula, subpellucida, cornea (vel crusta obscura obtecta), solidula; *anfr.* 4—5, sensim accrescentes, convexi, subteretiusculi, *sutura* profunda vel profundissima separati, ultimus inflatus, vix descendens; *spira* brevis, obtusiuscula; *apertura* oblongo-rotunda, superne leviter sinuata; *peristoma* continuum, sæpius plus minus solutum, tenuissime albido-labiatum, margine columellari reflexiusculum. Long. 5—7, lat. 4—5 mm.

Paludina ventricosa Gray Lond. Med. Sepos. XV (1821) p. 239 (nomen!).
Paludina sp. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 120.
Turbo leachi Sheppard Trans. Linn. Soc. XIV (1823) p. 152.
Paludina kickxi Vestend Bull. Acad. Brux. III (1835) p. 375 (sec. v. Frauenf.).

Bithinia ventricosa Gray Turt. Man. (1840) p. 94. t. 10. f. 121.
Paludina inflata β minor Hansén Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1845. p. 254.
Bythinia similis Stein pr. p. Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 93. t. 3. f. b, c. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III. (1855) p. 128.
Bythinia leachi Moquin-Tandon pr. p. Moll. Fr. II (1855) p. 527. t. 39. f. 20—22. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 61. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 190. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 106. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 27. t. 2. fig. 9 (animal), t. 2. f. 13 (unc. radulæ).
Bithinia ventricosa var. I. Mörch. Syn. Moll. Dan. (1864) p. 64 (excl. syn.).
Bithinia ventricosa β minor Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 116.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne multis locis vulgaris: in Höje å (Nilsson), ad Christianstad passim frequens (Malm et ipse), in amne ad Wallåkra (C. A. W.), in lacu Ringsjön (J. A. Wallin!!), ad Blommeröd (L. P. Holmström!!) etc.; ins. Öland: in rivulo ad Kohlstad prope Borgholm, ad ripam meridion. lacus Hornsjön par. Högby, in rivulo ad Tveta par. Thorslunda; ins. Gotland: in Gothems å, in Hauträsk et in rivulo ad templum Löjsta (Lindström); prov. Östergötland: in fluvio Motala ström ad Norrköping et in rivo 1 mill. su. ab urbe (Hansén); prov. Westergötland: ad Göteborg passim, ex gr. in Stadsvassen, Qvillebäcken, Göta elf infra Lindholmen etc. (Malm), in monte Kinnekulle in piscina horti ad Råbäck (C. Linroth); ad Stockholm in Djurgårdsbrunnsviken prope Blå port (Zetterstedt!!); prov. Upland: ad Upsala (Lilljeborg!).

BYTHINIA *TROSCHELI Paasch.

Testa ovato-turrita, rimata, nitidula, pellucida, pallide cornea vel albido-lutescens, subvirescens; *anfr.* 5, convexi, inflati, subteretiusculi, ultimus ampliato-tumidus, sutura profunda disjuncti; *spira* elongata, acutiuscula; *apertura* subrotunda, superne leviter sinuata; *peristoma* continuum, affixum, tenuissime labiatum, margine columellari reflexiusculo. Long. 8—11, lat. 5—7 mm.

Paludina troschelii Alex. Paasch Archiv f. Naturg. VIII (1842) p. 300.
Paludina transsilvanica E. A. Bielz, olim.
Paludina inflata Hansén Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1845 p. 254 (ex. spec. orig.).
Bythinia similis Stein pr. p. Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 93. t. 3. f. 4, a.
Bithinia ventricosa Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 63.
Bithinia ventricosa α major Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 115.
Bythinia troscheli E. A. Bielz Fauna Moll. Sieb. (1867) p. 190 (ex spec. orig. ab auct. missis).

Hab. In **Suecia** in Lillån prope Norrköping prov. Östergötland legit dr Hansén.

Fam. RISSOIDÆ.

HYDROBIINÆ.

Animal pede lato, subtruncato, tentaculis 2, cylindraceis, obtusis, oculis pedicellatis. *Testa* tenuis, subovata, apertura ovali vel oblongo-rotunda, operculo corneo, tenui, paucispirali.

Gen. HYDROBIA HARTM.

Testa parva, subperforata, acute ovata; operculum nucleo excentrico.

1. HYDROBIA STEINI v. MART.

Testa perforata, acute ovata, subturrita, tenuissima, pellucida, corneo-virescens, tenuissime transversim striatula, lineis spiralibus obsoletissimis, remotis; *anfr.* 4—5, inflati, *sutura* profunda disjuncti, ultimus parum ampliatus; *spira* obtusa aperturam paullo superans; *apertura* ovato-rotunda, superne vix sinuata, intus albo-subcallosa; *peristoma* acutum, margine columellari reflexiusculo. Long. 3, lat. 2 mm.; long. ap. $1\frac{1}{3}$ mm.

Bythinia acuta Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 96. (Fig. 5 in tab. 3 non spec. nostr. congrua; spira in nostr. multo brevior).

Bithinia viridis Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 130 (ex spec. orig. ab auct. ipso missis).

Hydrobia steinii v. Martens Arch. f. Naturg. 1858 p. 133. t. 5. f. g. (Celeberr. auctor spec. suec. approb.) Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 65. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 116; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 107. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 28. t. 3. f. 7, 8, 9, 12.

Hab. In Suecia, prov. Skåne: in palude ad Wesum prope Lund et ad Christianstad in fossa bor. arcis copiose (C. A. W.), ad Rönnebro (J. LINDAHL!!); prov. Blekinge: in lacubus Herrstorpssjön et Långasjö prope Ronneby (C. A. W.), in Bastasjön par. Augerum (ANKARCRONA et ipse); prov. Småland: in lacu Lillsjön prope Jönköping (C. H. JOHANSON et J. E. ZETTERSTEDT!!); prov. Östergötland: in palude ad Kimsta (d:r C. J. E. HAGLUND sec. LILLJEBORG!), in Ljungtorps göl par. Rinna (E. v. GOËS!!); prov. Westergötland: in Kopparsjön ad Mölltorp (J. A. WALLIN!!) et ad Göteborg in Stadsvassen (MALM); prov. Nerike: raro in amne Svartån (HARTMAN Ner. Moll. sub B. sim.).

SECT. II. ASPIDOBRANCHIA.

Moll. prosobranchia, branchiis duobus pectiniformibus, æqualibus vel subconnexis, sexubus distinctis (mas pene destitutus).

Fam. NERITIDÆ.

Animal pede magna, tentaculis setaceis, ad basin extus oculiferis, sexubus distinctis, branchiis pinnatis, radula s. d. rhipidoglossa. *Testa* imperforata, semiglobosa, columella plana, latissima, spira brevissima, operculo articulato.

Gen. NERITINA LAM. (1822).

(THEODOXUS MONTFORT 1810).

Testa semiglobosa, subtus planiuscula, paucispira, celeriter evoluta, oblique dilatata; *apertura* semicircularis, marginibus vix denticulatis; *operculum* paucispirale, oblique lunatum, calcareum, conchaceum, politum, margine flexili corneo, apophyse laterali semitorta. *Animal* oculis pedicellatis.

1. NERITINA FLUVIATILIS LIN.

Testa oblongo-subhemisphærica, subtiliter striata, extus violascenti-atra vel purpurascens, maculis vel punctis reticulata vel pennata, intus crocea vel lactea; *anfr.* subtres, ultimus naviformis, elongatus; *spira* brevissima, lateralis; labium columellare integrum.

Nerita fluviatilis, littoralis et *lacustris* Linné Syst. Nat. X (1758) p. 777; Fauna Su. ed. 2 (1761) p. 532, 533. Müller Verml. Hist. II (1774) p. 194. Friele Norske Moll. (1853) p. 47.

Neritina fluviatilis Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 93. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 17. f. 118, 119. Nord. & Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 74 f. 62. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 52. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 203. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 120; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 111.

α **typica:** testa sæpe erosa, maxima, crassa, violacea vel virescens, lineis obscuris parvis reticulata, fasciis 2—3 longitudinalibus obscuris, intus pallide virescens; operculum crocaceum; spira brevis, depressa; long. 11—12 mm. — *Nerita fluviatilis* Linné F. Su. ed. 2. p. 532 n:o 2194.

β **lacustris** LINNÉ: testa tenuiuscula, cœrulescens vel pallida, pulcherrime variegata, intus crocea, labro flavo, spira elata; long. 9—12 mm. — *Nerita litoralis* β Linné F. Su. n:o 2195; *Nerita lacustris* Linné F. Su. n:o 2196.

γ **litoralis** LINNÉ: testa subtenuis, nigrescens vel fusca, subunicolor vel maculis albis variegata; long. 8—10 mm. — *Nerita littoralis* Linné F. Su. n:o 2195 (excl. v. β).

δ **baltica** BECK: testa parva, extus nigro-fusca, subunicolor aut obsolete variegata, intus lactea, spira brevissima, depressa; long. 5—6 mm. — *Neritina fluviatilis* β Nilsson l. c. p. 94.

ε **boetica** LAM.: testa minuta, tenuis, fusca, maculis flavis variegata, extus et intus æqualis, sæpe fasciata; apertura lata, auriculiformis;

operculum carneum; margo columellaris albidus, superne coeruleo-virescens; spira brevissima, acuminata; long. 4—5 mm. — *Neritina boetica* Lamarck Anim. sans vert. (1822) VI. II. p. 188. *N. fluv. ϑ bœtica* Moq.-Tandon Moll. Fr. II. p. 550. t. 42. f. 39, 40.

ζ **spirata** mh.: testa magna, crassissima, calcarea, alba, antice interdum rufo-striatus, intus crocea, operculo et labro subviolaceis; spira alta, elata, acuminata; long. 11, alt. 9 mm.

Hab. In **Suecia** hæc species sub his et multis formis intermediis in rivis, lacubus et fluviis provinciarum litoralium orientalium saltem usque ad ostium fluvii Dalelfven, nec non ad litora maris orientalis, procul interdum ab ostiis fluviorum. ε *boet.* in prov. Skåne ad Hjelmslund in amne Höjeå (J. LINDAHL!!) et ad Stockholm in lacu Trehörningen (G. EISEN!!). ζ *spir.* e palude ad Fardum ins. Gotland numerosa spec. communicavit clar. G. EISEN. In **Norvegia** passim ad ostia fluviorum et rivorum (FRIELE).

CL. II. ACEPHALA CUV.

(CONCHIFERA LAM.).

ORDO. LAMELLIBRANCHIA.

Mollusca aquatilia, capite nullo, ore inermi, pede exsertili linguæformi vel subtereti elongato; hermaphrodita, sine coitu se propagantia; branchiis quattuor foliaceis inter corpus et pallium sitis respirantia. *Testa* bivalvis (concha), æquivalvis.

Fam. SPHÆRIIDÆ.

Animal pallio antice, pro pede exserendo, aperto, postice connato et in tubum vel geminum vel simplicem, contractilem, cujus apertura superior ani, inferior tracheæ vicibus fungitur, extenso. *Concha* subglobosa vel ovata, dentibus cardinalibus duobus in valv. sinistra, uno in valv. dextra, dentib. lateral. lamelliformibus, compressis, in valv. dextra 2, in sinistra 1.

Gen. SPHÆRIUM SCOPOLI.

Concha fere æquilateralis. *Animal* siphonibus duobus, basi connatis, superiore breviore.

1. SPHÆRIUM CORNEUM (LIN.).

Concha subglobosa, subcordata, ventricosa, tenuis, transversim tenuissime striata, extus sordide virescenti-fusca, lutescenti tincta, sæpe margine infero luteo-limbato, intus coerulea; *umbones* subrotundate obtusi, tumidi, prominuli; *ligamentum* inconspicuum; pars posterior anteriore vix altior; *margines* (conchæ clausæ) rotundate obtusi. Long. 10, alt. 8, crass. 7 mm.; spec. max. l. 14, alt. 11, cr. 10 mm.

Tellina cornea Linné Syst. Nat. X (1758) p. 658; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 517.
Tellina rivalis Müller Verm. Hist. II (1774) p. 202.
Sphærium corneum Scopoli Intr. Nat. Hist. (1777) p. 397. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 5. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 70. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 122; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 11.
Cyclas cornea Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 96. Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 108. t. 3. f. II. Friele Norske Moll. (1853) p. 50. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 491. t. 53. f. 17—19. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 77. c. fig. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 78. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 238.

β **stagnicolum** SHEPP.: concha pallide straminea, unicolor.
γ **nucleum** STUDER: concha parva, globosa, obscura; long. 7, alt. 7, cr. 6 mm.
δ **tomentosum** mh.: concha straminea, dorso obscuro, tomento albido tenui obtecta.
ε **mammillanum** mh.: concha subglobosa, umbonibus tumidis, obtusis, superne mammillis magnis, planiusculis.

Hab. In **Suecia** hæc concha ubique vulgaris, saltem per provincias litorales usque ad 65° 60′ l. bor. (spec. 10,6 mm. longa, 8,6 mm. alta, 7,2 mm. crassa ad Sävast legit clar. v. Wallenberg). γ *pucl.* passim, saltem in Dalarne usque. δ *toment.* copiose in palude ad Wesum prope Lund prov. Skåne. ε *mammill.* in Wesums mosse prov. Skåne (C. A. W.), in Quillebäcken ad Göteborg prov. Westergötland (MALM!!), ad Kloster prov. Dalarne (C. G. ANDERSSON!!). In **Norvegia** ad Christiania non raro (FRIELE).

SPHÆRIUM *CONSOBRINUM FÉR.?

Concha orbiculato-subrhombea, compressa, subinæquilateralis, postice latior, subtruncata, antice magis rotundata, tenuis, pellucida, tenuiter striata, cinerea vel lutescens, marginibus (conchæ clausæ) acutis; nates minutæ, acutiusculæ, umbonibus subdepressis. Long. 8, alt. 7, cr. 4—5 mm. (sp. max. 10—11 mm. longa).

? *Cyclas consobrina* Férussac, Blainv. Dict. Sc. Nat. XII (1818) p. 279, teste Desh.
Cyclas lacustris Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 98. Friele Norske Moll. (1853) p. 50.
? *Sphærium consobrinum* Deshayes Catal. Conch. of Brit. Moll.
Sphærium corneum-pisidioides Westerlund Sv. Moll. p. 122 (nec Gray).
Sphærium scaldianum Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 113. Lindström Gotl. Moll. (1868) p. 31 (nec Normand?).

Hab. In **Suecia** hæc forma per totum regnum occurrit. In **Norvegia** ad Christiania passim (FRIELE).

Ce dernier n'est-il comme le veulent la plupart des auteurs, qu'une variété locale de S. corneum? Cette opinion est combattue d'une côté par le fait que dans la plupart des localités le S. corneum plus globuleux et le C. lacustris NILSS. plus comprimé se présentent en masse dans les mêmes fonds vaseux, et par celui que cette dernière coquille s'avance en Scandinavie beaucoup plus loin vers le Nord; ainsi tandis que le premier se tient près de la mer dans sa limite polaire, le second se rencontre au milieu du pays, dans les montagnes de la chaîne des alpes Scandinaves, le plus souvent dans les eaux courantes, parfaitement tel qu'il se montre dans les marais fangeux des provinces plus méridionales, et s'élève en outre bien au-dessus du cercle polaire. Le *C. lacustris* n'est-il alors, comme quelques auteurs le supposent, qu'un jeune individu de S. corneum? Cela n'est guère plus croyable, car S. corn., qui avec tous ses congénères est très-comprimé au commencement, prend bientôt sa forme enflée, de sorte que les exemplaires, infiniment moins que les adultes de C. lac., sont considérablement arrondis et se distinguent toujours par leurs sommets enflés de bonne heure, et les caractères distinctifs de C. lac. sont nombreux, evidents, et constants dans tous les âges de l'animal. Le *C. lacustris* NILSS. serait-il alors la coquille femelle de S. corneum, comme le croit STEIN (Schn. u. Musch. Berl. p. 109), parce qu'il n'a trouvé des petits que dans le premièr et jamais dans le dernier? La première coquille de S. corneum que j'ouvris pour examiner le fait, et qui était une variété ventrue et très-grande, avec les sommets enflés, avait environ une dizaine de petits de différentes dimensions, et plus tard, j'ai souvent trouvé des petits chez les deux formes.

2. SPHÆRIUM LACUSTRE (MÜLL.).

Concha subrhombea, subinæquilatera, tenuissima, fragilis, diaphana, subtiliter striata, compressa, antice abrupte truncata, postice rotundato-truncata, lutescenti-albida, sæpe omnino, margine excepto, coerulescenti-cinerea, umbonibus tumidis, acuminatis, natibus protuberantibus; margo dorsalis rectiusculus, ventralis elongato-curvatus; *margines* (conchæ clausæ) acutissimi. Long. $7\frac{3}{5}$, alt. $6\frac{1}{3}$, cr, $3\frac{2}{3}$ mm. (ex. max. 10 mm. l., 9 mm. a., 6 mm. cr.).

Tellina lacustris Müller Verm. Hist. II (1774) p. 204.
Cyclas calyculata Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 81 cum. fig.

Sphærium lacustre Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 10. O. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 71.
Cyclas lacustris Reeve Brit. Moll. (1863) p. 241.

Hab. In **Suecia**, prov. Westergötland circa Göteborg (in Qvillebäcken, Mölndals å et in Stadsvassen, formam crassiorem in piscinis ad Årred, Kärralund nec non ad Gunnebo et in Dahlins damm) hanc speciem frequentem invenit clar. MALM.

SPHAERIUM CALYCULATUM (DRAP.).

Concha subrhombeo-ovalis, subinæquilatera, tenuissima, fragilis, diaphana, subtiliter striata, cinerea, radiis saturatioribus confertis sæpius ornata, ventricoso-compressa, antice producta, postice subrotundata, umbonibus inflatis, natibus acutiusculis, incurvis; margo dorsalis versus priorem conchæ partem declivus, anterior subleniter præruptus, ventralis elongato-curvatus; *margines* (conchæ-clausæ) acuti. Long. 9, alt. 8, cr. $4\frac{1}{2}$ mm.; vel 10 l., 8 lat., 6 cr.

Cyclas calyculata Draparnaud Hist. Moll. (1805) p. 130 t. 10. f. 14, 15. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 99. Friele Norske Moll. (1853) p. 51. Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 594 t. 53. f. 34. cum *α* majore f. 36, 37). Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 79. f. 66 (fig. mala).
Sphærium calyculatum Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 71. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 114.
Sphærium lacustre Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 123.

β **brochonianum** BOURG.: concha magna, angulato-ovalis, elongata, compressa, cinerea, pulchre striata, umbonibus viridi-lutescentibus, zona marginali undique pallide lutea; margo dorsalis vix declivus; long. 12, alt. 10, cr. 6 mm. — *Cyclas calyculata var.* Malm l. c. p. 82. cum fig.

Hab. In **Suecia** hæc forma passim occurrit in prov. Skåne; in prov. Blekinge ad Ronneby; ins. Gotland ad Suderbys Westernejde et in Fardhem cop. (LINDSTRÖM); passim in prov. Östergötland et Westergötland (in Kopparsjön ad Mölltorp copiose: J. A. WALLIN!!); prov. Nerike: ad Örebro multis locis, ad Damsäter par. Axberg et ad Skarsäter par. Asker (HARTMAN,); ad Stockholm passim (ex. gr. in Clara sjö, ad Carlberg et in Djurgårdsbrunnsviken); prov. Upland multis locis prope et in Fyrisån; prov. Westmanland passim in regione lacus Mälaren (JOHANSSON!); prov. Dalarne ad Säther in Dalsbysjön (C. G. ANDERSSON!!). *β broch.* ad Göteborg (MALM et ipse). In **Norvegia** hanc formam certe

quidem clar. FRIELE passim ad Christiania invenit et sub nomine C. calyculatæ l. c. descripsit. — *Sphærium ryckholti* NORM., species me judice bene distincta, in Dania multis locis occurrit, in Suecia vel Norvegia nondum vidi.

Gen. PISIDIUM C. PFR.

Concha inæquilatera. Animal siphone simplici, brevi, cylindraceo.

Nous avons ici devant nous l'un des champs où les deux partis extrêmes de la Zoologie descriptive, les *producteurs* d'espèces et les *destructeurs* d'espèces, ont un espace d'action illimité, tandis que le *centre* peu nombreux hésite sur la position qu'il doit prendre. Je me tromperais fort, si les espèces décrites ci-dessous n'ont pas eu ou n'auront pas d'obstacles à rencontrer. Aussi je crois ne pas devoir négliger de dire à leur égard qu'elles ont toutes été vérifiées avec approbation par Mr A. Malm (dans son traité cité plus bas), et qu'il a bien voulu me faire présent de ses exemplaires typiques, après l'étude desquels je n'ai pas hésité à me ranger à son opinion.

1. PISIDIUM AMNICUM (MÜLL.).

Concha inæquilatera, peroblique ovalis, postice brevissima, ventricosa, concentrice sulcata, nitida, albido-lutescens, sæpe omnino, margine excepta, fusco-cinerea vel fulva, zonisque obscurioribus; nates sulcati, convexiusculi, *umbones* parum prominuli; *valvulæ* inferne angulum rectum formantes. Long. 10—12, alt. $7\frac{1}{2}$—8, crass. 6—7 mm.

Tellina amnica Müller Verm. Hist. II (1774) p. 205.
Cyclas obliqua Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 99.
Pisidium amnicum Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 533. p. 52 f. 11, 12. Malm Göteb., Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 86 cum. fig.; Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 20. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 228. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 72. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 124; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 115.
Pisidium obliquum Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 81.

β **elongata** BAUDON: concha parte anteriore elongata.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: in amne ad Wallåkra, in lacu Ringsjön et aquis adjacentibus (C. A. W.), in amne ad Käflinge (J. A. WALLIN!!), in Wesums mosse (A. J. JOHANSSON et ipse), in Rönneå ad Hjelmslund (J. LINDAHL!!), in Höjeå ad Knästorp et ad Christianstad passim, ex. gr. in Nose å, Råbelöf sjö, Alma å (MALM); prov. Blekinge in lacu Wesan (GOSSELMAN); prov. Östergötland: passim (frequens in Skenå: GOES!!) prov. Westergötland: ad Göteborg, ex. gr. in Qvillebäcken et in Mölndals å (MALM), nec non in par. Källunga (J. HULTING!); prov. Nerike: in Svartån et Lillån ad Örebro et in Arnängarne (HARTMAN); prov. Upland:

ad Upsala (C. H. JOHANSON!); prov. Westmanland: in lacu Mälaren ad Johannesberg et Gäddeholm nec non in Svartån (JOHANSON!); prov. Dalarne in par. Gustaf (RIDDERB. sec. JOHANS.!).

2. PISIDIUM HENSLOWANUM (SHEPP.)

Concha inæquilatera, oblique triangulari-ovalis, postice abbreviata, medio plus minus tumida, tenuiter striata, vix nitidula, plerumque ex toto lutescenti-albida; *umbones* protuberantes, natibus convexis; *margo dorsalis* protensus, rectiusculus, forte declivus, *ventralis*, *posterior* et *anterior* breves, pulchre arcuati; *valvulæ* inferne angulum ad 80° formantes. Long. $4\frac{1}{2}$—5, alt. $3\frac{1}{2}$—4, cr. $2\frac{1}{2}$—3 mm.

α **typicum:** concha natibus plica compressa longitudinali ornatis.

Tellina henslowana Sheppard in Linn. Soc. Trans. XIV (1823) p. 150 (testib. Jeffr. et Moquin-Tandon).
Cyclas appendiculata Turton Man. (1831) p. 15 f. 6.
Pisidium henslowianum Jenyns Monogr. Cycl. in Trans. Phil. Soc. Cambr. IV (1833) p. 308. t. 21. f. 6—9. Hansén Öfvers. af Vet. Akad. Förh. (1848) p. 202. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 94. c. fig. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 234 c. fig. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 72. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 126, a.; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 118.
Pisidium henslowanum α Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 581, t. 52. f. 1—7.
Pisidium fontinale var. I henslowana Jeffreys Brit. Conch. I. (1862) p. 21.

β **normale:** concha crassior, ventricosior, projectura lamelliformi destituta.

Pisidium fontinale Stein Schn. u. Musch. Berl. (1850) p. 111. t. 3. f. 14. Jeffreys Brit. Conch. 1 (1862) p. 20 (exc. varr.).
Pisidium supinum Schmidt Zeitschr. f. Malak. (1850) p. 119.
Pisidium henslowanum β *inappendiculatum* Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 581. t. 52. f. 8—10.
Pisidium henslowianum var. α Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 72.

Hab. In **Suecia** hæc species in prov. Skåne multis locis vulgaris, ex. gr. in Höjeå, Alma å, Råbelöf sjö, Ölsjö (MALM), Lefrasjö etc.; in prov. Östergötland passim, frequens circa Wadstena (C. A. W.) et in Nackebosjön (E. v. GOËS!!); in prov. Westergötland ad Göteborg passim, ex. gr. in Quillebäcken, in canali urbico, in Fessbergs å (MALM); in prov. Nerike

in Svartån prope Skebäck (α) et in fossa ad Skebäck (β) (HARTMAN); prov. Upland: in Fyrisån ad Upsala (RIDDERBJ. teste JOHANSON!). β ubique rarior.

PISIDIUM *CUNEATUM E. A. BIELZ.

Concha inæquilatera, oblongo-subtrigona, antice compressa, postice abbreviata, plus minus ventricosa, subtiliter striatula, nitidissima, flavescenti-cornea, parte superiore rufobrunnea; *umbones* protuberantes, obtusiusculi, natibus convexis; *margo dorsalis* superne rectus, antice protensus, leviter arcuatus, forte declivus, areolis depressis cristæformi elevatus; *valvulæ* inferne angulum ad 70° formantes. Long. $3\frac{7}{8}$, alt. 3, cr. 2 mm.

Pisidium cuneatum E. A. Bielz Fauna Moll. Siebenb. (1867) p. 200 (ex specim.-orig. ab auctore ipso missis).

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne: ad Lund hanc formam inveni.

A cette forme appartiennent peut-être quelques-uns des synonymes données sous Pisidium henslowanum β.

3. PISIDIUM PULCHELLUM JEN.

Concha inæquilatera, oblique orbiculari-ovalis, postice abbreviata, ventricosa, profundius et eleganter striata, nitida, lutescenti alba, sed plerumque omnino fusco-cinerea, zonisque 1—4 obscurioribus; *umbones* prominentes, inflati, natibus lævibus convexis; *margo dorsalis* antice lente arcuatus; *valvulæ* inferne angulum subrectum formantes. Long. $3\frac{3}{4}$, alt. 3, cr. $2\frac{3}{5}$ mm.

Pisidium pulchellum Jenyns Monogr. Cycl. in Trans. Phil. Soc. Cambr. IV (1833) p. 306. t. 21. f. 1—5. Hansén Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1848 p. 202. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 89 cum fig. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 233 cum fig. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 73. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 125; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 116.

Pisidium cazertanum δ pulchellum Moquin-Tandon Moll. Fr. II (1855) p. 584. t. 52. f. 24—28.

Pisidium fontinale var. 2 pulchella Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 21.

Hab. In **Suecia** meridionali hæc species rarior: in prov. Skåne in Rönneå, Trolleberg (J. LINDAHL!!) et ad Lund; in prop. Blekinge loco unico ad Ronneby inventa; in ins. Gotland ad Wisby (G. EISEN!!); in prov. Östergötland late destributa et multis locis frequens; in prov. Westergötland ad Göteborg (teste MALM) passim, ex. gr. in Qvillebäcken (forma genuina), in Slottsskogen, Utterbäcks torfmosse et in Mölndals å (f. β Jen.:

concha densius striata); in prov. Nerike ubique vulgaris (Hartman); ad Stockholm in Sicklaön, ad Kungshamn, in Wermdön et in lacu ad Stora Björknäs (Hartman); in prov. Upland ad Ultuna prope Upsala (prof. Lilljeborg!!); in prov. Westmanland in rivo ad Persbo prope Westerås (Johanson!); in prov. Dalarne in par. Gustaf (Ridderbj. sec. Johanson!) et in par. Husby ad Långhyttebruk (C. G. Andersson!!).

4. PISIDIUM SUBTRUNCATUM Malm.

Concha inæquilatera, peroblique trigono-ovata, postice brevissima, ventricosa, tenuissime striatula, nitidula, albida, zona inframediana fusca plerumque ornata; *umbones* parum prominuli, natibus rotundato-convexis, lævibus; *valvulæ* inferne sæpius angulum rectum formantes. Long. $3\frac{1}{4}$, alt. $3\frac{3}{5}$, cr. 2 mm.

Cyclas obtusalis Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 101. Verosim.!

Pisidium subtruncatum Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 92. cum fig. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 72 (exclus. synon.!). Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 125; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 117.

? *Pisidium obtusale* Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 80.

Hab. **Suecia** multis locis prov. Skåne, præcipue in amne Höjeå frequens (Nilsson et Malm); in prov. Blekinge solummodo ad Ronneby inveni; in prov. Östergötland multis locis; in prov. Westergötland in Qvillebäcken et in Fessbergs å prope Göteborg (Malm); ad Stockholm in Djurgårdsbrunnsviken prope Blå porten (Hartman); in prov. Dalarne in Husby sjön ad Säther frequ. (C. G. Andersson!!). Certe in multis aliis locis.

5. PISIDIUM OBTUSALE (Lam?) Jen.

Concha parum inæquilatera, suborbiculato-ovalis, ventricosa, tenuissime striata, sulcis 1—3 concentricis prædita, vix nitidula, solidula, lutescenti-albida vel, margine excepto, ex toto cinereo-fusca aut fulva; *umbones* rotundati, prominentes, validi, inflati, natibus convexis; *margo dorsalis* antice rectiusculus, *ventralis* et *posterior* pulchre arcuati; *valvulæ* inferne angulum 90—125° formantes. Long. 4—5, alt. $3\frac{1}{2}$—4, cr. 3—$3\frac{1}{2}$ mm.

? *Cyclas obtusalis* Lamarck Anim. sans vertebr. V (1818) p. 559. (Conf. Stein Schn. u. Musch. Berl. p. 110!).

Pisidium obtusale Jenyns Monogr. Cycl. in Trans. Phil. Soc. Cambr. IV (1833) p. 307, Friele Norske Moll. (1853) p. 52. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 98 cum fig. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 229. Mörch Syn. Moll. Dan.

(1864) p. 55. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 127; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 119.

Pisidium pusillum var. obtusalis Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 24.

Hab. In **Suecia** per totum regnum usque in Lapponiam borealem (in Luleå Lappmark ad 2000′ supra mare: WALLENB.). In **Norvegia** ad Christiania et Bergen (FRIELE).

6. PISIDIUM PUSILLUM (TURT.).

Concha parum inæquilatera, orbiculato-ovalis, compressiuscula, tenuis, obsolete striata, inferne sulcis nonnullis, vix nitidula, lutescenti-albida, sæpe omnino, nonnumquam margine excepto, cinerea; *umbones* parum prominuli, depressiusculi, lati, natibus convexis; *margo dorsalis* antice regulariter arcuatus, *ventralis* et *posterior* fortius arcuati; *valvulæ* inferne angulum vix rectum formantes. Long. $3\frac{4}{5}$, alt. $3\frac{1}{6}$, cr. $2\frac{1}{4}$ mm.

(*Tellina pusilla* Gmelin Syst. Nat., 1788, p. 3231, certe Pis. pulch. Conf. Mörch Syn. Moll. Dan. p. 75.)

Cyclas pusilla Turton Conch. Brit. (1822) p. 251. t. 11. f. 16, 17.

Cyclas fontinalis Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 101 (teste Malm). Friele Norske Moll. (1853) p. 52. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 81.

Pisidium pusillum Jenyns Monogr. Cycl. in Trans. Phil. Soc. Cambr. IV (1833). Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 104 c. fig. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 23 (excl. var.) Reeve Brit. Moll. (1863) p. 230. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 75. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 127; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 120.

Hab. In **Suecia** fere ubique, saltem in provinciis meridionalibus et mediis. In **Norvegia** cum P. obt. (FRIELE).

7. PISIDIUM PERSONATUM MALM.

Concha parum inæquilatera, orbiculato-ovalis, compressiuscula, tenuissime striata, sulcis 1—5 concentricis prædita, nitidissima, lutescens, margine excepto lutescenti-cinereo, sed sæpius sorde ferruginea omnino obtecta; *umbones* subprominuli, natibus convexis; *margo dorsalis* regulariter arcuatus, *ventralis* et *posterior* fortius arcuati; *valvulæ* inferne angulum 70—80 formantes. Long. $3\frac{2}{3}$, alt. $3\frac{1}{5}$, cr. $2\frac{1}{3}$ mm.

Pisidium personatum Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 107 c. fig. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 74. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 128; *Pisidium *pers.* Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 122*.

Hab. In **Suecia** cum præcedente sed rarius. (In rivulo ad Hofås prope Göteborg primum invenit clar. MALM).

8. PISIDIUM ARCÆFORME MALM.

Concha parum inæquilatera, subrhombea, antice et postice obtuse angulata, ventricosa, tenera, fragilis, tenuiter striata, nitidissima, albido-lutescens vel, margine excepto, cinerascenti-fulva; *umbones* prominuli, validi, natibus convexiusculis; *margo ventralis* subrectus; *valvulæ* inferne angulum ad 130° formantes. Long. 3, alt. $2\frac{1}{3}$, cr. $1\frac{5}{6}$ mm.

Pisidium arcæforme Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 101. cum fig. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 73. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 128; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 121.

Pisidium roseum (Scholtz?) Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 26 (ex specim. orig. ab ipso auctore missis).

Hab. In **Suecia** prov. Skåne in aquis stagnantibus ad Lund (C. A. W.) nec non in fluviis Helgeå et Rönneå (J. LINDAHL!!); prov. Blekinge ad Ronneby (C. A. W.); prov. Westergötland ad Göteborg in Qvillebäcken (MALM); prov. Nerike ad Adolfsberg prope Örebro (HARTMAN); prov. Östergötland ad Omberg (C. A. W.) et ad Mjölsefall (E. v. Goës!!).

9. PISIDIUM NITIDUM JEN.

Concha parum inæquilatera, orbiculato-ovalis, compressiuscula, tenuis, tenuiter striata, ad nates sulculis 2—5, inferne sulcis 1—2, nitidissima, lutescens vel lutescenti-cinerea, margine excepto; *umbones* subdepressiusculi, natibus convexiusculis; *margines* omnes regulariter curvati; *valvulæ* inferne angulum rectum formantes. Long. 3, alt. $2\frac{3}{5}$, cr. $1\frac{4}{5}$ mm.

Pisidium nitidum Jenyns Monogr. Cycl. in Trans. Phil. Soc. Conch. IV (1833) p. 304. t. 20. f. 7, 8. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. II (1851) p. 131; III (1855) p. 110 cum fig. Jeffreys Brit. Conch. I (1862) p. 25. Reeve Brit. Moll. (1863) p. 231. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 74. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 129; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 122.

Hab. In **Suecia** sat frequenter ad Quillebäcken et in Fessbergs å prope Göteborg prov. Westergötland legit celeberr. MALM; in amne Rönneå prov. Skåne (J. LINDAHL!!), ad Mjölsefall prov. Östergötland (E. v. Goës!!) ad Bredvik in Lidingön prope Stockholm (HARTMAN). — Quæritur hæc species bona, sed parum cognita, sæpissime in specim. junioribus P. obtusalis, a quibus tamen longe diversa!

Fam. UNIONIDÆ.

Animal pallio antice et inferne aperto, postice connato, aperturis duabus subtubæformibus. *Concha* oblonga, magna, inæquilatera, æquivalvis, intus margaritacea, dente cardinali valvæ dextræ simplici, v. sinistræ bipartito, vel cardine edentulo; ligamentum extus semper distinctum.

Gen. UNIO RETZIUS.

Concha dente cardinali valvæ dextræ simplici, valvæ sinistræ bipartito; dente laterali lamelliformi, solitario in v. dextra, duplici in v. sinistra.

Quelques auteurs anglais et français, parmi lesquels LEA, REEVE et MOQ.-TANDON, ne connaissent pas RETZIUS comme l'auteur du nom donné à ce genre ni comme le savant auquel on doit la découverte des espèces décrites dans le Nov. Test. Gen.; ils croient: "that the genus belongs to L.-M. PHILIPPSON, the autor of the dissertation, Retzius being the presiding officer of the institution where this thesis was presented". Ce n'est pa le seul cas où la forme sous laquelle les dissertations académiques étaient jadis présentées chez nous, a conduit des auteurs étrangers à donner au "répondant" le nom d'auteur qui revenait au président (præses) de l'acte. Il suffira de mentionner que le nom de L.-P. PHILIPSON est totalement inconnu dans toute notre littérature zoologique (quand la dissertation de Retzius fut soumise à la discussion académique Philipson n'y figurait qu'a titre de "répondant pour exercice" = respondens pro exercitio), tandis qu' ANDERS-JAHAN RETZIUS était nonseulement un auteur éminent en zoologie, mais encore un "géant en fait de science". Quoique actuellement presque totalement oublié, le Dr en Médecine LAURENT MÜNTER PHILIPSON, présente un certain intérêt au point de vue de l'histoire litteraire, par sa polémique esthétique pleine de talent à la fin du siècle dernier.

1. UNIO CRASSUS RETZ.

Concha ovalis vel oblongo-ovata, ventricosa; *dentes cardinales* valvæ sinistræ duo, æquales.

1. **Typicus.** *Concha* ovalis, ventricosa, crassa, epidermide valida, picea, umbones versus pallidior, postice sæpe radiis linearibus confertissimis, intus lactea vel carnea; sulci incrementi areæ hiantes; *margo dorsalis* magis curvatus quam *ventralis*, qui sæpius subretusus; *umbones* depressi, natibus decorticatis, lævibus; *dentes cardinales* crassi, angulati, striati et crenati. Long. ad 80 mm.

Unio crassus Retzius Nov. Test. Gen. (1788) p. 17. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 108. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 19. f. 128; VI (1837) p. 55. f. 411.

Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 114. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 82. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 131; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 123.

β **acutus** ROSSM. (Icon. f. 413): concha transverse acute ovata, ventricosa, crassa, umbonibus turgidis, anterius rotundata, posterius in rostrum obtuse acutum declinatum producta; dentes cardinales crassi, subcompressi, conici, crenati.

2. **Batavus** LAM. ex NILSS. *Concha* ovalis vel obovata, ventricosa, solidula, posterius dilatata, subrhombea, luteo-viridis, radiis saturatius viridibus, intus citrino-margaritacea, pulcherrime nitens; *margo dorsalis* postice ad $\frac{2}{3}$ strictus, sursum paullulum vergens, *ventralis* rectiusculus; *umbones* prominuli, parvi, natibus parum decorticatis, undato-rugosis; *dentes cardinales* superne compressi, denticulati. Long. ad 70 mm.

Unio batavus Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 112. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 20 f. 128.

Unio crassus var. batavus Malm Göteb. Vet , Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 116. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 82. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 135; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 124.

Junior: concha sublutea, virescens, radiis pallide viridibus; dentes cardinales compressi, crenati.

β **riparius** ROSSM. (Ic. f. 212): concha minuta, fusca, radiata, margine dorsali magis curvato, ventrali subretuso. — U. fusculus Z.

γ **rivularis** ROSSM. (Ic. f. 414 : concha minor, oblongo-ovalis, fusca.

3. **Ater** NILSS. *Concha* oblongo-ovata, margine superiore et inferiore plerumque æqualiter fere curvati, ventricosa, crassa, præsertim parte inferiore antice crassissima, extus epidermide atra, nitida quamvis striata, hinc inde decorticata, ibique argenteo-margaritacea, intus margaritaceo-alba; *umbones* depressiusculi, natibus undatis vel decorticatis lævibus; *dentes card.* crassi, angulati, crenati. Long. ad 95 mm.

Unio ater Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 108. Rossmässler Iconogr. II (1835) p. 23. f. 133.

Unio crassus var. ater Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 116. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 131; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 125.

4. **Subdecurvatus.** *Concha* oblongo-ovata, ventricosa, viridi-fusca, postice compressa, latior, subdecurvata, rotundate truncata; *margo ventralis* plus minus retusus; *umbones* tumidi; dentes cardinales compressi, crassiusculi, crenati. Long. 50—54 mm. Forma inter U. decurvatum Rossm. f. 131 et U. atrovir. Rossm. f. 206 media.

β **reniformis** ROSSM. (Ic. fig. 113): concha reniformi-oblonga, crassa, ventricosa, atro-fusca, postice in rostrum linguæforme decurvatum rotundatum producta; margo ventralis retusus; dentes card. compressiusculi, crenati; long. 60 mm.

Hab. In **Suecia** *forma typica* vulgaris in amnibus Käflinge-, Tollarp- et Alma-åar prov. Skåne et in Svartån prov. Östergötland; *batavus* in Höje-, Köpinge- et Alma-åar prov. Skåne, Sken-ån et Stångån prov. Östergötland, nec non (teste amic. C. G. ANDERSSON) in lacu Hyen par. Schedvie prov. Dalarne; *ater* in amnibus Höje- et Köpinge-åar prov. Skåne, in amne ad Söderköping et in Svartån prov. Östergötland; *decurv.* in Käflinge-å prov. Skåne et in Motala ström prov. Östergötland. β *renif.* in Käflinge-å prov. Skåne.

2. UNIO TUMIDUS RETZ.

Concha ovato-oblonga, postice sensim attenuata et stricte elongata, ventricosa; *dentes cardinales* valvæ sinistræ duo, cristati, anteriore multo minore.

1. **Typicus.** *Concha* tumida, crassa, ponderosa, postice in rostrum conicum producta, viridi-castanea, plerumque radiata, epidermide brunnea, striis zoniformibus nigricantibus, nitens; *margo dorsalis* strictiusculus, *ventralis* curvatus; *umbones* postice angulo obtuso, plicis undulatis asperis; ligamentum validum; *dentes cardinales* validi, compressi, crenati. Long. 100—110 mm.

Unio tumidus Retzius Nov. test. gen. (1788) p. 17. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 109. Rossmässler Iconogr. figg. 70, 203, 204, 772!, 773. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 118. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 85. (f. 73). Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 76. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 132; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 127.

β **limicolus** MÖRCH: testa ovali-pyriformis, epidermide nigrescente; long. 80 mm. (Rossm. Ic. f. 214. Nord. et Nyl. l. c. f. 73).

2. **Conus** SPRGL. *Concha* parva, ventricosa, ovato-pyriformis, rostro elongato, nitida, lutescens, sæpius viride radiata, vel concolor olivaceo-brunnea; *margo ventralis* postice subretusus; dimidium posticum interdum limo obductum. Long. 60 mm.

Unio conus Sprengler Naturh. Selsk. Skr. 3 B. 1 H. p. 57. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 77.

Unio tumidus var. lacustris Rossmässl. Iconogr. figg. 774, 775. Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 119. Westerl. Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 126.

3. **Saccatus** ROSSM. *Concha* postice dilatata, inferius saccata; alt. usque 36, long. 75, lat. 25 mm. (Rossm. Ic.); concha epidermide splendida, obscure ænea, numquam viridi-radiata, parte posteriore non in rostrum conicum producta, sed lata, sensim compressa, linguæformi, limo semper obducta, natibus decorticatis, semper lævibus, dentibus cardinalibus validis, margine serratis vel crenatis. Long. 100—110, alt. 50 mm. (Westerl. Mal. Bl.).

Unio tumidus var. saccatus Rossmässler Iconogr. XVIII (1859) p. 138 fig. 969. Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 128.
Unio (tumidus) *elegans* Westerlund in Malak. Bl. XIV (1867) p. 206.

Hab. In **Suecia** *forma typica* passim in provinciis Skåne, Småland, Östergötland, Westergötland, Nerike, Upland et Westmanland; *conus* in fossis ad Christianstad prov. Skåne copiose; *sacc.* a clariss. LOVÉN, KINBERG et HANSÉN ad ROSSMÄSSLER missus a Kisasjön, Föllingarne, Åsunden, Köflefors-ån, Hargsjön, Ämmern et Svartån prov. Östergötland, in Wersjön, Bodasjön, Emån et Hulingen prov. Småland gub. Kalmar, in Köpingeån prov. Skåne (ROSSM. l. c.); in prov. Dalarne in lacu Brunnsjön par. Hedemora invenit C. E. GRILL, teste amic. C. G. ANDERSSON!

3. UNIO PICTORUM (LIN.).

Concha elongata, minus ventricosa; *dentes cardinales* valvæ sinistræ duo, cristati, posteriore multo minore, sæpe evanescente.

1. **Typicus.** *Concha* ovali-oblonga, humilis, posterius in rostrum truncato-obtusatum producta, *margine dorsali* rectiusculo, postice angulum obtusum formante, ventrali recto, medio subretuso, viridi-lutescens, fusco-cingulata; *nates* tuberculatæ vel, decussatæ, undulatæ. Long. 75—85 mm.

Mya pictorum Linné Syst. Nat. X (1858) p. 671.
Unio pictorum Retzius Nov. test. gen. (1788) p. 17. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 111. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 118. Malm pr. p. Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 119. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 88. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 132; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 129.

α **maximus:** rugæ incrementi dimidii antici grossæ, dimidii postici obsoletissimæ; long. interdum ad 100 mm. Rossm. figg. 196, 587.
β **lævigatus:** concha minor, humilior, rugis incrementi plus minus obsoletis. Rossm. fig. 71.
γ **deshayesi** MICH.: concha flavo-viridis, rugæ incrementi dimidii antici numerosiores, area lamellis confertissimis, medio obtuse-angulata abbreviata. (Mörch.) Rossm. fig. 197.

2. **Limosus** NILSS. *Concha* ovali-oblonga, humilis, posterius elongata, subtruncata, *margine dorsali* leviter et æqvaliter arcuata, postice angulo destituto, *ventrali* subrecto, plerumque brunnea, striis zonæformibus, subrugosis, saturatius fuscis; pars conchæ posterior limo semper obducta; *nates* decorticatæ, sublæves. Long. 75—90 mm.

Unio limosus Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 110. Mörch Syn. Moll. Dan. (1846) p. 79.

Unio pictorum β *lacustris* Rossmässler Ic. f. 199.

Unio pictorum β Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. III (1855) p. 110. Westerlund Sv. Moll. (1864) p. 132; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 130.

β **longirostris** ZIEG., ROSSM.: concha cuneato-linguæforme producta; umbones extremitati anteriori perquam approximati. Rossm. figg. 200, 738.

Hab. In **Suecia** passim in provinciis Skåne, Småland, Westergötland, Östergötland, Nerike, Wermland, Upland et Westmanland.

Gen. MARGARITANA SCHUM.

Concha dente cardinali valvæ dextræ simplici, valvæ sinistræ bipartito (vel dentibus duobus), omnibus crassis, conicis; dentes laterales nulli.

1. MARGARITANA MARGARITIFERA (LIN.).

Concha ovali-oblonga, compressiuscula, crassa, ponderosa, epidermide nigro, transversim striato, rudi obtecta, curva, interdum subreniformis, *margine dorsali* arcum circuli majoris formante, *ventrali* medio sinuato; *nates* depressæ, decorticatæ. Long. 120—130, alt. 53—60, crass. 31—34 mm.

Mya margaritifera Linné Syst. Nat. X (1758) pag. 671; Fauna Su. ed. 2. (1761) p. 516.

Unio margaritiferus Retzius Nov. test. gen. (1788) p. 16. Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 103. Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 120. f. 72—74.

Margaritana margaritifera Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 133; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 131, 132.

β **elongata** (LAM.?) NILSS.: concha multo minor, plerumque angustior minusque curva, margine ventrali minus sinuato, crassa, nigra, rudis, striata; margo dorsalis postice rectus et obtusus; dentes card. minuti; long. 76—78, alt. 33—35, cr. 18—20 mm. — *Unio elongatus* Nilsson l. c. p. 106.

γ **borealis** mh.: concha postice valde producta, ad posteriorem partem ligamenti latissima, antice angusta; long. 127, alt. ad umb. 48, ad extr. ligam. 52, cr. 34 mm. — *Marg. margaritif.* Wallenberg in Malak. Bl. 1858 p. 119.

Hab. Suecia in fluviis, præsertim majoribus (*β elong.* potius in rivis) a prov. Skåne saltem in borealem partem prov. Dalarne. *γ bor.* in rivo ad Jockmock (Silbojock: Boheman) in Lulcå Lappmark (Wallenberg); forma intermedia in Dalarne et Jemtland.

Gen. ANODONTA Bruguière.

Concha cardine edentulo.

1. ANODONTA CYGNEA (Lin.).

Concha ovalis vel oblongo-ovata, tenuis, inflata, sulcis transversalibus profundis, extus et intus conspicuis, exarata.

1. **Normalis.** *Concha* ovalis, tenuis, inflata, flavescens, fasciis viridibus; rugæ incrementi inæquales; *margo dorsalis* rectus, *ventralis* arcuatus; area declivis, utrinque sulcis 2—3 et sæpe radiis viridibus marginata; *nates* cinerei, umbonibus undulatis. Long. 130—180, alt. 65—80, cr. 45—60 mm.

Anodonta cygnea Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 111. fig. 67. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 90 f. 79. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 83. Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 134; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 133.

2. **Cellensis** Gmel. *Concha* oblongo-ovata, humilis, subventricosa, tenuis, obscure olivaceo-viridis, brunneo-fasciata, interdum concolor, interstitiis rugarum incrementi excavatis, antice latius rotundata, postice elongata, subangustata; *margo ventralis* dorsali subparallelus, medio retusus; area compressa Long. 112—152, alt. 58—70, cr. 40—55 mm.

Anodonta sulcata Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 113.
Anodonta cellensis Rossmässler Iconogr. I (1836) p. 22. f. 280. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) fig. 78. Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 84.
Anodonta cygnea-cellensis Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 135; Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 134.

β **intermedia** (Lam., Nilss.: concha rhombeo-ovata, compressiuscula, tenuissima, læte viridis, flavescens, subradiata; margo anterior et inferior rotundati, superior rectus; area compressissima, margine ple-

rumque exaltata; nates planæ, undulatæ, sæpe ferrugineæ. (Concha junior?). —

Hab. In **Suecia** formam normalem ad Wadstena prov. Östergötland cepit et numerosa et maxima spec. misit beat. E. v. Goës; in prov. Småland gubern. Jönköping in Skiresjön (teste MALM); *cellensis* in prov. Skåne, Småland, Östergötland passim frequens, rarior in prov. Nerike (in lacu Tisaren: HARTMAN), ad Stockholm (in piscina ad Carlberg: MALM), in prov. Dalarne (in lacu Ösjön par. Falkärna: C. G. ANDERSSON!).

ANODONTA *COMPLANATA ZIEGL., ROSSM.

Concha elongato-elliptica, compressa, antice et postice attenuata, striata, fuscula, viride et luteo cingulata; *margo-dorsalis* ascendens, rectus, *ventralis* leviter arcuatus, antice curvatus; umbones convexiusculi, fere antici; *area* parva, compressa, subrhombea. Long. 46—65, alt. 27—35, cr. 13—18 mm.

Anodonta complanata Rossmässler Iconogr. I (1835) p. 112. f. 68; IV (1836) p. 24. f. 283. Nord. et Nyl. Finl. Moll. (1856) p. 89. f. 77.
Anodonta cygnea β complanata Westerlund Sv. Moll. (1865) p. 135.

Hab. In **Suecia**, prov. Skåne (ex. gr. in Noseå, Alma å), prov. Småland, gub. Kalmar, prov. Östergötland multis locis (ex. gr. Motala ström, in lacubus Omen et Tåkern, in amne ad Söderköping etc.), prov. Upland, prov. Westmanland (in Svartån ad Westerås: JOHANSON!), prov. Dalarne (in lacubus Hönsan, Hyen, Brunnsjön: C. G. ANDERSSON!!).

ANADONTA *ANATINA (LIN.).

Concha ovata, viridi-fusca, tenuis, compressiuscula, postice alta, rostro lato, antice humilis; *area* compressa, medio angulata, utrinque radiis viridibus plus minus conspicuis circumscripta; *margo ligamentalis*, rectus, *postligamentalis* declivus, rectus vel leviter concavus, ventralis ante medium subretusus, utrinque sensim adscendens; *nates* extremitati approximatæ. Long. 59—80, alt. 25—45, cr. 16—27 mm.

Anodonta anatina β et γ Nilsson Hist. Moll. Su. (1822) p. 115. A. anat. Rossmässler Iconogr. figg. 419!, 417, 418 (420). Westerlund Coll. Typ. Moll. Su. (1868) n:o 135.
Anodonta cygnea γ anatina Westerl. Sv. Moll. (1865) p. 135.

β **piscinalis** NILSS.: concha elliptico-ovato, ventricosa, crassiuscula, luteo-viridis vel pallide lutea, radiis confertis, obscure viridibus, fusco-cingulata; umbones tumidi, pallide cinerei, natibus remotis, rubris; long. 90—100, alt. 56—60 mm. — *A. piscinalis* Nilsson l. c. p. 116. Rossmässler l. c. fig. 281. *A. cygnea var. piscinalis* Westerl. l. c. p. 135. *A. *anatina v. piscinalis* Westerl. Coll. Typ. n:o 136.

γ **radiata** MÜLL.: concha tenerrima, pellucida, flavescens, radiis plurimis ab umbone ad peripheriam viridescentibus, quarum nonnulli lati et obscuri; rugæ incrementi in parte anteriore sæpe rudes; long. 90—130, alt. 50 - 70 mm. — *Mytilus radiatus* Müller Verm. Hist. II. p. 209. *A. radiata* Mörch pr. p. Syn. Moll. Dan. p. 86.

δ **rostrata** KOK.: concha subrhombeo-oblongata, compressiuscula, tenuis, fuscula, nigro-fuscocingulata, posterius in rostrum elongatum, late truncatum producta, inferius subretusa; area compressa, elata; long. 90—100, alt. 55—60 mm. — *A. anatina var. α* Nilsson l. c. p. 115. *A. rostrata* Rossm. l. c. fig. 284. *A. cygnea v. rostrata* Westerl. l. c. p. 135. *A. *anatina v. rostrata* Westerl. Coll. Typ. n:o 137.

ε **ponderosa** PFEIFF.: concha ovali-subrhombea, ventricosa, crassa, ponderosa, rudis, anterius rotundata, posterius in rostrum breve truncatum producta, superius adscendens, inferius subretusa; umbones tumidi; long. 100—120, alt. 60—65 mm. — *A. ponderosa* Rossm. l. c. fig. 282. Nord. et Nyl. l. c. p. 92. fig. 80. *A. *anatina var. ponderosa* Westerl. Coll. Typ. n:o 138.

Hab. In Suecia *forma typica* et *rostrata* per provincias meridionales et medias, saltem usque in prov. Dalarne, distributa. *β piscin.* et *ε ponder.* saltem usque ad Stockholm, ubique tamen rariores. *γ radiata* multis locis in prov. Skåne. In Norvegia forma anatina typ. ad Christiania passim (FRIELE).

III.

LES FAUNES MOLLUSQUES DES DIVERSES PROVINCES DE LA SUÈDE.

Apres avoir fait aussi complètement que possible la revue des types qui constituent actuellement la première phalange de la faune mollusque scandinave, nous allons considérer les contingents respectifs fournis à cette faune par nos diverses provinces, de même que les conditions et le nombre dans lesquels ces types s'y présentent.

Avant d'entrer en matière, il sera bon de voir ce que les royaumes unis (Suède et Norvège) possèdent de types particuliers ou de types communs avec les pays voisins.

La Suède posséde 82 espèces et 21 sous-espèces (données comme telles dans ce présent travail) de mollusques de terre, 54 espèces et 17 sous-espèces de mollusques d'eau douce, soit en tout 174 espèces et sous-espèces. On a trouvé en **Norvège** 54 espèces et 7 sous-espèces de mollusques terrestres, 26 espèces et 6 sous-espèces de mollusques d'eau douce, ce qui donne un total de 93 espèces et sous-espèces. **La Finlande** compte 37 espèces de mollusques de terre, 36 espèces et 2 sous-espèces d'eau douce, somme totale: 75 espèces et sous-espèces. (D'après NORDENSKIÖLD et NYLANDER Finl. Moll. 1856, et Mémoires pour servir à l'Histoire naturelle de la Finlande, IIIème cahier, 1859, ainsi qu'avec addition de *Clausilia dubia*, prise à Menzelä, d'après des ex. au Musée de l'Etat, et de *Planorbis rossmässleri*, à laquelle appartient sans nul doute la forme de Pl. albus citée, p. 66, par NORD. et NYL. pour Paanajärvi). En **Danemark**, y compris le Schleswic, on trouve (d'après MÖRCH, Syn. Moll. Dan., adjonction plus récente de MÖRCH, Dr POULSÉN, n:o 1 à 3, 1867 des Actes de la Société d'histoire naturelle = Nat. Hist. Foren. Vidensk. Meddel., et Mr FRIEDEL, Malakoz. Blätter, 1870) 77 espèces et 11 sous-espèces de mollusques de terre[1]), 56 espèces et 9 sous-espèces de mollusques d'eau douce, en tout 153 espèces et sous-espèces.

---

[1]) J'ai excl. *Vertigo costulata* NILSS. comme trop incertaine, et ajouté *Pupa alpestris*, trouvé par moi près de Copenhague, ainsi que *Pupa cylindracea*, prise à Bornholm par M. POULSÉN.

La **Suède** possède les mollusques suivants, que n'ont pas été trouvés jusqu'ici en Norvège:

Limax tenellus.
— **mucronatus.*
*Zonites *draparnaldi.*
— **subterranea.*
*Arion *citrinus.*
— *limacopus.*
Helix striata.
— *incarnata.*
— *rubiginosa.*
— **depilata.*
— **concinna.*
— *liberta.*
— *bidens.*
— *aculeata.*
— *lamellata.*
Buliminus montanus.
*Cochlicopa *minima.*
Acicula hyalina.
Clausilia nilssoni.
— *plicata.*
— *ventricosa.*
— **ommæ.*
— **connectens.*
— **sejuncta.*
— **oreas.*
— **scanica.*
— **personata.*
*Balea *pyrenaica.*
Alloglossa avenacea.
*Pupa *anconostoma.*
— *costulata.*
— *antivertigo.*
— *lilljeborgi.*
— *ronnebyensis.*
— *alpestris.*
— *shuttleworthiana.*
— *ovoidea.*
— *arctica.*
— *genesii.*
— *pineticola.*
— *angustior.*
— *otostoma.*
— *collina.*
— *tumida.*
*Succinea *temporalis.*
— *arenaria.*
*Limnæa *maritima.*
Amphipeplea glutinosa.
*Physa *semiglobosa.*
Planorbis corneus.
— **ammonoceras.*
— *carinatus.*
— **goësi.*
— *discus.*
Planorbis limophilus.
— **dispar.*
— **gothicus.*
— *rossmässleri.*
— **gredleri.*
— *malmi.*
— *complanatus.*
— *riparius.*
Paludina contecta.
Bythinia leachi.
— *troscheli.*
Hydrobia steini.
Valvata macrostoma.
— **pusilla.*
— *antiqua.*
*Sphærium *scaldianum.*
— **calyculatum?*
Pisidium amnicum.
— *pulchellum.*
— *subtruncatum.*
— *nitidum.*
— *henslowanum.*
— **cuneatum.*
— *personatum.*
— *arcæforme.*
Unio-genus totum.
Anodonta cygnea.
— **complanata.*

Les mollusques **norvegiéns** suivants manquent en Suède:

*Limax *norvegicus.*
*Vitrina *angelicæ.*
*Helix *rudis.*
— **colliniana.*
Helix candicans.

La **Finlande** (qui n'a pas d'espèce à elle propre) manque des mollusques suédois et norvégiens suivants:

Limax tenellus.
— *lævis.*
— **mucronatus.*
— **norvegicus.*
Lehmannia marginata.
*Vitrina *angelicæ.*
*Zonites *draparnaldi.*
Zonites pura.
— *nitidula.*
— *alliaria.*
— *crystallina.*
— **subterranea.*
*Arion *albus.*
— **citrinus.*
*Arion *melanocephalus.*
— *limacopus.*
Helix (pomatia).
— *nemoralis.*
— *candicans.*
— *striata.*
— *bidens.*

Helix aculeata.
— *lamellata.*
— *incarnata.*
— **depilata.*
— **concinna.*
— *liberta.*
— **rudis.*
— **colliniana.*
— *rotundata.*
Buliminus montanus.
*Cochlicopa *minima.*
Acicula hyalina.
Clausilia nilssoni.
— *biplicata.*
— *plicata.*
— *ventricosa.*
— *rolphi.*
— **scanica.*
— **æmula.*
— **oreas.*
— *pumila.*
— **sejuncta.*
— **ommæ.*
— **connectens.*
— **personata.*
*Balea *pyrenaica.*
Pupa cylindracea.
— **anconostoma.*
— *costulata.*
— *minutissima.*
— *(columella).*
— *lilljeborgi.*
— *ronnebyensis.*
— *shuttleworthiana.*
— *ovoidea.*
— *genesii.*
— *pineticola.*
— *angustior.*
— *tumida.*
— *collina.*
— *otostoma.*
Alloglossa avenacea.
*Succinea *temporalis.*
— *oblonga.*
— *arenaria.*
*Limnæa *maritima.*
— *glabra.*
*Physa *semiglobosa.*
*Planorbis *ammonoceras.*
— *carinatus.*
— **goësi.*
— *discus.*
*Planorbis *gothicus.*
— *limophilus.*
— **drapanaldi.*
— *glaber.*
— **deformis.*
— *malmi.*
— **gredleri.*
— *riparius.*
— *complanatus.*
Valvata antiqua.
— **pusilla.*
Paludina vivipara.
Bythinia leachi.
— *troscheli.*
Hydrobia steini.
*Sphærium *scaldianum.*
— **consobrinum.*
— *lacustre.*
Pisidium pulchellum.
— *(obtusale).*
— *henslowanum.*
— **cuneatum.*
— *arcæforme.*
— *personatum.*
— *nitidum.*

En **Danemark** (y compris le Schlesvic) se trouvent les types suivants, non observés jusqu'ici en Suede:

Limax variegatus.
— *cinereus.*
— **unicolor.*
— **heydeni.*
Zonites nitens.
— *excavata.*
Helix obvoluta.
— *candidula.*
— *conspurcata.*
— *ericetorum.*
Helix umbrosa.
— *edentula.*
— *acuta.*
— *rupestris.*
Pupa lævigata.
Clausilia parvula.
*Succinea *gracilis.*
— **albida.*
*Ancylus *deperditus.*
Cyclostoma elegans.
Acicula lineata.
Valvata minuta.
Hydrobia similis?
Sphærium rivicolum.
— *solidum.*
— **ryckholti.*
Pisidium cinereum.
*Anodonta *kletti* m. fl.
Dreissena polymorpha.

Les mollusques suèdois-norvégiens suivants manquent en **Danemark**:

*Limax *norvegicus.*
— **mucronatus.*
*Vitrina *angelicæ.*
Zonites petronella.
*Arion *citrinus.*
— *limacopus.*
Helix striata.
— *candicans.*
— **colliniana.*

Helix harpa.
Buliminus montanus.
Clausilia nilssoni.
— *rolphi.*
— **æmula.*
— **scanica.*
— **oreas.*
— **ommæ.*
— **connectens.*
— **personata.*
Pupa **anconostoma.*
— *(costulata).*
Pupa columella.
— *lilljeborgi.*
— *ronnebyensis.*
— *shuttleworthiana.*
— *ovoidea.*
— *arctica.*
— *genesii.*
— *pineticola.*
— *tumida.*
— *collina.*
— *otostoma.*
Succinea **temporalis.*
Physa **semiglobosa.*
Planorbis **goësi.*
— *discus.*
— **deformis.*
— **gothicus.*
— *rossmässleri.*
— **gredleri.*
— *limophilus.*
— *malmi.*
— *riparius.*
Pisidium **cuneatum.*

Les îles Shettland (d'après J. GWYN JEFFREYS, annales and Magazine of Natural Hist., Octobre 1868) possèdent les mollusques suivants de terre et d'eau douce:

Limax maximus.
— *agrestis.*
— *lævis.*
Lehmannia marginata.
Vitrina pellucida.
Zonites cellaria.
— *alliaria.*
Arion ater.
Helix hortensis.
— *arbustorum.*
— *rotundata.*
Cochlicopa lubrica.
Clausilia bidentata.
Pupa cylindracea.
Succinea putris.
— *pfeifferi.*
Limnæa peregra.
— *truncatula.*
Planorbis crista.
— *glaber.*
— *contortus.*
Pisidium nitidum.
— *roseum.*

Les îles Féroé (Færöarne) contiennent (d'après Faunula Molluscorum Insularum Faeröensium, par O.-A.-L. MÖRCH, 1868) les mollusques de terre et d'eau douce suivants:

Limax agrestis.
Lehmannia marginata.
Vitrina pellucida.
Zonites alliaria.
Arion ater.
— *hortensis.*
Limnæa balthica
— *truncatula.*

En **Islande**, la faune mollusque de terre et d'eau douce, se compose (d'apr. MÖRCH) des espèces suivants:

Lehmannia marginata.
Vitrina beryllina v. angelicæ.
Zonites alliaria.
— *hammonis.*
Conulus fulvus.
Arion ater.
— *subfuscus.*
Helix arbustorum.
— *hortensis.*
Cochlicopa lubrica.
Pupa sp. (Vertigo?).
Succinea **grönlandica.*
Planorbis spirorbis.
Limnæa truncatula.
Limnæa vulgaris.
— *peregra.*
Pisidium pulchellum.
— *pusillum.*
— *personatum.*
— *nitidum.*

Nous passons maintenant à l'étude des circonstances et du nombre qui président à la présence et à la distribution des mollusques de terre et d'eau douce dans les diverses provinces de la Suède.

En **Scanie** [1]), cette province la plus méridionale de notre pays (située environ le $55\frac{1}{3}$ et le $56\frac{1}{2}$ de lat. bor.), ont été trouvées 125 espèces et sous-esp., savoir 62 esp., 11 sous-esp. de mollusques de terre et 47 esp., 5 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Particulières à la Scanie sont: *Arion *citrinus*, *Helix liberta*, *H. *depilata*, *Clausilia nilssoni*, *Cl. biplicata*, *Cl. *scanica*, *Cl. *connectens*, *Cl. *oreas*, *Pupa shuttleworthiana*, *Pisidium *cuneatum*. Avec le Blekinge, la province possède en commun: *Arion limacopus;* avec Blekinge et Småland: *Helix incarnata;* avec le Blekinge et l'Ostrogothe: *Helix lamellata;* avec Öland et Småland: *Acicula hyalina;* avec le Blekinge et Öland; *Planorbis riparius;* avec Öland et Gotland: *Planorbis *ammonoceras;* avec le Blekinge, Öland et Gotland: *Pupa costulata;* et avec Gotland: *Pupa cylindracea.* — La Scanie est riche entre toutes les autres provinces par sa nature si propice au bien-être des mollusques, par ses formations géologiques et par sa luxuriante végétion d'arbres à feuilles. Cela ne s'applique toutefois à la province dans la totalité, mais principalement à la partie qui repose sur le calcaire ou la craie, car la Scanie contient la plupart des formations géologiques de la Suède. Les *roches primitives* occupent toute la partie du nord; elles forment à l'Ouest le *Hallandsås* (colline ou faîte de Halland), haute d'environ 500 pieds ($148\frac{1}{2}$ metres), qui s'etend entre la Scanie et le Halland jusqu'à la mer; la chaîne de montagnes qui commence à l'extrémité NO. avec la haute falaise solitaire du *Kullaberg*, qui avec deux interruptions, court sous les noms de *Söderåsen* et *Linderödsåsen*, à travers la province dans la direction du S.E., forme en terminant sur les rives de la Baltique la crête de *Stenshufvud*, et partage la Scanie en deux moitiés, une septentriolale et une méridionale. Au sud de ces chaînes montagneuses, jusqu'à la mer, et principalement au SO., le plus grande partie de la province se compose de couches de transition ou, en d'autres termes, de la *formation soussilurienne.* Des formations méso-zoïques, celle de la *craie* apparaît sur des points épars, mais principalement à l'angle SE. et dans la partie SO. de la province.

[1]) Explorée par M. D. Landgren, *S. Nilsson*, *A. W. Malm*, C. W. Hultmark, G. Silfversvärd, *H. D. J. Wallengren*, E. Hemberg!!, O. Nordstedt!!, C. Roth!!, J. A. Wallin!!, L. P. Holmström!!, J. Lindahl!!, A. J. Johansson!! et l'auteur. Les explorateurs dont le nom est indiqué en *italiques* ont publié les résultats de leurs recherches, ceux dont le nom est suivi d'un! ont communiqué ces mêmes resultats a l'auteur et ceux avec!! ont bien voulu remettre leurs collections pour revue à l'auteur.

Au point du vue botanologique on a divisé la Scanie dans les trois régions naturelles suivantes: la région montagneuse ou des pins *(regio pineto-montana)*, celle des arbres à feuilles *(regio frondosa)* et la région des champs *(regio campestris)*. La *première* comprend la Scanie du Nord, caractérisée par des bois de pins souvent étendus et deserts, par de vastes tourbières impracticables ou par d'immenses bruyères stériles. Toute la contrée est rude et âpre, occupée de chaînes de collines nues et raboteuses à l'Est, couvertes à l'O. de gravier et de sable. Cette region est située en moyenne 300 pieds (89 métres) au-dessus de la mer. La *région des arbres à feuilles* ou celle dans laquelle ils prédominent ou se présentent exclusivement, occupe la partie moyenne de la province, principalement les deux côtés des chaînes montagneuses qui traversent la contrée du NO. au SE., et les hauteurs, couvertes de magnifiques bois de hêtre et d'autres arbres à feuilles, de la partie O. et SO. La *région des champs* ou la partie presque totalement dépouillée de forêts, occupée soit par des landes stériles, soit par des champs d'une fertilité proverbiale, est située à un niveau inférieure a la précédente, qu'elle entoure le long de la mer, en un arc partant du Blekinge à l'est et passant au sud et à l'ouest. — Comme on peut le voir par cette courte description, c'est principalement dans la region des arbres à feuilles reposante sur les couches siluriennes et crétacées, que la Scanie possède une riche faune mollusque, tandis que la plupart des autres localités se distinguent à cet égard par une pauvreté remarquable. Les espèces suivantes caractérisent spécialement cette region, soit par leur extension géographique considérable dans la province, soit par la masse des individus: *Zonites alliaria*, *Z. nitidula*, *Z. pura*, *Helix pomatia*, *H. nemoralis*, *H. strigella*, *H. incarnata*, *H. bidens*, *H. hispida*, *H. lamellata*, *H. aculeata*, *H. rotundata*, *Buliminus obscurus*, *Clausilia laminata*, *Cl. pumila*, *Pupa substriata*. — *Amphipeplea glutinosa*, *Limnæa stagnalis*, *L. palustris*, *L. limosa*, *Planorbis corneus*, *Pl. carinatus*, *Pl. spirorbis*, *Pl. contortus*, *Ancylus fluviatilis*, *Paludina contecta*, *Bythinia leachi*, *Valvata piscinalis* et les types d'Unio et d'Anodonta. Un grand intérêt malacologique se rattache aux escarpements et à la vallée de Belteberga dans la Scanie de l'Ouest, et, dans sa partie moyenne, aux chaines montagneuses recouvertes de grandes forêts humides de hêtres, qui ont reçu le nom de Skäralid. On trouve dans la première localité les types *Helix hortensis hybrida*, *Clausilia *personata*, *Cl. *scanica*, *Cl. ventricosa*, *Cl. *oreas*, *Cl. pumila*, *Cl. plicatula*, *Pupa shuttleworthiana*, *P. edentula*, *Buliminus obscurus* etc., tandis que les feuilles pourries, les souches etc. des forêts de hêtres du Skäralid recèlent *Helix lamellata* à profusion, *Clausilia pumila*, *Cl. ventricosa*, *Cl. plicatula* avec sa va-

riété *elongata*, *Pupa cylindracea* et la plupart des autres mollusques de terre de la region des arbres à feuilles scanienne.

On a trouvé dans la **Blekinge**[1]) 108 espèces et sous-espèces, savoir: 56 esp., 8 sous-esp. de mollusques de terre, et 39 esp., 5 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Les types rencontrés jusqu'ici exclusivement dans le Blekinge, sont: *Limax *mucronatus*, *Pupa ronnebyensis*, *P. collina*, *P. tumida* et *Succinea * temporalis*. La province ne possède exclusivement en commun avec la Scanie que *Arion limacopus*. Ce n'est que dans la partie la plus occidentale, sur les frontières de la Scanie, que l'on trouve: *Helix bidens*, *Limnæa stagnalis*, *L. palustris* α, *Planorbis carinatus*, *Pl. vortex*, *Pl. spirorbis*, *Pl. contortus*, *Pl. corneus*, *Aplexa hypnorum*, *Pisidium amnicum*. D'autres, comme *Limnæa auricularia*, *L. elongata*, les *Valvatæ*, sont excessivement rares hors de ce district, circonstance qui fournit une preuve tres-forte de l'influence des formations géologique sur l'habitat des mollusques; car cette région, la presqu'île de Listerland (et un petit terrain près de Carlshamn) est la seule où l'on rencontre la plus récente des formations secondaires, celle de la craie. A cette exception près, elle repose entièrement sur des formations primitives, et si, nonobstant, elle compte un si grand nombre d'espèces et de formes, elle les doit à son climat côtier et à sa nature variée, à sa riche végétation d'arbres à feuilles, à ses grands bois humides de hêtres qui recouvrent les croupes élevées, et c'est principalement sur le littoral maritime ("Mellanbygden", la partie la plus belle et la plus fertile de la province, "le jardin de la Suède"), que se présente cette richesse, tandis que le manque de ces avantages locaux a provoqué un manque de vie mollusque correspondant dans le reste du Blekinge, tant dans le littoral proprement avec son archipel (le "*Strandbygden*", région côtière, ou "*Waran*") que dans la partie septentrionale ou la région dite forestière ("*Skogsbygden*"). Plusieurs espèces assez communes du moins dans la Suède méridionale, sont au rest plus ou moins rares, plus ou moins locales. Je signalerai entre autres, outre celles énumérées plus haut: *Helix nemoralis*, *H. lapicida*, *H. strigella*, *H. hispida*, *H. arbustorum*, *H. fruticum*, *Pupa muscorum*, *Balea perversa*, *Clausiliæ* (à l'exception de Cl. bidentata), *Limnæa truncatula*, *Planorbis umbilicatus*, *Paludina contecta* etc. Plusieurs espèces, rares ailleurs, sont abondantes ici, du moins par places, telles que: *Arion *melanocephalus*, *Helix aculeata*,

[1]) Explorée par MM. H. D. J. Wallengren, *A. Gosselman*, J. Ankarcrona!! et *l'auteur*.

Pupa antivertigo, *P. substriata*, *Planorbis nitidus.* Aux espèces les plus remarquables de la province appartiennent en outre: *Limax lævis*, *Zonites* **draparnaldi*, *Z. alliaria*, *Z. nitidula*, *Z. pura*, *(Helix lamellata)*, *Pupa lilljeborgi*, *P. costulata*, *P. angustior*, *Clausilia* **æmula*, *Cl. dubia*, *Planorbis glaber*, *Pl. riparius*, *Pl. complanatus*, *Limnæa glabra*, *Ancylus fluviatilis*, *Acroloxus lacustris*, *Hydrobia steini*, *Pisidium arcæforme* etc.

En **Småland**[1]) ont été trouvées jusqu'ici 69 espèces et sous-espèces, savoir 46 esp., 1 sous esp. de mollusques de terre, 21 esp., 1 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Des que cette vaste région aura été explorée d'une manière plus complète, les chiffres donnés ci-dessus subiront sans nul doute une augmentation importante, quoique la nature de la majeure partie de la province soit en général peu favorable aux mollusques. La partie centrale du Småland est un plateau montagneux à hivers froids et à printemps tardifs. La masse du plateau présente une hauteur de 500 à 700 pieds (148 à 208 mètres) au-dessus de la mer, plusieurs étendues considérables ont une hauteur moyenne de plus de 1000 pieds (297 mètres), et des cours d'eau en descendent dans toutes les directions. Partout se présente la roche primitive, de grands lacs à eau claire et dure, des marais et des tourbières nombreux, de vastes forêts de sapins et de pins recouvrent toute cette contrée. Ce sol maigre et aride ne peut fournir aucuns bois d'arbres à feuilles; on ne voit ça et là que des bouleaux épars. Un climat rigoureux et un nature pauvre ne permettent la présence que d'une végetation clair-semée et souvent subalpine, rappelant celle de nos régions du nord; à côté du bouleau nain de Lapponie (Betula nana) on voit apparaître les types: Echinospermum deflexum, Sceptrum carolinum, Carex livida, C. globularis, Asplenium viride, etc. Ce plateau mérite donc à juste titre son épithète de "Norrland au mileu de la Gothie." Aussi y voit on apparaître les types exclusivement norrlandais de *Pupa arctica*, avec ses congénères *P. pineticola*, *P. ovoidea* et *P. otostoma.* Nulle part si loin vers le sud, on ne rencontre *Zonites petronella* et *Helix ruderata* en une aussi grande abondance qu'ici, ou par contre on n'e trouve que rarement le type *H. rotundata*, vulgaire en Scanie et en Blekinge. Les lacs contiennent des types très-dèveloppés de *Limnæa stagnalis*, *L. auricularia* et *L. palustris.* Comme rarétés apparaissent *Zonites alliaria*, *Helix lapicida*, *H. aculeata* et *Planorbis nitidus.* La région sud-ouest de la province, autour des sources des fleuves Nissa et Laga, est pauvre, stérile et remplie de grandes bruyères, de marécages et de ma-

[1]) Explorée par MM. C. Boheman, *J. E. Zetterstedt!!*, E. Hemberg!! et *l'auteur.*

rais tourbeaux; la région est, par contre, presente une végétation beaucoup plus luxuriante. Deux districts séparés par une vaste intervalle de cette province jouissent d'une nature propice au développement de la faune mollusque. Le premier comprend le région de Jönköping et le littoral est du lac Wettern, avec un terrain singulièrement pittoresque, coupé de montagnes, de vallées, de lacs, de cours d'eau plus ou moins grands, les pentes et les parois de montagnes couvertes tantôt faiblement tantôt avec abondance d'ormeaux, de sarbiers, de frêne, de tilleul, d'alisier et d'érable, accompagnés dans plusieurs endroits d'épais taillis des genres Rhamnus, Rosa, Ribes et Cratægus et d'une végétation herbacée des plus riches. Ajoutons à cela, dans plusieurs localités, une formation de grès, de schiste argileux et marneux ou d'argèle mêlée de sable, et des hivers adoucis par l'influence du Wettern. Cette région possède les types: *Zonites nitidula*, *Z. alliaria*, *Helix arbustorum*, *H. lapicida*, *H. incarnata*, *H. strigella*, *H. hispida*, *Clausilia ventricosa*, *Cl. laminata*, *Cl. plicatula*, *Buliminus montanus*, *B. obscurus* *Succinea oblonga*, et dans les cours d'eau: *Planorbis carinatus*, *Pl. vortex*, *Ancylus fluviatilis*, *Hydrobia steini* etc. La partie sud-est du Småland est unie et fertile avec de nombreux cours d'eau, et couverte sur plusieurs points de magnifiques forêts de hêtre qui, partout où on les rencontre, cachent sous leurs lits de feuilles humides, une foule de mollusques des mêmes espèces que la Scanie, circonstance à laquelle le climat côtier contribue pour une forte part. Dans cette partie de la province, qui se distingue aussi au point de vue de la botanique par de nombreuses plantes intéressantes, on trouve les types *Zonites cellaria*, *Z. *draparnaldi*, *Z. nitidula*, *Helix nemoralis*, *H. fruticum*, *H. hispida*, *Pupa angustior*, *Paludina contecta* etc. En outre les forêts de hêtres qui entourent Wärnanäs, fournissent certaiment à leurs explorateurs une riche moisson des mollusques les plus rares de la Scanie et du Blekinge.

L'île d'**Öland** [1]) possède 81 espèces et sous-espèces, savoir 47 esp., 1 sous-esp. de mollusques de terre, 30 esp. 3 sous-esp. de mollusques d'eau douce. L'île est constituée par une chaîne calcaire sortant du fond de la mer, allongée courant du nord au sud, appartenant à la formation silurienne ancienne, s'élevant en pente douce à l'est, mais à déclivité abrupte à l'ouest et s'abaissant à ses deux extrémités. L'île se compose de trois parties principales, les deux chaines continues, presque parallèles (landtborgarne) et la région centrale. Cette dernier est un champ plane de calcaire rouge cre-

[1]) Explorée par C. G. Silfversvärd, J. Ankarcrona!! et *l'auteur*.

vassé, enfoncé entre les "landtborgar" ou les hauteurs longues; il est en majeure partie dépourvu de forêts et stérile au plus haut point, mais possède une foule de types végétaux particuliers, qui paraissant avoir leur patrie proprement dite les uns dans l'Europe du sud, les autres en Sibérie. Au pied de la circonvallation (l'arête) occidentale est une terre d'alluvion, remarquable par sa végétation plantureuse, ses beaux bois d'arbres à feuilles, ses orchidées méridionales, etc., en un mot similaire à l'égard de la végétation, aux formations crétacées les plus puissantes du Danemark. L'extrémité nord de l'île est couverte d'une inondation de sable, où la végétation porte un caractère plus suédois et plus Gotlandais; c'est aussi là que se trouve la seule forêt de conifères considérable de l'île, la forêt du domaine de Böda, longue d'environ 2 miles de Suède (20 kilomètres). La région de Borgholm présente le plus grand intérêt pour le chonchyliologue, et principalement les pentes rapides, couvertes d'arbres à feuilles de haute futaie et d'épaisse taille, et le roc calcaire, qui atteinte ici une hauteur de 112 pieds au-dessus de la mer. Durant plusieurs milles au nord de ce point, le malacologue ne rencontre que la plus grande pauvreté sur les vastes, nues et stériles landes de tuf, qu'interrompent çà et là des bouquets de bouleau. Pour faire une meilleure récolte, on doit passer jusqu'au lac Horn (Hornsjön), le seul lac un peu considérable de l'île. Au sud de Borgholm, les seuls terrains qui vaillent réellement la peine d'être explorés: sont l'arête de l'ouest, ses déclivités abruptes et ses pares d'arbres à feuilles (principalement la région de Tveta), ainsi que les marais et les cours d'eau des paroisses de Resmo, Kastlösa et Mörbylånga. Les stériles et arides terrains tufeux (alfvaren) ne possèdent presque d'autres mollusques que *Helix striata*, particulière à l'île, et très-abondante sur nombre de points. Dans les petits collections de feuilles sur l'arête de l'ouest, l'on rencontre en tres-grande abondance *Pupa costulata*, ordinairement en compagnie de nombreux exemplaires de *P. angustior* et *P. alpestris*. Partout où il existe un amas de pierres calcaires, comme dans les murs secs, les amas de pierres, etc. on rencontre *Helix lapicida*, *Alloglossa avenacea*, *Pupa muscorum*, *P. pusilla*, *Balea perversa*, *B. *rayiana*, toutes ordinairement en nombre considérables d'exemplaires. Les coquilles auxquelles il faut ajouter *Helix costata*, *Conulus fulvus* et *Zonites hammonis*, ainsi que les mollusques d'eau douce *Valvata cristata*, *Bythinia tentaculata* et *leachi*, *Planorbis contortus*, *Pl. umbilicatus*, *Pl. spirorbis*, *Pl. *ammonoceras*, *Physa fontinalis*, *Limnæa limosa* et par places *L. stagnalis*, sont les espèces qui par leur nombre déterminent le caractère de la faune mollusque de l'île. On n'a trouvé que dans une ou deux localités: *Zonites nitidula**, *Z. alliaria**, *Z. nitida**, *Helix ar-*

*bustorum**, *H. fruticum**, *H. bidens*, *H. rubiginosa**, *H. hispida*, *H. aculeata*, *H. pulchella*, *H. pygmæa*, *H. ruderata**, *H. rotundata**, *Buliminus obscurus*, *Pupa edentula*, *P. antivertigo*, *P. substriata*, *P. pygmæa*, *Clausilia laminata*, *Cl. *æmula**, *Limnæa truncatula*, *Planorbis riparius**, *Pl. albus**, *Pl. malmi**, *Pl. complanatus**, *Acroloxus lacustris**, *Valvata macrostoma* et *piscinalis**. Toutes celles marquées d'un * n'ont été trouvées qu'à Borgholm. L'île possède en commun avec Gotland seul nulle forme. Un fait digne de mention, quoique explicable par la configuration physique de l'île, c'est l'absence des *Unionides* et des types *Paludina*, *Ancylus*, *Limnæa auricularia* et *L. palustris* α. Il est moins facile de s'expliquer le defaut de *Helix nemoralis* ou de la grande rareté de plusieurs espèces. Les mollusques oëlandais suivants n'ont pas été trouvés à Gotland: *Helix striata*, *H. rubiginosa*, *Acicula hyalina*, *Planorbis spirorbis*, *Pl. *dispar*, *Pl. riparius*, *Pl. malmi*, *Pl. nitidus*, *Valvata macrostoma* et *Pisidium nitidum*.

L'île de **Gotland**[1]) possède 82 espèces et sous-espèces, savoir 51 esp., 4 sous-esp. de mollusques de terre, et 26 esp., 1 sous-esp. de mollusques d'eau douce. L'île est une montagne calcaire reposant sur du grès, couverte d'un sol plus ou moins profond, en général unie, de forme arrondie, avec une hauteur moyenne de 80 à 130 pieds, d'où s'élèvent au Sud et à l'Est des collines monticules solitaires jusqu'à une hauteur d'environ 200 pieds (le Hoburgen et le Thorsburgen). La partie centrale de l'île contient dans le calcaire des évasements ou dépressions dans lesquelles on rencontre de nombreux (environ 60 comprenant une surface de plus de 50000 tunnland = env. 25000 hectares) marais (suèd. myr, plur. myrar) et petites nappes d'eau (suèd. träsk, lac peu profond et marécageux), profonds de 3 à 60 pieds (les plus petits ordinairement les plus profonds), à fond excessivement tendu et meuble, et dans lesquelles croissent plusieurs plantes aquatiques particulières. Trois rivières seulement ont un peu d'eau pendant l'été; les autres cours d'eau sont insignifiants et secs dans la saison chaude. Il n'existe pas de lacs proprement dits. A l'exception de la partie méridionale l'île est riche en forêts de conifères et en bois d'arbres à feuilles. Par sa position insulaire, éloignée du continent suédois, elle jouit d'un des ciels les plus doux de la Scandinavie. Les mollusques que l'on rencontre sur la totalité ou la plus grande partie de l'île, sont: *Vitrina pellucida*, *Zonites cellaria*, *Z. nitida*, *Z. hammonis*, *Z. crystallina*, *Conulus fulvus*, *Helix hor-*

[1]) Explorée par *D. S. Högberg*, *V. Lilljeborg*, *Walmstedt*, *H. D. J. Wallengren* et *G. Lindström!!*

tensis, *H. costata*, *H. arbustorum v. calcarea*, *H. lapicida*, *H. hispida*, *H. rotundata*, *Buliminus obscurus*, *Cochlicopa lubrica*, *Pupa muscorum*, *P. cylindracea*, *Alloglossa avenacea*, *Balea*, *Clausilia laminata*, *Cl. bidentata*, *Succinea pfeifferi*, *Carychium minimum*, *Limnæa limosa*, *L. palustris*, *Planorbis contortus*, *Pl. umbilicatus*, *Valvata cristata*, *Bythinia tentaculata* et *Pisidium obtusale*. Ces formes déterminent par conséquent les traits principaux de la faune mollusque gotlandaise. Certaines espèces ont un habitat excessivement restreint; ainsi, *Helix strigella* n'a été trouvée que sur une petite colline au nord de l'église de Löjsta, et *Clausilia plicata* seulement sur un point de très-faible étendue, de l'escarpement occidental du Hoburg. Les espèces communes ne vivent nullement toutes mêlées les unes avec les autres. En société entre elles, mais plus ou moins rigoureusement séparées de toutes les autres espèces, se rencontrent *Alloglossa avenacea*, *Pupa cylindracea*, *Helix nemoralis*, certaines variétés de *Helix hortensis*, *Balea*, *Succinea pfeifferi*, *Clausilia plicata*. Cette dernière et *Pupa *anconostoma* sont particulières à l'île dans la faune scandinave. Les localités les plus riches en mollusques de terre sont les collinebois sées éparses, telles que Thorsburg et Lindeklint, avec 20 espèces (soit 40 % du nombre total), Allehage, etc. Les localités revêtues d'arbres à feuilles et les prairies sont par contre plutôt pauvres que riches. L'eau la plus riche en espèces est la rivière de Gothem (20 esp.); les marais ne fournissent que 7 à 8 espèces. Comparée avec Öland, Gotland possède, outre *Clausilia plicata* et *Pupa *anconostoma*, les espèces ci-dessous, qui n'ont pas été trouvées sur l'île voisine, savoir: *Zonites cellaria*, *Helix *concinna-gyratus*, *H. nemoralis*, *Pupa minutissima*, *Succinea arenaria*, *Aplexa hypnorum*, *Hydrobia steini*, *Anodonta cygnea*, *Sphærium *calyculatum* et *Pisidium henslowanum*. Les espèces suivantes sont infiniment plus répandues à Gotland qu'à Öland: *Zonites nitida* (commune), *Z. crystallina*, *Helix arbustorum*, *H. hispida*, *H. aculeata*, *H. rotundata* (très commune), *H. ruderata*, *Buliminus obscurus*, *Pupa pygmæa*, *P. antivertigo*, *Clausilia laminata*, *Succinea pfeifferi*, *Limnæa truncatula*, *Planorbis vortex*, *Pl. albus*, *Valvata piscinalis*. Le fait opposé se présente à l'égard de *Helix strigella*, *Pupa costulata*, *P. angustior* et *P. alpestris*. De même qu'Öland, l'île de Gotland est totalement dépourvue des types *Unio*, *Paludina*, *Ancylus*, *Amphipeplea* et *Limnæa auricularia*.

A 8 ou 9 milles geogr. au NE. de Gotland, est située la petite mais intéressante île de **Gotska Sandön**[1]) large seulement de $\frac{3}{4}$ de mille

[1]) Explorée par *G. Eisen* et *A. Stuxberg*.

(surface 7,350 tunnland = 3628 hectares) et, comme son nom (île de sable) l'indique se composant presque exclusivement de sable meuble, recouvrant de petits cailloux arrondis, sans la moindre trace de roche en gite. Tout autour de l'île court un arète de sable, interrompue par endroits, d'une hauteur moyenne de 70 pieds (inv. 21 mètres). L'intérieur de l'île est presque sur toute sa surface revêtu de futaie de pins parfois assez hautes, et sur cinq différents points se présentent des amas de coudriers, de chênes, de bouleaux, d'alisiers et de peupliers. Le climat ne ressemble pas à celui de Gotland, mais est plus septentrional; le printemps et l'été sont froids et l'automne chaud. La végétation est très-maigre, et dans aucune partie de l'année on ne rencontre des collections d'eau dans l'île. Les mollusques suivants ont été observés là: *Limax maximus* (comm.), *L. agrestis* (très-abond.), *L. tenellus* (éparse), *Vitrina pellucida* (éparse), *Zonites cellaria* (éparse), *Z. hammonis* (rare), *Conulus fulvus* (comm.), *Arion rufus* (comm.), *Helix hortensis* (comm.), *H. fruticum* (éparse), *H. costata* (éparse), *H. ruderata* (abond.), *Cochlicopa lubrica* (rare), *Vertigo-sp.* (peut-être P. costulata ou P. edentula) et *Clausilia bidentata* (comm.).

L'**Ostrogothie**[1]) a 96 espèces et sous-espèces, savoir 52 esp., 2 sous-esp. de mollusques de terre, et 39 esp., 3 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Les types *Clausilia *omma* et *Bythinia troscheli* sont particuliers à cette province, limitée de tous les côtés par des eaux et des montagnes: au Nord, par la chaîne d'elevations boisées, nommée suivant les localités, Tiveden, Bois de Tylö (Tylöskog) et Kolmoren, à l'Ouest par le lac Wettern, à l'Est par la Baltique, au Sud par la région forestière connue sous le nom de Holaved. Tant la partie septentrionale que la partie méridionale sont boisées et montagneuses; toutefois les montagnes situées à la frontière du Nord, quoique en general entassées, sauvages et couvertes de fôrets, n'atteignent jamais à une hauteur de plus de 400 pieds (env. 119 mètres), tandis que la partie méridionale de la province, laquelle formant, depuis le plateau Smolandais la transition à la région des plaines, descend en pente plus douce vers la plaine, est en realité plus élevée; ainsi, le lac Sommen qui appartient à cette partie de la province, est à 528 pieds (env. 157 mètres) au-dessus du niveau de la mer. L'Ostrogothie est riche en lacs et en cours d'eau grands et petits. L'intérieur se compose d'une plaine assez étendue, çà et là interrompue par des hauteurs de faible élévation, reposant sur la formation silurienne et célèbre par sa fertilité et la douceur de son

[1]) Explorée par *Edv. v. Goës!! D. Hansén, K. Ahlner* et *l'auteur.*

climat. De la plaine longeant le littoral du Wettern s'elève à 573 pieds (170 mètres) au-dessus du Wettern et à 869 pieds (285 mètres) au-dessus de la mer la remarquable montagne de l'Omberg, dont la masse principale se compose de gneiss et de granit, flanqués de formations plus récentes juxtaposées: le grès à la pointe d'Elfvarum, plus loin vers le nord, le schiste marneux; à l'extrémité nord de la montagne, où est située l'exploitation de calcaire de Borghamn, un vaste gisement de calcaire, dont une couche plus mince paraît étendue sur la plus grande partie des flancs de la montagne, mais principalement à l'est, communiquant un aspect blanchâtre aux nombreux ruisseaux qui descendent des hauteurs. Le flanc occidental de la montagne, avec ses nombreux rochers (les montagnes dits "du lac", sjöbergen), se distingue par une riche végétation ou par des types végétaux intéressants; mais tant cette region que la grande forêt de sapins remplie de marais et de flaques d'eau et recouvrant la majeure partie des plateaux supérieurs de la montagne, ne sont que d'un bien faible intérêt pour le malacologue. Il fera par contre une riche moisson aux extrémités septentrionale et méridionale de la montagne. Les falaises de Borgsudde (extrémité septentrionale) boisées et remplies de ravins et de couloirs humides présentent une richesse de mousses toute particulière. Les mollusques que l'on y trouve sont: *Zonites petronella*, *Z. crystallina*, *Helix strigella*, *H. fruticum*, *H. bidens*, *H. pygmæa*, *H. lamellata*, *H. rotundata*, *Clausilia plicatula*, *Cl. pumila*, *Cl. *sejuncta*, *Cl. *ommæ*, *Cl. laminata*, *Succinea oblonga* var. *elongata*. Les petites flaques d'eau au pied de la montagne contiennent *Planorbis carinatus* et une forme remarquable de *Limnæa limosa* (vulgaris). Les escarpements d'Alvastra (côté sud) sont revêtus d'une belle forêt de hêtres, la plus septentrionale de la Suède. On sait par l'expérience qu'une localité pareille ne manque pas de types mollusque sintéressants. Aussi possèdet elle entre autres: *Zonites petronella*, *Z. nitidula*, *Z. crystallina*, *Helix aculeata*, *Buliminus montanus*, *B. obscurus*, *Pupa edentula*, etc. On trouve au bord des petits ruisseaux de la déclivité orientale: *Helix bidens*, *Alloglossa avenacea*, *Clausilia ventricosa* et *Cl. pumila*. En et au bord du lac Takern on trouve *Succinea pfeifferi f. contorta*, *Limnæa stagnalis*, des formes de *L. limosa*, *L. palustris v. corvus*, *Planorbis vortex*, *Pl. contortus*, *Pl. crista*, toutes en abondance; rares sont par contre: *Aplexa hypnorum*, *Planorbis spirorbis* et *Pl. discus*. Aux types les plus remarquables de la province, plus ou moins abondants sur des points divers, appartiennent: *Zonites alliaria*, *Helix pulchella*, *Pupa costulata*, *P. minutissima*, *P. antivertigo*, *P. lilljeborgi*, *P. pygmæa*, *P. alpestris*, *Limnæa stagnalis v. lacustris*, *L. truncatula*, *Amphipeplea glutinosa*, *Planorbis carinatus var.*, *Pl. complanatus*, *Hydrobia steini*, *Bythinia leachi*, *Pisidium amnicum*, *pulchellum*, *henslowa-*

num, *arcæforme*, *obtusale*, *pusillum*, et dans les nombreux lacs et cours d'eau, avec lesquels les eaux douces de la Scanie peuvent seules être comparées à cet égard, on trouve une grande richesse de types de tous nos *Unios* et *Anodontes*.

La **Westrogothie**[1]) contient 91 espèces et sous-espèces, savoir 51 esp., 2 sous-esp. de mollusques de terre, et 35 esp., 3 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Cette province, située entre les deux plus grands lacs de la Suède, est limitée au NE. par la chaine boiséedu Tiveden; elle est elle-même recouverte de forêts dans le voisinage immédiat du Vener, et sur les rives du Vetter, le long desquelles court une longue arête de montagnes de peu d'élévation. L'intérieur est par contre une grande plaine, sillonnée de grands et petits cours d'eau; tantôt d'une grande fertilité comme dans la région dite la Fahlbygd du côté du Vetter, avec la plaine calcaire la plus étendue de la Suède, tantôt d'une fertilité moins prononcée, comme dans la partie SE., montagnes de Högstena, Färadal et Gisse, tantôt d'une grande stérilité, comme sur les vastes champs de sable le long des bords du Vener et dans la partie méridionale de la province. Sur cette plaine s'élèvent les montagnes dites "de Vestrogothie" (Vestgötabergen), appartenant à la formation silurienne, et remarquables au double point de vue de la géologie et de la botanique. Au bord du Venern sont situées les deux montagnes de Halle et de Hunne (Halleberg et Hunneberg) séparées entre elles par une vallée étroite mais profonde, et le Kinnekulle, long de 21 kilomètres, composé de plusieurs terasses échelonnées en retrait, séparées par des escarpements en forme de marches gigantesques, nommés "klefvor" (correspondrait au mot *grimpe*, s'il existait; de *klifva*, grimper). Sur la déclivité orientale du Kinnekulle, parmi les buissons et les arbres, *Helix strigella* est assez commune, et sur la partie couverte d'une bruyère, *Helix lapicida* se distingue par une extraordinaire abondance. Sur la pente occidentale, surtout près de Mörkeklef, se trouvent: *Zonites cellaria*, *Helix arbustorum*, *H. fruticum*, *H. hispida*, *H. ruderata*, *H. rotundata*, *Clausilia laminata*, *Cl. ventricosa*, *Cl. plicatula*, etc., la plupart abondantes. Au milieu de la province s'élève le mont Billingen sur une étendue de 3 milles (env. 32 kilom.) et plus près du Vetter, les monts de Mösseberg et d'Ålleberg. Sur la pente Est du prèmier, on trouve *Zonites cellaria*, *Z. pura*, *Helix lapicida*, *H. arbustorum*, *H. strigella*, *H. fruticum*, *H. aculeata*, *Buliminus obscurus*, *Clausilia laminata*, *Cl. pumila* (abondante), *Cl.* * *æmula*, *Pupa substriata*, *P. pygmæa* et dans les eaux

[1]) Explorée par *A. W. Malm!!*, *J. E. Zetterstedt!!*, *J. Hulting!!*, *K. Ahlner!!* *E Linnarsson* et *l'auteur*.

au-dessous: *Limnæa auricularia*, *L. truncatula*, des formes d'*Anodonta*, etc. La chaîne de montagnes qui s'élève à environ un mille (10 $\frac{1}{2}$ kilom.), au SE. de Fahlköping, fournit, principalement sur son flanc méridional, les types: *Zonites petronella*, *Z. nitida*, *Z. crystallina*, *Helix arbustorum*, *H. fruticum*, *H. hispida*, *H. strigella*, *H. bidens*, *H. ruderata*, *H. rotundata*, *H. pygmæa*, *Pupa muscorum*, *P. antivertigo*, *P. pygmæa*, *P. alpestris*, *P. pusilla*, *Clausilia laminata*, *Cl. plicatula*, etc. Dans la partie de la province qui borde la mer, à l'embouchure du Götaelf et autour de Gothembourg, ont été trouvés les mollusques suivants: *Zonites cellaria*, *Z. alliaria*, *Z. nitida*, *Z. petronella?*, *Z. crystallina*, *Helix nemoralis*, *H. costata*, *H. pulchella*, *H. arbustorum*, *H. hispida*, *H. fruticum*, *H. ruderata*, *H. rotundata*, *H. pygmæa*, *Pupa substriata*, *Clausilia laminata*, *Cl. plicatula*, etc.; mollusques nus: *Limax maximus*, *L. tenellus*, *L. lævis*, *Lehmannia marginata*, *Arion * albus*, *A. rufus*, etc.; types aquatiques: *Aplexa hypnorum*, *Physa font.*, *Planorbis spirorbis*, *Pl. contortus*, *Pl. crista*, *Pl. complanatus*, *Pl. riparius*, *Limnæa truncatula*, *L. glabra*, *Amphipeplea*, *Acroloxus*, *Ancylus*, *Bythinia leachi*, *Hydrobia steini*, *Sphærium lacustre*, *Sph. * calyculatum*, *Sph. * scaldianum*, *Sph. * brochonianum*, *Pisidium* (toutes les espèces!), etc., dont la plupart habitent aussi d'autres localités de la province. *Planorbis vortex*, pris à Floby, paraît être une de ses espèces les plus rares, de même que les nouvelles espèces *Pl. * gothicus* et *Pupa genesii*.

La **Nericie**[1]) possède 84 espèces et sous-espèces, savoir 44 esp., 1 sous-esp. de mollusques de terre, et 37 esp., 2 sous-esp. de mollusques d'eau douce. La Néricie est comme encadrée sur tout son pourtour de chaines de formations primitives recouvertes de forêts d'arbres résineux, au-dessous et dans l'enceinte desquelles une foule de régions calcaires forment une terrasse de pierre calcaire tàntôt grenue, tantôt stratifiée, enserrante la grande plaine qui s'étend au sud du lac Hjelmar, et que sillonnent différentes collines (âsar) de gravier et de sable. La plus considérable de ces régions calcaires, au double point de vue de l'étendue et de la puissance, c'est celle qui, ayant un rayon d'environ 2 milles (21 kilom.) et la ville d'Örebro pour centre, s'étend presque en demi-cercle sur les paroisses de Tysslinge, Winterâsa, Hidinge, Edsberg et Knista, Hardemo, Kumla, Skällersta, Asker et Linna. On y trouve une riche végétation d'arbres à feuilles et principalement le tremble, le frêne, le coudrier et le sorbier paraissent y favoriser le développement des mollusques. Les espèces suivantes ne se trouvent presque

[1]) Explorée par *C. Hartman!!*

que dans ces terrains calcaires. *Helix fruticum*, *Pupa muscorum*, *P. minutissima*, *P. antivertigo* et *P. pygmæa*. De préférence conjointement avec elles se trouvent, ordinairement avec la plus grande abondance, quoiqu'elles habitent aussi d'autres parties de la province, les espèces: *Zonites crystallina*, *Helix lapicida*, *H. pulchella*, *H. costata*, *Pupa alpestris*, *P. pusilla*, *Clausilia laminata* et *plicatula*. La région forestière fournit soit principalement soit exclusivement *Arion ater*, *A. *albus*, *Limax maximus*. Communes partout sont: *Arion rufus*, *Vitrina pellucida*, *Conulus fulvus*, *Helix hortensis*, *H. ruderata*, *H. pygmæa*, *Cochlicopa lubrica* et *Clausilia bidentata*. Aux mollusques de terre les plus intéressants mais relativement moins répandus de la Nericie, appartiennent *Limax tenellus*, *Lehmannia marginata*, *Zonites alliaria*, *Z. petronella*, *Z. pura*, *Helix bidens*, *Pupa columella*, *P. substriata*, *P. Lilljeborgi*, *Balea*, *Clausilia pumila*. Un fait très-remarquable, c'est que Limax agrestis ne paraît avoir été trouvé nulle part dans la province. Des nombreux lacs, des rivières et petits cours d'eau, le Svartà qui traverse le chef-lieu se distingue comme le plus riche en mollusques aquatiques (*Planorbis albus*, *Pl. crista*, *Pl. complanatus*, *Acroloxus*, *Ancylus*, *Hydrobia*, *Paludina vivipara*, *Pisidium amnicum*, *P. henslowanum*, etc.); une extrême pauvreté règne par contre dans les lacs forestières de la règion NO., sur les frontières du Wermland. Les espèces les plus communes de la province, sont: *Planorbis umbilicatus*, *Pl. contortus*, *Limnæa stagnalis*, *L. limosa*, *L. palustris*, *Valvata cristata*, *Bythinia tentaculata*, *Sphærium corneum*, *Pisidium pulchellum*, *P. obtusale*, *Unio pictorum*, *Anodonta *anatina*. Plus rares sont: *Planorbis carinatus*, *Pl. spirorbis*, *Pl. vortex*, *Pl. complanatus*, *Limnæa auricularia*, *Amphipeplea*, *Valvata piscinalis*, *Sphærium *calyculatum*, et très rares: *Planorbis nitidus*, *Limnæa truncatula*, *Hydrobia*, *Pisidium arcæforme*, *P. personatum*. *Margaritana* ne se rencontre que dans les ruisseaux et les petites rivières des districts montagneux et forestiers N. et NO. de la province.

La **région de Stockholm**[1]) comprend 76 espèces et sous-espèces, savoir 40 espèces, 1 sous-esp. de mollusques de terre, et 33 esp., 2 sous-esp. de mollusques d'eau douce, parmi lesquelles 10 types (Limnæa auricularia, L. limosa v. balthica, L. palustris v. fusca, Physa fontinalis, Planorbis corneus, Paludina vivipara, Bythinia tentaculata, Neritina, Pisidium nitidum et Anodonta *anatina) vivent en outre dans les eaux saumâtres de l'archipel inté-

[1]) Explorée par *A. Modeer*, *A. J. Hagströmer*, *Fischerström*, *D. S. Högberg*, *J. A. Holmström*, *G. Silfverstolpe*, *J. E. Wikström*, *G. Silfversvärd*, *C. Hartman*, *G. Eisen!!*, *J. E. Zetterstedt!!* et *l'auteur*.

rieur. Les environs de la capitale présentent une attrayante variété de sites tantôt sauvages et tantôt cultivés; montagnes, plaines et vallées sont couvertes de culture ou de bruyères et de sombres forêts de sapins, de prairies émaillées de fleurs ou de parcs ombreux d'arbres à feuilles. Les pentes de collines généralement douces au Nord de la capitale sont au Sud escarpées et plus escarpées. C'est entre ces collines que scintille le lac de la Suède le plus riche en beautés naturelles, le Mälar, avec près de 300 îles et îlots, les premières souvent considérables, couvertes de sombres forêts de conifères, ou de clairs et agréables bois d'arbres à feuille, et avec ses nombreux golfes ou fjords, s'étendant souvent à de longues distances dans l'intérieur du pays. Les localités favorites des mollusques de terre à Stockholm et dans ses environs, sont les parcs de Karlberg, Ulriksdal, Drottningholm, Svartsjö et Haga; le Humlegård (Houblonnière) et le Parc royal (Djurgården) dans Stockholm et sa banlieue, le bois de Solna, les montagnes de Skinnarvik et de Danvik (partie sud de la ville) et les îles de Lidingö, Wermdö, Sicklaö, etc., à NE. de Stockholm. Les eaux les plus riches en mollusques aquatiques sont: le lac de Sainte Claire (Klara-sjö), un bras du Mälar dans la capitale, le Bomsjö et l'étang de Karlberg (près du château de ce nom), les lacs de Hammarby et Trehörning au sud de Stockholm, etc., ainsi que la plupart des anses et des criques du Mälar, telles que les golfes de Rörstrand, d'Årsta, des Parcs, etc. Aux mollusques de terre les plus répandus de la région de Stockholm appartiennent: *Limax agrestis*, *Arion ater*, *A. rufus*, *A. hortensis*, *Vitrina pellucida*, *Zonites nitida*, *Conulus fulvus*, *Helix lapicida*, *H. costata*, *H. pulchella*, *H. hispida*, *Cochlicopa lubrica*, *Clausilia bidentata*, *Pupa muscorum*, *P. antivertigo*, *Succinea putris*, etc.; relativement rares sont: *Limax lævis*, *Lehmannia marginata*, *Arion *albus*, *Helix nemoralis*, *H. fruticum*, *H. strigella*, *H. pomatia*, *Balea*, *Succinea oblonga*. Les types d'eau douce communs sont: *Physa fontinalis*, *Limnæa stagnalis*, *L. auricularia*, *L. limosa*, *Planorbis corneus*, *Pl. contortus*, *Pl. vortex*, *Pl. umbilicatus*, *Acroloxus lacustris*, *Paludina vivipara*, *Bythinia tentaculata*, *Sphærium corneum*, *Sph. *consobrinum*, *Anodonta *anatina;* on rencontre plus rarement: *Physa *semiglobosa*, *Aplexa hypnorum*, *Limnæa palustris*, *L. truncatula*, *Planorbis albus*, *Pl. crista*, *Pl. carinatus*, *Valvata piscinalis*, *Bythinia leachi*, *Pisidium subtruncatum*, *Sphærium *calyculatum*. Je crois devoir citer séparément les espèces rencontrées sur 3 des îles situées en avant de l'embouchure du Mälar dans la Baltique. Wermdö: *Zonites petronella*, *Pupa antivertigo*, *Limnæa palustris v. fusca* (seulement dans l'eau salée), *Amphipeplea*, *Planorbis albus;* Sicklaö: *Limax agrestis*, *Zonites alliaria*, *Z. pura*, *Helix pomatia*, *Planorbis corneus*, *Pl. crista*, *Pisidium pusillum;* Lidingö:

Planorbis complanatus, *Pisidium nitidum;* sur les deux premières: *Arion rufus*, *Limax maximus*, *Vitrina pellucida*, *Zonites hammonis*, *Z. crystallina*, *Z. nitida*, *Helix lapicida*, *H. fruticum*, *H. strigella*, *H. hispida*, *H. aculeata*, *H. ruderata*, *H. pygmæa*, *Cochlicopa lubrica*, *Pupa edentula*, *P. substriata*, *P. alpestris*, *P. pusilla*, *Balea perversa*, *B. *rayiana*, *Clausilia laminata*, *Cl. bidentata*, *Cl, plicatula*, *Succinea putris*, *Limnæa stagnalis*, *L. limosa*, *L. palustris*, *Planorbis contortus*, *Bythinia tentaculata*, *Sphærium corneum*, *Pisidium pulchellum*, *P. obtusale*, *Anodonta *anatina;* sur la première et la dernière: *Succinea pfeifferi*, *Acroloxus lacustris;* sur tous les trois: *Conulus fulvus*, *Helix hortensis*, *Limnæa auricularia*, *Planorbis umbilicatus*, *Paludina vivipara.*

L'**Upland**[1]) possède 75 espèces et sous-espèces, savoir 37 esp. de mollusques de terre, et 37 esp., 1 sous-esp. de mollusques d'eau douce. La partie intérieure, la principale, de la province est formée de plaines fertiles et cultivées, interrompues seulement sur quelques points par des chaînes d'une élévation un peu sensible ou par des collines boisées éparses. La partie septentrionale est un région forestière unie avec des tourbières et des marais nombreux; et à l'Est, le pays alterne en forêts, lacs, collines et cordons d'élévations de faible relief. Une foule de rivières, dont de Fyris (Fyrisàn) est la principale, traversent la province, et se rendent la plupart au Mälar. Les mollusques y sont les mêmes qu'a Stockholm; toutefois les espèces suivantes manquent: *Zonites pura*, *Helix nemoralis*, *H. aculeata*, tandis que la province possède, à l'exclusion de la région de Stockholm: *Pupa pygmæa*, *P. minutissima*, *Planorbis discus*, *Valvata macrostoma*, *Pisidium henslowanum*, *P. arcæforme* et *P. personatum.* Aux espèces les plus intéressantes de la province, appartiennent au reste: *Zonites alliaria*, *Helix pomatia*, *H. lapicida*, *Pupa substriata*, *Planorbis complanatus*, *Pl. carinatus*, *Neritina*, etc.

La **Westmanland**[2]) a fourni 70 espèces et sous-espèces, savoir 37 esp., 2 sous-esp. de mollusques de terre, et 30 esp., 1 sous-esp. de mollusques d'eau douce. Cette province a sa principale région de plaine (le pays dit de Rumbo, Rumbolandet) vers le sud, du côté du Mälar; quelques plaines se présentent en outre au centre et au NE., mais toujours accompagnées de petits montagnes éparses, de hauteurs solitaires et de collines

[1]) Explorée par *W. Lilljeborg!*, *C. H. Johansson!*, *J. E. Zetterstedt!!* et *l'auteur.*

[2]) Explorée par *C. H. Johansson!*

de gravier. Les régions de l'O. et du NO., constituant la partie montagneuse de la province, d'une hauteur moyenne de 1200 à 1400 pieds au-dessus de la mer, sont occupées par des masses montagneuses continues, à flancs boisés et souvent escarpés. Du Nord, une foule de grands cours d'eau, la Saga (Sagån), l'Eau noire (Svartån), la rivière de Kolbäck (Kolbäcks-ån), celle de Hed (Hedströmmen), etc., se rendent au Mälar, séparés entre eux par trois grands arêtes (åsar) parallèles de sable et de cailloux roulés. La partie SE. a été le mieux explorée au point de vue malacologique. On y trouve en nombre plus ou moins grand: *Limax agrestis*, *Arion ater*, *A. hortensis*, *Vitrina pellucida*, *Conulus fulvus*, *Zonites hammonis*, *Z. petronella*, *Z. nitida*, *Helix hortensis*, *H. costata*, *H. arbustorum*, *H. hispida*, *H. ruderata*, *H. pygmæa*, *Cochlicopa lubrica*, *Clausilia laminata*, *Cl. bidentata*, *Pupa muscorum*, *P. pusilla*, *Succinea putris*, *Physa fontinalis*, *Limnæa stagnalis*, *L. limosa-ovata*, *L. palustris-fusca*, *Planorbis corneus*, *Pl. contortus*, *Pl. umbilicatus*, *Valvata cristata*, *Bythinia tentaculata*, *Paludina vivipara*, *Acroloxus lacustris*, *Sphærium corneum*, *S. *calyculatum*, *Pisidium obtusale*, *P. pusillum*, *Unio tumidus*, *U. pictorum*, *Anodonta *anatina*. Dans quelques localités ont été trouvées: *Limax maximus*, *Zonites crystallina*, *Helix fruticum*, *H. strigella*, *H. pulchella*, *H. lapicida*, *H. pomatia*, *Clausilia plicatula*, *Balea perversa*, *Pupa edentula*, *P. alpestris*, *P. pusilla*, *Succinea pfeifferi*, *Aplexa hypnorum*, *Amphipeplea glutinosa*. *Limnæa auricularia*, *L. limosa-vulgaris*, *L. limosa-peregra*, *L. truncatula*, *Planorbis spirorbis*, *Pl. vortex*, *Pl. albus*, *Pl. crista*, *Pisidium amnicum*, *Pis. pulchellum*, *Margaritana margaritifera*. Rares et trouvés seulement dans une ou deux localités de la province: *Arion *albus*, *Helix bidens*, *Pupa minutissima*, *P. pygmæa*, *Succinea oblonga*, *Carychium minimum*, *Planorbis complanatus* et *Valvata piscinalis*.

La **Dalécarlie**[1]) contient 56 esp. de mollusques de terre, et 25 esp., 2 sous-esp. de mollusques d'eau douce. La province consiste principalement de montagnes et de terrains rocailleux, en très-petite partie de plaines cultivables, à sol de sable et de gravier. La partie O. et NO. a un climat rude par suite de sa hauteur au-dessus de la mer (env. 2,500 pieds), et par les grandes sommités alpines qui s'y trouvent (Svuckustöt 5922′, Städjan 3904′). De l'O., le pays traversé par le Dalelf et ses branches, cours d'eau le long desquels il forme généralement une vallée, s'abaisse successivement vers l'E. et le S., sans toutefois se changer jamais en plaine. La région la plus fertile se trouve autour du lac Siljan, et repose sur une ancienne

[1]) Explorée par *C. G. Andersson!!*

formation silurienne, qui s'étend en demi-cercle autour de la partie septentrionale du lac; au NO., elle s'appuie par contre sur une formation stérile de grès, la plus grande et la plus étendue du Nord. La vallée de Säther (Sätherdalen) célèbre pas sa beauté, est la région de la province la mieux explorée au point de vue malacologique. Les mollusques plus ou moins communs dans cette partie de la Dalécarlie, sont les suivants: *Vitrina pellucida*, *Zonites hammonis*, *Z. petronella*, *Conulus fulvus*, *Helix hortensis*, *H. arbustorum*, *H. costata*, *H. ruderata*, *Cochlicopa lubrica*, *Succinea putris*, *Limnæa stagnalis*, *L. auricularia*, *L. limosa-ovata*, *L. limosa-peregra*, *Planorbis umbilicatus*, *Pl. contortus*, *Sphærium corneum*, *Pisidium obtusale*, *Anodonta* **anatina*. Sur des points épars se rencontrent en plus ou moins d'abondance: *Helix lapicida*, *H. fruticum*, *H. strigella*, *Clausilia laminata*, *Cl. plicatula*, *Limnæa palustris*, *L. truncatula*, *Amphipeplea glutinosa*, *Physa fontinalis*, *Aplexa hypnorum*, *Pisidium personatum*, *P. subtruncatum*, *Unio tumidus*. Les espèces les plus rares de la province sont: *Limax maximus*, *L. agrestis*, *L. tenellus*, *Zonites pura*, *Z. nitida*, *Z. crystallina*, *Arion ater*, *A. rufus*, *Helix pulchella*, *H. harpa*, *Pupa muscorum*, *P. edentula*, *P. lilljeborgi*, *Clausilia dubia* forma speciosa (Cl. bidentata n'est pas encore trouvée en la Dalécarlie!), *Succinea pfeifferi* forma typica, *Carychium*, *Planorbis carinatus*, *Pl. vortex*, *Ancylus fluviatilis*, *Sphærium* **calyculatum*, *Pisidium pulchellum*, *Unio tumidus f. saccatus*, *Anodonta cygnea-cellensis*, *A.* **complanata*. On n'a trouvé que dans la paroisse de Gustave: *Planorbis crista*, *Valvata piscinalis* et *Pisidium amnicum*.

La **Helsingland**[1]) a fourni jusqu'ici 23 espèces et sous-espèces de mollusques, dont 14 esp., de terre, et 8 esp., 1 sous-esp. d'eau douce. Cette province divisée en quatre vallées fluviales par cinq chaînes de montagnes sans connexion réciproque, est remplie de forêts, de marécages, et parcourue par plusieurs grands fleuves. Au sud, la frontière est formée en partie par la forêt d'Ödmorden. La partie méridionale seule de la province (Söderhamn et 4 milles SO. de cette ville, surtout à Bollnäs) m'est connue au point de vue malacologique. Cette région a fourni les espèces et types suivants: *Limax agrestis*, *Vitrina pellucida*, *Zonites nitida*, *Z. hammonis*, *Conulus fulvus*, *Helix fruticum*, *H. arbustorum*, *H. costata*, *H. ruderata*, *Cochlicopa lubrica*, *Pupa muscorum*, *P. alpestris*, *P. columella*, *Succinea putris*, *Planorbis carinatus*, *Pl. albus*, *Pl. contortus*, *Pl. dispar*, *Limnæa palustris v. fusca*, *L. limosa-peregra*, *Physa fontinalis*, *Bythinia tentaculata*, *Sphærium corneum*.

[1]) Explorée par *F. Söderlund!!*

Du **Herjedal**[1]) m'ont été communiquées 19 espèces et sous-espèces de mollusques, savoir 14 esp. de terre, et 4 esp., 1 sous-esp. d'eau douce. Cette province, séparée des contrées avoisinantes par de hautes montagnes, des grandes forêts de conifères et par des terrains déserts, est la région montagneuse la plus sauvage de la Suède, sa province la plus pauvre et la plus mal partagée par la nature; elle se compose des deux grandes vallées de la Ljusna et de la Ljunga, à terroir maigre, principalement composé de sable. La vallée située au NO., la plus froide et la plus stérile, est remplie d'âpres chaînes de montagnes; et comme sa faune mollusque a été minutieusement étudiée, il peut être intéressant d'avoir la liste complète de tous les types qui y ont été trouvés. La région explorée est la Vallée supérieure de la Ljusna (Öfre Ljusnedalen), des sources de cette rivière à Ljusnestöt au village de Bruksvallarne sur la Ljusna et à la valléeplus basse de Funnäs (Funnäsdalen); au Nord du village ci-dessus se trouve la vallée de Midtådal, et 3 milles (31 kil.) encore plus au Nord, les Alpes de Helag (Helagsfjellen) s'élevent d'un plateau d'une hauteur d'environ 4000 pieds, sur les fontières du Jemtland; à 5 milles SE. du Funnäsdal se trouve le Mont de Glissjö (Glissjöberget). On rencontre sur les Helagsfjellen: *Vitrina pellucida*, *Pupa arctica*, *Helix arbustorum* (tant sur les broyères du plateau que sur la montagne même à environ 1000 pieds); dans la vallée de Midtådal: *Arion *subfuscus*, *Vitrina pellucida*, *Limnæa truncatula*, *L. limosa-peregra;* sur le mont Midtåkläppen: *Helix arbustorum* (3500—4000′ au-dessus de la mer), *H. ruderata;* dans le Ljusnedal supérieur: *Vitrina pellucida*, *Cochlicopa lubrica*, *Helix ruderata*, *Pupa arctica;* sur le mont de Funnäsdal: *Limax maximus*, *L. agrestis*, (pris auprès du lac de Funnäsdal), *Lehmannia marginata*, *Vitrina pellucida*, *Zonites petronella*, *Arion rufus* (très-grand), *A. *subfuscus*, *Helix harpa* (trouvée en outre sur le Rösvålen), *H. ruderata*, *Pupa arctica*, *P. muscorum*, *Clausilia bidentata:* dans le lac de funnäsdal: *Limnæa limosa-peregra*, *Pl. rossmässleri*, *Pl. dispar;* sur le mont de Glissjöberg: *Vitrina pellucida*, *Zonites petronella*, *Z. hammonis*, *Helix ruderata* (trouvée en outre sur le Örtholm). *Conulus fulvus* se rencontra en assez grande abondance dans la plupart des localités explorées. La richesse du mont de Funnäsdal en limaçons est très-remarquable.

La **Laponie de Luleå**[2]) possède 21 (23) espèces et sous-espèces, savoir 13 (14) esp. de mollusques de terre, et 7 (8) esp., 1 sous-esp de mol-

[1]) Explorée par *F. Söderlund!!*

[2]) Explorée par *C. H. Boheman* et *v. Wallenberg.*

lusques d'eau douce. Au voisinage de la chaîne alpestre, le pays est élevé et montagneux; les montagnes et les hauteurs sont entrecoupées de Vallées, de lacs grands et petits, de marécages plus ou moins profonds, de bruyères et de forêts, d'où l'eau s'écoule par un grand nombre de ruisseaux et de rivières, sans compter les deux grands cours d'eau, naissent sur la pente de la chaîne alpestre le grand et le petit fleuve de Lule (Stora och Lilla Luleå-elf). C'est ici que les Alpes scandinaves atteignent leur plus grand hauteur (Sulitelma, 5796 pieds de Paris = 6342 pieds suédois); mais le terrain s'abaisse si rapidement, que Quickjock, situé à 6 milles à pein du Sulitelma, n'est qu'à 100 pieds de Paris au-dessus de la mer, quoique des montagnes détachées à quelques milles plus bas atteignent plus de 4000 pieds. Dans cette région (66° 30′—67° 25′) ont été trouvés les mollusques suivants: *Vitrina pellucida*, *Conulus fulvus*, *Zonites petronella*, *Arion * subfuscus*, *Helix arbustorum*, *H. ruderata*, *H. pygmaea*, *H. harpa*, *Cochlicopa lubrica*, *Pupa arctica*, *P. alpestris*, *P. columella*, *P. edentula*, *Succinea putris*, *Limnæa stagnalis*, *L. limosa-vulgaris*, *L. limosa-peregra* et *β marginata*, *L. truncatula*, *Planorbis contortus*, *Pl. rossmæssleri*, *Sphærium * consobrinum*, *Pisidium obtusale*, *Margaritana margaritifera* var. *borealis* — et certainement aussi *Pupa antivertigo* et *Valvata piscinalis*, trouvées en la Laponie de Piteå. — La vallée du Luleåelf forme deux terrasses: la Laponie de Luleå décrite ci-dessus, et la partie moyenne de la Norrbothnie, le long des rives de la Baltique. On ajoutera pour cette dernière (autour de l'embouchure du Luleåelf, à 65° 60′) *Succinea pfeifferi?*, *Limnæa palustris v. fusca* et *Sphærium corneum*.

IV.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page 10, ligne 14, ajoutez *Planorbis draparnaldi* JEFFR.

Page 10, ligne 33, lisez *Arion * citrinus* mh. au lieu de *Arion citrinus nov. sp.*

Page 11, ligne 2, excluez *Succinea * contorta* m.

Page 11, ligne 4, ajoutez *Physa * semiglobosa* m.

Page 12, ligne 39, ajoutez: Mr. J. GWYN-JEFFREYS indique *Clausilia rolphi* comme venant de la Norvége; *Succinea oblonga* y a été trouvée par M. le conseiller de justice, Dr POULSÉN, *Planorbis * gredleri* par M, le Cand. ROB. COLLETT, *Limax lævis* par M. le Cand. EISEN, *Planorbis * draparnaldi* et *Pl. glaber* par M. H. FRIELE.

Page 14, ligne 38, immédiatement après . . . passim (C. G. Andersson!!) ajoutez: in Funnäsdalsberget prov. Herjedalen (F. SÖDERLUND in ex.).

Page 18, ligne 7, ajoutez: In **Norvegia** ad Drammen (G. EISEN!).

Page 23, ligne 20, ajoutez: ? *Hyalinia cellaria* var. 1 *sylvatica* Mörch Syn. Moll. Dan. (1864) p. 12.

Page 28, ligne 33, lisez: anfr. planiusculi, $4\frac{1}{2}$, ultimus penultimo multo latior.

Page 29, après la ligne 7, ajoutez: — **contracta** mh.: anfr. $5\frac{1}{2}$—6, tardissime accrescentes, ultimus penultimo subæqualis: diam. $2\frac{1}{2}$ mm. In Suecia ad Ronneby prov. Blekinge. Forma ad Z. subterraneam accedens.

Page 29, ligne 17, lisez: anfr. 5, convexi; et ligne 19 ajoutez: (per.) margine columellari valde arcuato.

Page 30. après la ligne 10, ajoutez: *β* **pallida:** testa pallide luteobrunnea, anfr. primis luteo-rufis. In Suecia ad Ronneby prov. Blekinge.

Page 33, ligne 26, ajoutez: Sans cette supposition, LINNÉ n'aurait pas connu le "Limax agrestis, jaune d'argile, couvert de taches serrées brun-noires" [1]), "assurément chez nous le limaçon le plus commun [1])"!

Page 40, après la ligne plus derniere, ajoutez:

γ **ludoviciana** D'AUMONT: testa minor, membranacea, pellucida. In Suecia ad Ronneby prov. Blekinge.

δ **crassa:** testa ponderosa, crassa, spira elevata, conica, anfractu ultimo antice parum deflexo, apertura minore. In Suecia ad Benestad prov. Skåne.

Sinistrorsa. In truncis fagorum ad Esperöd prov. Skåne invenit clar. Högberg.

---

[1]) Malm Göteb. Vet., Vitt. Samh:s Handl. X (1868) p. 72.

Pag. 42, ligne 28, ajoutez: Cette forme est très voisine de *Helix arbustorum var. trochoidalis* R. en Verhandl. der Belg. Malakozool. Gesellsch. III (Mr S. CLESSIN a donné la coquille de Bavière), mais elle est plus haute et beaucoup plus grande.

Page 47, ligne 22. *Helix ericetorum* et les formes voisines dans ce groupe sont au reste singulièrement difficiles à déterminer, comme les types les plus sujets à des variations et, par suite de cela, les plus débattus. C'est principalement le cas de l'un d'entreeux, *H. candicans*. ALBERS dit relativement à son extension: "Sie ist eine Bewohnerin des südostlichen Europa's, sie beginnt in Ungarn (meine Exemplare sind in der Umgegend von Ofen gesammelt) und geht durch die Krimm, Türkei (Umgegend von Constantinopel!) bis nach Georgien (Abastamans!). Die aus den angegebenen Lokalitäten stammenden Exemplare sind in ihrer Grösse verschieden, sie wechseln zwischen 16 und 20 Millim. in grössten Durchmesser. Es kommt aber eine kleinere sonst in gar nichts verschiedene Form vor, die ich aus Natolien vom Taurus-Gebirge besitze, welche nur 12 Millim. im grössten Durchmesser misst. Wenn es sehr unwahrscheinlich ist, dass H. candicans im nördlichen Italien gefunden wird, ist es anderer Seits als gewiss anzunehmen, dass sie in Deutschland nickt vorkommt. Wenn auch PFEIFFER, Monogr. III p. 132, *H. obvia* Z. und HARTM. als Var. anführt, so beruht dieses wohl ohne Zweifel auf Irrthum, um so mehr, da er sich auf eine Angabe des Herrn Archidiaconus SCHMIDS in Aschersleben beruft, wenn dieser sagt, (Malak. Z., 1850, S. 113), er könne die Berliner H. ericetorum (obvia Z.) von H. candicans Z. nicht unterscheiden." Si j'ai donné p. 47 du présent Exposé, le type norvégien comme *H. ericetorum*, c'est que je m'appuyais, d'un côté sur les données formulées ci-dessus, et de l'autre sur la circonstance que M. le Dr MARTENS (l. c.) supprimant sa première indication de la Norvége méridionale, n'assigne d'autre habitat à cette espèce que l'Allemagne, la Hongrie, la Haute Italie et la Russie méridionale. J'ai reçu depuis lors de nombreux exemplaires authentiques de H. cand., non-seulement des environs de Berlin et de nombreuses localités de l'Allemagne moyenne, mais encore, par MM. BIELZ, v. VEST et JÉCKELI de la Transsylvanie, par Mr V. M. GREDLER du Tyrol, etc., exemplaires qu'une comparaison très-exacte m'a fait reconnaître identiques à tous égards à ceux reçus de la Norvège par la bienveillance de Mr POULSÉN. La seule différence appréciable c'est que les exemplaires norvègiens présentaient une ouverture encore moins arrondie. La diagnose p. 47 n'étant ni complète ni parfaitement correcte, j'inseris ici l'espèce sous son vrai nom, et avec la diagnose consignée p. 113 de ma Fauna Molluscorum Sueciæ, Norvegiæ et Daniæ:

HELIX CANDICANS ZIEGL.

Testa convexo-depressa, candida, nitida, striatula, lineis pallide rufis circumdata; *spira* vix vel paullulum elata, apice fusca; *anfr.* 6, planulati, fusco-fasciati, ultimus multo major, sat forte accrescens, depressiusculus, antice non descendens; umbilicus mediocris, pervius; *apertura* lunato-rotundata, magna; *peristoma* simplex, intus subtiliter labiatum, marginibus approximatis. Diam. maj. 16, diam. 13, alt. 9 mm.

Helix candicans Ziegler, Pfeiffer Monogr. Helic. I. (1848) p. 164. E. v. Martens Binnenmoll. Norv. in Malak. Bl. III (1857) p. 89. Albers Heliceen ed. 2. (1860) p. 110 & 114.

Helix obvia Ziegler, Hartmann Erd- u. Süssw.-Gasterop (1841) p. 148. Pfeiffer Monogr. Heliceor. 1 (1848) p. 102. Gredler Tirols Conchylien 1 (1856) p. 58; Nachtr. p. 287; Nachlese in Verh. zool.-bot. Gesellsch. in Wien 1869 p. 910 (ex spec. numer. ab auctore missis! H. obvia v. candicans forma est concolor). Bielz Fauna Moll. Siebenb. ed. 2 (1867) p. 79 (ex spec. numer. ab auctore missis!).

Helix ericetorum Stein Schn. u. Musch. d. Umgeg. Berl. (1850) p. 38, t. 1 f. 18 (teste Schmidt). Westerlund Synops. crit. moll. (1871) p. 47.

Helix dejecta Rossmässler Iconogr. f. 520.

Page 49, ligne 29, lisez *Syn. Moll. Dan.* au lieu de Syn. Moll. Su.

Page 50, ligne 33, lisez *Stora Björknäs* au lieu de Lilla Björknäs

Page 54, ligne 39, lisez *depresso-globosa* au lieu de depressa, globosa.

Page 59, ligne 4, lisez *subæquales* au lieu de subæqualis.

Page 60, ligne 11, lisez *Gunnebo* au lieu de Gubbero.

Page 62, ligne 30, lisez: — **oblonga:** testa oblonga, anfr. 7—7½, tardissime accrescentes, penultimus præcedentem subæquans, sutura antice non adscendens, apertura parva, oblonga, fissura umbilicalis minutissima; long. 11, diam. 3½ mm.

Page 63, ligne 36, lisez *Storvik* au lieu de Starvik.

Page 66, ligne 8, lisez 1:a et 3:a au lieu de 1:a et 2:a.

Page 69, ligne 23, ajoutez: Long. 11, lat. 3 mm.

Page 70, après la ligne 28, ajoutez:

1. **implicata:** peristoma pliculis intus prorsus carens.

— **austera** mh.: testa peristomate continuo producto, plicis palatalibus ad sinistrum divergentibus, plica lunata forte arcuata, semicirculari.

Page 72, ligne 16, lisez (1856) au lieu de (1865).

Page 74, ligne 15 lisez *spiralis sæpius conjuncta* au lieu de spiralis conjuncta.

Page 74, ligne 22, lisez *sinulus parum depressus* au lieu de non depr. Voyez Fauna Moll. Su., Norv. et Daniæ sous Clausilia pumila, dans laquelle est énoncée la probabilité que la Cl. pumila septentrionale est tout à fait identique à Cl. sejuncta, un type distinct de la vraie Cl. pum.

Page 76, ligne 3, lisez *subspecificum* au lieu de specificum.

Page 76, ligne 23, lisez *spirali* au lieu de basali.

Page 77, après la ligne plus derniére, ajoutez:

1. **subspeciosa:** long. 14, diam. 3 mm.
2. **minor:** long. 11, diam. 2½ mm.
3. **gracilis:** long. 10—11, diam. 2¼—2½, gracilis, corneo-fusca, crebro-strigillata. — In prov. Dalarne omnes has formas legit et misit amiciss. C. G. ANDERSSON.

— **subrugosa** mh.: testa subtiliter striata, fusca interdum crebro-strigillata, anfr. ultimo præsertim latere sinistro costato, anfr. 11, lamella infera deorsum sæpissime simplex, raro antice furcata, plica pal. supra ultra lunellam sæpe forte arcuatam plus minus producta; long. 10—10½, diam. 2 mm. (Forma inter Cl. rugosæ v. minorem et var. reboudii apud A. Schmidt media videtur, cum exempl. a Gallia

mer. sat bene congruens. Cfr. Fauna Moll. Su., Norv. et Dan.). — In Oelandia ad Borgholm legi et a Gotlandia missam accepi.

Page 79, ligne 5, ajoutez: in monte Areskutan, prov. Jemtland, ad $63\frac{1}{2}°$, prof. LILLJEBORG testam invenit.

Page 80, ligne 31, ajoutez: In **Norvegia** ad Fredrikshald (prof. LILLJEBORG!!).

Page 82, ligne 9, ajoutez: Mr le Secrétaire des finances E. A. BIELZ de Buda, a soumis à ma connaissance une dissertation en manuscrit sur "*B. sarsi*", dans laquel l'auteur uniquement guidé par sa perspicaceté, est arrivé au même résultat que moi dans mon examen des exemplaires originaux. Je prends la liberté d'en citer ce qui suit: . . . . . Fasse ich nun alle die diagnostichen und sonstigen Bemerkungen über B. sarsi zusammen, so finde ich, dass sich, horribile dictu, dieselben (bis auf die etwas geringeren Dimensionen, die geringere Zahl der Umgänge und den Mangel des Clausiliums) so ziemlich alle zusammentrreffend auf nicht ganz reife Stücke einer nicht sehr langgestreckten Form der *Clausilia nigricans* PULT. (oder Kurze und gedrungene Stücke der *Clausilia pumila* ZGL.) anwenden lassen, wie wir sie auch in Siebenbürgen haben und ich sie auch von anderen Fundorten besitze . . . . . Bei monströsen und verkümmerten Clausilien, besonders solchen, welche vor der Ausbildung der letzten Umgänge beschädigt würden, fehlen häufig oder fast immer auch das Clausilium und 1 bis 2 Umgänge, so dass ich in dieser Beziehung kein Bedenken träge, solches auch bei der fräglichen, zur Balea sarsi verkümmerten Clausilia vorauszusetzen."

Page 83, ligne 29, lisez testa cylindracea, brunneo-rufa vel etc.

Page 83, ligne 31, doit (—6) être rayé.

Page 84, après la ligne 4, ajoutez:

c. **pratensis** (CLESSIN in ex.): apertura denticulo obtuso in pariete aperturali et dente brevi in palato. (Forma lævis a P. bigranata Rossm. longe diversa). Passim in Suecia cum b. unidentata et solummodo in regionibus calcareis.

Page 84, ligne 7, lisez: anfr. 6, convexi; apertura rotundata, marginibus in pariete aperturali magis approximatis.

Page 88, ligne 38, lisez (WALLENGREN) au lieu de (WALLENBERG).

Page 90, ligne 16, lisez *Piteå Lappmark* au lieu de Luleå Lappm.

Page 90, ligne 31, lisez (descr. et syn. JEFFR. etc.).

Page 92, ligne 16. Le nom plus ancien de cette espèce est *Vertigo lævigata* KOKEIL ap. Gallenstein Kärnthens Conchyl., 1852, p. 24 (ex. spec. a S:t Georgen in Carinthia mihi missis).

Page 93, ligne 19, lisez (c. 63° l. bor.).

Page 97, ligne 14, lisez ad Arjeploug *in Piteå Lappmark.*

Page 101, ligne 14, lisez: æquilatera, capite brevi, inflata, cuspide obtusa; uncini laterales primi ordinis 18, formâ simillimâ, laterales secundi ordinis 12, basi brevi, latâ, cuspide unica vel pluribus usque ad quattuor;

Page 106, ligne 2, lisez *arenaria* au lieu de armaria.

Page 126, ligne 8, lisez *nummularis* au lieu de numullaris.

Page 126, ligne 25, ajoutez: *ð turg.* ad Mjölsefall in prov. Östergötland (E. v. Goës!!).

Page 133, ligne 32, ajoutez: Pour autant que j'en puis juger d'après la description donnée par Mr Hartmann (l. c.) de *Gyraulis deformis*, tous les exemplaires suédois des localités indiquées plus haut, sont identiquement conformes à ce type. Il est certain que le type de Hartmann, de l'Europe moyenne et méridionale, est souvent confondu avec d'autres. Ainsi j'en ai reçu sous ce nom de nombreux exemplaires, qui toutefois n'étaient jamais identiques à notre type, mais appartenaient soit à Pl. gredleri, rossmæssleri et cavatus, soit à Pl. albus β hispidus.

INDEX.

Acicula Risso . . . . . pag. 64.
„ *hyalina* Bielz . . . . . 65.
Acroloxus Beck . . . . . 141.
„ *lacustris* Lin. sp. . . . . 141.
Alloglossa Lindström . . . . 101.
„ *avenacea* Brug. sp. . . . . 101.
Amphipeplea Nilsson . . . . . 118.
„ *glutinosa* Müll. sp. . . . . 119.
Ancylus Geoffroy . . . . . 140.
„ *fluviatilis* Müll. . . . . 140.
Anodonta Bruguière . . . . . 168.
„ * anatina . . . . . 169.
„ * complanata . . . . . 169.
„ *cygnea* Lin. sp. . . . . 168.
Aplexa Fleming . . . . . 121.
„ *hypnorum* Lin. sp. . . . . 121.
Arion Férussac . . . . . 30.
„ * albus Lin. sp. . . . . 31.
„ *ater* Lin. sp. . . . . 30.
„ * citrinus Westerl. . . . . 35.
„ *hortensis* Fér. . . . . 35.
„ *limacopus* Westerl. . . . . 36.
„ * melanocephalus F. B. . . 34.
„ *rufus* Lin. sp. . . . . 32.
„ * subfuscus Dr. sp. . . . . 34.
Balea Prideaux . . . . . pag. 79.
„ *perversa* Lin. sp. . . . . 79.
„ * pyrenaica Bourg. . . . . 80.
„ * rayiana Bourg. . . . . 80.
Bulimus Ehrenberg . . . . . 61.
„ *montanus* Dr. sp. . . . . 62.
„ *obscurus* Müll. sp. . . . . 62.
Bythinia (Prid.) Gray . . . . . 148.
„ *leachi* Shepp. sp. . . . . 149.
„ *tentaculata* Lin. sp. . . . . 148.
Carychium Müll. . . . . 106.
„ *minimum* Müll. . . . . 107.
Clausilia Draparnaud . . . . 65.
„ * æmula Westerl. . . . . 73.
„ *bidentata* Ström sp. . . . . 78.
„ *biplicata* Mont. sp. . . . . 69.
„ * connectens Westerl. . . . 76.
„ *dubia* Dr. . . . . 77.
„ *laminata* Mont. sp. . . . . 66.
„ *nilssoni* Westerl. . . . . 69.
„ * ommæ Westerl. . . . . 75.
„ * oreas Westerl. . . . . 74.
„ * personata Westerl. . . . 77.
„ *plicata* Dr. . . . . 70.
„ *plicatula* Dr. . . . . 72.

Clausilia *pumila* Ziegl. . . . pag. 74.
„ *rolphi* Leach. . . . . 71.
„ * scanica Westerl. . . . . 73.
„ * sejuncta Schm. . . . . 75.
„ *ventricosa* Dr. . . . . 70.
Cochlicopa (FÉR.) RISSO . . . . 63.
„ *lubrica* Müll. sp. . . . . 63.
„ * minima Siem. sp. . . . . 64.
Conulus (FITZ.) M. TANDON . . . 21.
„ *fulvus* Müll. sp. . . . . 21.
Helix LINNÉ . . . . . 37.
„ *aculeata* Müll. . . . . 58.
„ *arbustorum* Lin. . . . . 42.
„ *bidens* Chemn. sp. . . . . 55.
„ *candicans* Ziegl. . . . . 195.
„ * colliniana Bourg. . . . . 51.
„ * concinna Jeffr. . . . . 53.
„ *costata* Müll. . . . . 56.
„ * depilata C. Pfr. . . . . 53.
„ *fruticum* Müll. . . . . 48.
„ *harpa* Say . . . . . 57.
„ *hispida* Lin. . . . . 51.
„ *hortensis* Müll. . . . . 40.
„ *incarnata* Müll. . . . . 49.
„ *lamellata* Jeffr. . . . . 59.
„ *lapicida* Lin. . . . . 44.
„ *liberta* Westerl. . . . . 54.
„ *nemoralis* Müll. . . . . 38.
„ *pomatia* Lin . . . . . 38.
„ *pulchella* Müll. . . . . 56.
„ *pygmæa* Dr. . . . . 61.
„ *rotundata* Müll. . . . . 60.
„ *rubiginosa* Ziegl. . . . . 54.
„ *ruderata* Stud. . . . . 59.
„ * rudis Mühlf. . . . . 43.
„ *striata* Müll. . . . . 46.
„ *strigella* Dr. . . . . 50.
Hydrobia HARTMANN . . . . . 151.
„ *steini* v. Mart. . . . . 151.
Lehmannia HEYNEMANN . . . . 18.
„ *marginata* Müll. sp. . . . . 18.
Limax LISTER, LINNÉ . . . . . 14.
„ *agrestis* Lin. . . . . 16.
„ *lævis* Müll. . . . . 17.
„ *maximus* Lin. . . . . 14.
Limax * norvegicus Westerl. . pag. 17.
„ *tenellus* Nilss. . . . . 15.
Limnæa LAMARCK . . . . . 107.
„ *auricularia* Lin. sp. . . . . 115.
„ *glabra* Müll. sp. . . . . 114.
„ *limosa* Malm . . . . . 115.
„ * maritima Jeffr.? . . . . 110.
„ *palustris* Müll. sp. . . . . 109.
„ *stagnalis* Lin. sp. . . . . 108.
„ *truncatula* Müll. . . . . 111.
Margaritana SCHUMACHER . . . 167.
„ *margaritifera* Lin. . . . . 167.
Neritina LAMARCK . . . . . 152.
„ *fluviatilis* Lin. sp. . . . . 152.
Paludina LAMARCK . . . . . 146.
„ *contecta* Mill. . . . . 147.
„ *vivipara* Lin. sp. . . . . 146.
Physa DRAPARNAUD . . . . . 119.
„ *fontinalis* Lin. sp. . . . . 120.
„ * semiglobosa Westerl. . . 120.
Pisidium C. PFEIFFER . . . . 157.
„ *amnicum* Müll. sp. . . . . 157.
„ *arcæforme* Malm . . . . . 162.
„ * cuneatum Bielz . . . . . 159.
„ *henslowanum* Sh. sp. . . . 158.
„ *nitidum* Jen. . . . . 162.
„ *obtusale* (Lam.?) Jen. . . . 160.
„ *personatum* Malm . . . . 161.
„ *pulchellum* Jen. . . . . 159.
„ *pusillum* Turt. sp. . . . . 161.
„ *subtruncatum* Malm . . . . 160.
Planorbis GUETTARD . . . . . 122.
„ *albus* Müll. . . . . 131.
„ * ammonoceras Westerl. . . 124.
„ *carinatus* Müll. . . . . 125.
„ *complanatus* Lin. sp. . . . 139.
„ *contortus* Lin. sp. . . . . 130.
„ *corneus* Lin. sp. . . . . 123.
„ *crista* Lin. sp. . . . . 136.
„ * deformis Hartm. . . . . 133.
„ *discus* Parr. . . . . 128.
„ * dispar Westerl. . . . . 131.
„ * draparnaldi Jeffr. . . . . 132.
„ *glaber* Jeffr. . . . . 135.
„ * goësi Westerl. . . . . 128.

Planorbis * gothicus Westerl. . pag. 132.
„ * gredleri Bielz . . . . . 133.
„ *limophilus* Westerl. . . . . 134.
„ *malmi* Westerl. . . . . 136.
„ *nitidus* Müll. . . . . 139.
„ *riparius* Westerl. . . . . 139.
„ *rossmæssleri* Auersw. . . . 134.
„ * rotundatus Poir. . . . . 129.
„ *spirorbis* (Lin.) Müll. . . . 128.
„ *umbilicatus* Müll. . . . . 124.
„ *vortex* Lin. sp. . . . . 127.
Pupa Draparnaud . . . . . 82.
„ *alpestris* Alder . . . . . 95.
„ * anconostoma Lowe . . . 83.
„ *angustior* Jeffr . . . . . 98.
„ *antivertigo* Dr. . . . . 89.
„ *arctica* Wallenb. . . . . 96.
„ *collina* Westerl. . . . . 100.
„ *columella* Benz. . . . . 87.
„ *costulata* Nilss. . . . . 86.
Pupa *cylindracea* D. C. sp. . . . 82.
„ *edentula* Dr. . . . . 88.
„ *genesii* Gredler . . . . . 97.
„ *lilljeborgi* Westerl. . . . . 90.
„ *minutissima* Hartm. . . . . 86.
„ *muscorum* Müll. sp. . . . . 83.
„ *otostoma* Westerl. . . . . 100.
„ *ovoidea* Westerl. . . . . 96.
„ *pineticola* Westerl. , . . . 97.
„ *pusilla* Müll. . . . . 98.
„ *pygmæa* Dr. . . . . 93.
„ *ronnebyensis* Westerl. . . . 94.
„ *shuttleworthiana* Charp. . . . 96.
„ *substriata* Jeffr. . . . . 92.
„ *tumida* Westerl. . . . . 99.
Sphærium Scopoli . . . . pag. 153.
„ *calyculatum Dr. sp. . . . 156.
„ *consobrinum Fér. . . . . 154.
„ *corneum* Lin. sp. . . . . 154.
„ *lacustre* Müll. sp. . . . . 155.
Succinea Draparnaud . . . . . 102.
„ *arenaria* Bouch. . . . . 105.
„ *oblonga* Dr. . . . . 104.
„ *pfeifferi* Rssm. . . . . 103.
„ *putris* Lin. sp. . . . . 102.
„ *temporalis Westerl. . . . 103.
Unio Retzius . . . . . 163.
„ *crassus* Retz. . . . . 163.
„ *pictorum* Lin. sp. . . . . 166.
„ *tumidus* Retz. . . . . 165.
Valvata Müller . . . . . 143.
„ *antiqua* Sow. . . . . 145.
„ *cristata* Müll. . . . . 143.
„ *macrostoma* Steenb. . . . . 143.
„ *piscinalis* Müll. sp. . . . . 144.
„ * pusilla Müll. sp. . . . . 145.
Vitrina Draparnaud . . . . . 19.
„ * angelicæ Beck . . . . . 20.
„ *pellucida* Müll. . . . . 19.
Zonites Montfort . . . . . 21.
„ *alliaria* Mill. sp. . . . . 24.
„ *cellaria* Müll. sp. . . . . 22.
„ *crystallina* Müll. sp. . . . . 28.
„ * draparnaldi Beck? sp. . . 23.
„ *hammonis* Ström sp. . . . 25.
„ *nitida* Müll. sp. . . . . 29.
„ *petronella* Charp. sp. . . . 26.
„ *pura* Alder sp. . . . . 28.
„ * subterranea Bourg. . . . 29.

DE DESMIDIACEIS,

QUÆ IN SUECIA INVENTÆ SUNT,

OBSERVATIONES CRITICÆ.

AUCTORE

P. M. LUNDELL.

CUM TABULIS V.

(Reg. Societati Scientiarum Upsaliensi traditum die 19 Nov. 1870.)

UPSALIÆ

EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.

MDCCCLXXI.

Studium familiæ Desmidiaccarum aliis in terris jamdiu vigebat florebatque, quum cl. P. Th. Cleve opusculum, quod "Bidrag till kännedomen om Sveriges sötvattensalger af familjen Desmidieæ" inscribitur, paucis ante annis edidit, in quo species jam cognitas, quas hac in terra invenerat, adjectis 4 novis, ab illo detectis, enumeravit. Non multo post opuscula duo foras data sunt, alterum, "Bidrag till kännedomen om Sveriges Desmidieæ", Desmidiaceas, quas in Vestrogothia observaverat cl. O. Nordstedt, enumerans, alterum, quod "Anteckningar om Skandinaviens Desmidiacéer" inscribitur, species hujus familiæ, quas in Suecia circa Upsaliam et in provinciis Dalia et Bahusia et in Norvegia meridiana invenerat cl. V. B. Wittrock, continens.

Adjectis ad species his in opusculis enumeratas speciebus 5., quæ in Suecia ab aliis observatæ esse (in Rabenhorstii "Flora Europæa Algarum aquæ dulcis et submarinæ" sect. III, 1868), dicuntur, et tribus a Cleveo hac ex terra missis et (in "die Algen Europas, von L. Rabenhorst ausgegeben" sub N:o 1925—27) datis, Sueciæ species 187. a Wittrockio (op. cit. pag. 1.) tribuuntur; — de quo numero tamen hæ 4. species deducendæ sunt:

Micrast. crenata Cleve (opusc. cit. pag. 487) (= *M. conferta* nov. sp.), *M. decemdentata* Cleve (l. c.) (= var. *M. truncatæ* Corda), *Cosm. crenulatum* Cleve (l. c. pag. 488) (= *C. Meneghinii* Bréb.) et *Penium Thwaitesii* Cleve (l. c. pag. 492.) (= *P. Clevei* nov. sp.). — Quo facto restant 183 species.

Quum igitur multæ cognitæ essent species, quæ apud nos nondum erant inventæ et præterea nonnullæ Floræ algarum novæ ab auctoribus, quos supra dixi, hac in terra detectæ essent, plantulis his cognoscendis et in-

vestigandis operam dare statui, si quid novi invenirem; quod præter opinionem meam longe evenit. Ex speciebus enim jam cognitis species 88 nostræ Floræ novæ a me inventæ sunt, species autem non ante cognitæ 54 a me detectæ et infra descriptæ et delineatæ sunt. Quæ 142 species si ad illas 183, Floræ Suecicæ supra tributas, adduntur, tota Desmidiacearum Suecicarum fit summa 325; qui numerus, quum hæc terra accuratius pervestigata erit, non dubito, quin aliquot decadibus augeatur.

Jam vero priusquam ad enumeranda quæ nova inveni describendaque aggredior, hæc pauca prædicenda videntur.

Cl. de Bary, observationibus non modo de structura corporis chlorophyllacei, sed etiam de formatione forma et evolutione zygosporarum maxima cum diligentia factis, quas in libro illo, qui"Untersuchungen über die Familie der Conjugaten" inscribitur, et copiose et plane exposuit, ad has plantulas vere cognoscendas et ratione atque ordine digerendas quam plurimum contulisse, quis est ex algarum aquæ dulcis amatoribus, quin sciat? Quem quum secuti sint algologi nostri, quos supra dixi, infra breviter exponere conabor, quibus rebus a ratione illa De Baryana abhorreat ea, qua hoc in opusculo scribendo usus sum, et quæ causæ fuerint.

Cl. ille De Bary, quum *Cosm. tinctum* Ralfs, quamvis *Cosmariis* cetero simillimum, ad gen. *Sphærozosma* referendum ob zygosporas glabras esse (l. c. pag. 73) diceret, formam zygosporarum in generibus constituendis plus habitu cellularum valere in eaque sola fundari genus quoddam posse contendisse videtur.

Qua in re cum illo consentire non possum. Forma enim zygosporarum num satis est constans, ut in ea *sola* fundari possit genus quoddam?

In gen. *Closterio* hæ 5 formæ zygosporarum, plus minus inter se diversæ, repertæ sunt: *a.* zygosp. globosæ vel ovales vel subquadraticæ (angulis non protractis) singulæ, glabræ: *Cl. acerosum* (Schrank) Ehrenb. (Ralfs British Desmidieæ tab. XXVII fig. 2), *strigosum* Bréb. (Liste des Desmidiées observées en Basse-Normandie, pag. 153), *macilentum* Bréb. (l. c. tab. II, fig. 36), *Cynthia* De Not. (sec. observ. meas), *parvulum* De Bary (l. c. tab. V, fig. 21—23), *Leibleinii* Kütz. (Ralfs l. c. tab. XXVIII, fig. 4), *Dianæ* Ehrenb. (sec. observ. meas), *moniliferum* (Bory) Ehrenb. (vide infra tab. V, fig. 14 a.), *Ehrenbergii* Menegh. (Pritch. a History of Infusoria tab. XVI, fig. 14), *Lunula* (Müller) Nitzsch (De Bary l. c. tab. V, fig. 25), *costatum* Corda (sec. observ. meas), *striolatum* Ehrenb. (Ralfs l. c. tab. XXIX, fig. 2. g, h), *intermedium* Ralfs (sec. observ. meas), *juncidum* Ralfs (l. c. fig. 6. c, d) et *Pritchardianum* Archer (Quarterly Journal of Micr. Science vol. II, London 1862, tab. II, fig. 27); *b.* zygosp. globosæ, singulæ, processibus

brevi-conicis munitæ: *Cl. calosporum* Wittr. (l. c. fig. 11. c, d); *c.* zygosp. binæ, glabræ: *Cl. lineatum* Ehrenb. (Ralfs l. c. tab. XXX, fig. 1. c.); *d.* zygosp. quadraticæ angulis plus minus protractis, rotundatis vel acuminatis, singulæ: *Cl. Cornu* Ehrenb. (Ralfs l. c. fig. 6. c, d), *acutum* (Lyngb.) Bréb. (Ralfs l. c. fig. 5. e), *subulatum* (Kütz.) Bréb. (Ralfs l. c. tab. XXXIV, fig. 5), *gracile* Bréb. (vide infra tab. V, fig. 15) et *pusillum* Hantzsch (sec. Reinsch die Algenflora des mittleren Theiles von Franken, pag. 187); *e.* zygosp. quadraticæ angulis truncatis vel retusis, singulæ: *Cl. setaceum* Ehrenb. (Ralfs l. c. tab. XXX, fig. 4. e) et *rostratum* Ehrenb. (Ralfs l. c. fig. 3. e, De Bary l. c. tab. V, fig. 26). Præterea diversis modis formantur zygosporæ hoc in genere (cfr. inter se *Cl. acerosum* (Ralfs l. c. tab. XXVII, fig. 2. h—l), *Lunula* (De Bary l. c. tab. V, fig. 24, 25) et *parvulum* (De Bary l. c. fig. 15—23)). Quot in genera igitur dividendum est hoc ipsum genus *Closterium*, si forma formatione zygosporarum in generibus constituendis plurimum valeat!

In gen. *Spirotænia* quanta zygosporarum dissimilitudo! Zygosporæ *Sp. truncatæ* Archer processibus brevi-conicis obsitæ sunt, fere ut in *Clost. calosporo* Wittr.; in *Sp. condensata* Bréb. zygosporæ membrana reticulata marginatæ sunt. Cfr inter se figuras, quas cl. Archer (in Quarterly Journal of Microsc. Science vol. VII, new ser., tab. VIII, fig. 5—11 et 12) dedit.

Tetmemorus granulatus (Bréb.) Ralfs (l. c. tab. XXXIII, fig. 1) zygosporas globosas habet, zygosporæ autem *Tetmemori lævis* (Kütz.) Ralfs (l. c. tab. XXIV, fig. 3. d—g) subglobosæ in membrana externa laxa, quadratica, quasi in sacculo, sunt inclusæ.

Zygosporas globosas, singulas, glabras habent *Penium closterioïdes* Ralfs (sec. meas observ.), *margaritaceum* (Ehrenb.) Ralfs (l. c. tab. XXV, fig. 1. g, h et tab. XXXIII, fig. 3), *Cylindrus* (Ehrenb.) Bréb. (sec. observ. meas) et *truncatum* (Bréb.) Ralfs (l. c. tab. XXV, fig. 5. f, g.); quadraticas autem singulas *P. Mooreanum* Archer (Quarterly Journal of Microsc. Science vol. IV, London 1864, tab. I, fig. 39—44) et *Navicula* Bréb. (vide infra tab. V, fig. 8!) habent; binas vero *P. didymocarpum* nov. sp. (tab. V, fig. 9. b, c) (et *Cylindrocystis diplospora* nov. sp. (l. c. fig. 7 b)).

E *Cosmariis*, quorum quidem cognitæ sunt zygosporæ, pleraque globosas, muricibus vel aculeis ornatas habent, glabras vero et globosas *C. rupestre* Näg. (op. cit. tab. VII, A, fig. 6. h), *pygmæum* Archer (l. c. fig. 49), *Broomei* Thwaites (Ralfs l. c. tab. XXXIII, fig. 7 et Pritch. Infus. tab. I, fig. 7) et *moniliforme* (Turp.) Ralfs (vide infra tab. III, fig. 15!), quadraticas autem et glabras *C. quadrifarium* nov. sp. (l. c. fig. 12. c.) et *tinctum* Ralfs (l. c. tab. XXXII, fig. 7. e—i).

Diversæ sunt in gen. *Arthrodesmo* zygosporæ: in *A. octocorni* Ehrenb. *α.* (sec. meas observ.) et *Incudi* (Bréb.) Hass. *β.* (Ralfs l. c. tab. XX, fig. 4. k, l) globosæ aculeatæ, in *A. convergenti* Ehrenb. (vide infra tab. III, fig. 22!) autem subglobosæ inermes sunt.

In gen. *Xanthidio* quam diversæ zygosporæ! Quum enim zygosporas aculeis simplicibus elongatis armatas habere, æque ac *Staurastra* permulta, reperta a me sunt *X. aculeatum* Ehrenb. (vide tab. V, fig. 5!), *antilopæum* (Bréb.) Kütz. et *cristatum* Bréb., zygosporæ *X. armati* Bréb. membranam nudam, scrobiculatam habent (vide Ralfs Brit. Desmid. tab. XVIII, fig. g!), qua re una ex omnibus Desmidiaceis sola hæc species cum Zygnemaceis et Mesocarpaceis quibusdam congruit.

Quantum autem differunt zygosporæ *Desmidii Baileyi* (Ralfs) De Bary (Ralfs l. c. tab. XXXV, fig. 1. c. et Wallich in Annals and Magazine of Natural History vol. V, ser. 3, tab. VII, fig. 9), *aptogoni* Bréb. (Wallich l. c. fig. 4) et *Swartzii* Ag. (Ralfs l. c. tab. IV. fig. f.) ab illis *Desmidii cylindrici* Grev. (Ralfs l. c. tab. II, fig. e—k)! Quod, quamvis zygosporis in altera cellula copulata formatis non a reliquis hujus generis speciebus solum, sed ab omnibus omnino Desmidiaceis multum differat, tamen generi *Desmidio* adnumeratum a cl. De Bary (l. c. pag. 76) idque optimo jure est.

Quum igitur formas tam inter se diversas, quibus in enumerandis ne multus fuisse videar, præbeant zygosporæ, ad genera hujus familiæ inter se distinguenda multum valere mihi quidem non videntur.

In speciebus autem statuendis maxima earum ratio habenda esse mihi videtur, quare *Staurastrum pterosporum* nov. sp. a *St. O'Mearii* Archer sola zygospora bene distinctum puto.

Quum in speciebus hujus familiæ inter se distinguendis characteres e habitu ipso cellulæ vel e forma zygosporarum sumti fere semper sunt, ratio structuræ corporis chlorophyllacei maxima vel fere sola a cl. Nägeli primo, quum species in certa genera digereret, in libro illo egregio, qui "Gattungen einzelliger Algen" inscribitur, habita est. Quem maxima ex parte secutus cl. De Bary quum in speciebus duabus, quæ habitu sunt *Cosmariorum*, *C. turgidum* Bréb. et *De Baryi* Archer (= *Pleurotænium Cosmarioides* De Bary) dico, massam chlorophyllaceam in tænias parietales formatam esse observasset, eas species, quamvis *Cosmariis* forma ipsa cellulæ simillimas, tamen ob eam ipsam massæ chlorophyllaceæ structuram gen. *Pleurotænio* (l. c. pag. 75) adnumeravit; contra *Docidium minutum* Ralfs, cujus massam chlorophyllaceam centralem esse invenerat, e *Pleurotænio (Docidio)* remotum inter *Penia* (l. c. pag. 73) collocavit.

Qua de re clarissimis Brèbisson et Archer aliter placere *videtur; Penium minutum* (Ralfs) De Bary enim gen. *Docidio (Pleurotænio)* et *Pleurotœnium turgidum* (Bréb.) De Bary et *Cosmarioides* De Bary gen. *Cosmario* Brébissonium secutus (in Pritch. l. c. pag. 745 et 735) hic reddidit.

Cur ita fecerit, ex iis intelligi potest, quæ hac de re (l. c. pag. 735) ita locutus est: "With great deference, we place the above species" *(Pleurotœn. Cosmarioides et turgidum)* "here" (inter *Cosmaria)*, "as described by M. de Bary, coinciding with M. de Brébisson in thinking the disposition of the endochrome not sufficiently constant to form the genus Pleurotœnium." Quod in eam sententiam dictum non esse, ut structuram massæ chlorophyllaceæ in speciebus singulis *Pleurotœnio* adnumeratis nimis variare (ut, e. gr., *Pleurot. nodulosi* individua nonnulla parietalem massam chloroph. haberent, alia centralem) contenderet, per se patet, sed ita accipiendum esse videtur, ut non omnes species, quæ ratione solius formæ cellularum habita ad *Docidium (Pleurotœnium)* referri solerent, tæniis chlorophyllaceis parietalibus instructas esse vel, ut aliis verbis utar, non omnia *Docidia Pleurotœnio* esse adnumeranda contendisse auctor ille videatur. Quod ipsum cum meis observationibus prorsus congruit. E *Docidiis* enim a me inventis hæc sola tænias parietales habere reperta sunt: *D. Trabecula* (Ehrenb.) Reinsch, *clavatum* Kütz., *truncatum* Bréb., *Indicum* Grun., *maximum* Reinsch, *nodulosum* Bréb., *coronatum* Bréb., *nodosum* Bailey et *gracile* (Bailey) Wittr.; contra *D. minutum* Ralfs, *Baculum* Bréb., *dilatatum* (Cleve) et *nobile* (Richter) massam chlorophyllaceam centralem habent. Cl. De Bary (et Nägeli) igitur si sequi auctorem vellem, illas 9 species ad *Pleurotœnium* Näg., has 4 autem ad *Penium* (Bréb.) referrem; cum Archero autem et Brébissonio si hac de re libentius consentirem, ad *Docidium* Bréb. omnes referendæ mihi essent. Sed neutros auctores secutus medium fere inter utrosque tenui; *Docidiorum* enim quæ tæniis parietalibus instructa sunt, ea omnia ad *Pleurotœnium* Näg. retuli, *D. minutum* gen. *Penio* (Bréb.) adnumeravi, reliqua, *Baculum*, *dilatatum*, *nobile* (et *undulatum* Bailey) eaque sola in gen. *Docidio* (Bréb., sed mut. char.) reliqui. Cur ita fecerim, nec ullo alio modo facere potuisse mihi videar, jam breviter explicabo.

D. Baculum, *dilatatum*, *nobile*, *minutum* (et *undulatum* Bailey (?)) massam chlorophyllaceam, ut supra dixi, habent centralem nucleis amylaceis in seriem unam axilem ordinatis; in *D. Baculo* laminæ chlorophyllaceæ (semper?) 2. quasi inter se in unam laxe connexæ sæpe sunt, quo fit, ut massa chlorophyllacea speciem fere ejus Mesocarpacearum habeat; in *D. dilatato*, *nobili* et *minuto* laminæ 4 (?) sæpe flexuosæ (fere ut in *Closteriis*

quibusdam) adsunt; locello sphærico apicali hæc omnia carent*) et (excepto *D. minuto)* basin ipsam semicellularum longitudinaliter (tuberculato-) plicatam (plicæ speciem tuberculorum minutissimorum præ se ferunt; vide infra tab. V, fig. 12!) semper habent. Reliqua omnia *Docidia* (etiam *D. gracile* Bailey, *Kayei* Archer et *verrucosum* Bailey) tænias chlorophyllaceas parietales et locellos apicales sphæricos distinctos habent nec basin semicellularum longitudinaliter umquam plicatam. Nec igitur omnia *Docidia* (etiam *D. minutum*) in unum genus (*Docidium* Bréb.) conferre (ut Brébissonio et Archero placet) ullo pacto potui; quibus enim characteribus hoc genus a gen. *Cosmario* et *Penio* certe dignosceretur? Num forma cellulæ cylindrica et elongata? At *Pen. crassiusculum*, *oblongum*, *truncatum*, *C. Palangula* Bréb. et *elegantissimum* nov. sp. et cylindrica et elongata sunt. An structura massæ chlorophyllaceæ, quæ in aliis lateralis, in aliis centralis est? An locellis apicalibus, quos alia habent, qui in aliis nulli sunt? Minime vero! Nec remoto e *Docidiorum* numero *D. minuto* et inter Penia collocato reliqua *Docidia* ob easdem causas in unum genus cogere potui. At *Docidia* illa 5, quæ massa chlorophyllacea centrali instructa esse supra dixi, ad *Penium* sunt (ut cl. De Bary visum est) referenda, reliqua *Pleurotænio* Näg. adnumeranda. Sed ejusmodi genus *Penium* num naturale esset? Quantum *D. Baculum*, *dilatatum*, *nobile* et *undulatum* a Peniorum habitu differunt! *D. minutum* autem, a 4 illis *Docidiis* basi semicellularum nec inflata nec longitudinaliter plicata bene distinctum, cum ceteris *Peniis P. crassiusculo* arcte conjunctum est.

Quamobrem distributio ea *Docidiorum*, quam a me factam esse supra dixi, optima mihi ad sistenda genera et naturalia et bene inter se distincta visa est. Ita enim *Pleurotænium* Näg. genus fit naturale et tum a gen. *Penio* et *Docidio* (Bréb., mut. char.) tæniis chlorophyllaceis parietalibus, tum a *Cosmariis*, massa chlorophyllacea laterali instructis (= *Pleurotæniopsis* nov. subgen.), locello sphærico apicali distincto (qui character et constans nec minimi esse momenti mihi quidem videtur) facile dignoscitur. Gen. *Docidium* (Bréb., mut. char.) vero nec a natura alienum videtur et a gen. *Penio* basi semicellularum inflata et longitudinaliter plicata et a gen. *Pleurotænio* Näg. massa chlorophyllacea centrali bene est distinctum.

*) Figuræ a cl. Ralfs (l. c. tab. XXVI, fig. 5. a; tab. XXXIII, fig. 5. a, b) et Bailey (in "Smithsonian contributions to knowledge", vol. II. tab. I, fig. 2 et 3) datæ locellos habere quidem videntur, sed nec De Bary (l. c. tab. V, fig. 8) nec Bulnheim (in Hedwigia 1861, tab. IX, fig. 4) ullos delinearunt nec ego ipse in individuis et *D. minuti* et *Baculi* et *dilatati*, quæ plurima intentis oculis contuitus persæpe sum, locellos ullos umquam vidi; quare suspicio non abest, quin figuræ illæ a Ralfs et Bailey datæ naturæ non prorsus congruant.

Præter 2 *Cosmaria*, *turgidum* Bréb. et *De Baryi* Archer, quæ a cl. De Bary ob massam chlorophyllaceam lateralem ad *Pleurotænium* relata, *Cosmario* autem a cl. Archer reddita esse supra commemoravi, hæc quoque tæniis vel laminis chlorophyllaceis parietalibus instructa esse reperta a me sunt: *C. Cucumis* Corda, *striolatum* (Näg.) Archer, *elegantissimum* nov. sp., *prægrande* nov. sp., *ovale* Ralfs (et fortasse *Ralfsii* Bréb.). Quæ omnia nec ad *Pleurotænium* referenda nec e *Cosmariorum* genere omnino removenda, sed tantum in novum *Cosmarii* subgenus cogenda Archerum illum secuto mihi eam ob rem visa sunt, quod habitu ipso sunt *Cosmariorum* nec ulla alia re nisi structura massæ chlorophyllaceæ a ceteris *Cosmariis* novum eorum genus differret. Etiam in *Staurastris* nonnullis (*St. tumido* Bréb., *grandi* Bulnh., *longispino* (Bailey) Archer, *Brasiliensi* Nordst. et fortasse *sexcostato* Bréb. et *mutilato* nov. sp.) massam chlorophyllaceam lateralem inveni; sed nec ea ob causam, quam de *Cosmariis* nuper dixi, a ceteris *Staurastri* speciebus secernenda et in novum genus cogenda esse putavi. A quibus vix alia re quam processu vel tumore centrali, interdum minus distincto et tantum callosa membrana significato discerni *Xanthidia* possunt, quippe quorum formam trigonam invenerim et quæ omnia laminis chlorophyllaceis parietalibus instructa esse reperta sint.

Difficillima inter se distinctu sunt genera *Cosmarium* et *Penium* nec hoc zygosporis glabris (nonnullæ enim *Cosmarii* quoque species glabras illas habent) vel nucleis amylaceis pluribus (in *P. diplocarpo* nov. sp., *Naviculæ* Bréb. forma minori, *Cylindro* (Ehrenb.) Bréb., *polymorpho* Perty, *Mooreano* Archer et fortasse in aliis nuclei amylacei singuli sunt) ab illo genere discerni (ut De Bary l. c. pag. 73 putare se dicit) potest.

De facultate se movendi, qua has plantulas præditas esse contenderunt auctores nonnulli, hoc solum allatum volo. Extremo vere anni 1869 quum in sedimento, e piscina horti botanici Upsaliensis sumto, *Closterium lanceolatum* Kütz. una cum aliis nonnullis *Closterii* speciebus non rarum esse invenissem, collectionem eam in aquario parvo repositam conservare statui, ut *Closterium* illud observarem. Post aliquot dies individua ejus quam plurima in apicibus ipsis ramulorum musci, in aquario crescentis, ad summam aquam non pertinentium hinc illinc conglobata et apicibus inter se contigua, quasi magnetica vi allecta, sed massa gelatinosa communi (matricali) nulla inclusa, magna cum admiratione vidi. Quod, quum globuli illi non in una solum parte aquarii (fenestræ proxima), sed fere ubique adessent, tantum luce ipsa solis factum esse vix mihi videtur.

Nisi erroris tollendi causa non omnia synonyma, sed tantum ea quæ maximi esse momenti visa sunt, infra a me sunt allata.

Quas in Smolandia ad Räppe, Wirestorp et Svenarum adesse species infra dixi, eæ omnes in sedimentis ab amiciss. G. E. RINGIUS (ex amni Räppensi) et Phil. Dr P. G. THEORIN (ad Wirest. et Sven.) collectis et mihi benevolentissime deditis inventæ sunt.

Mensura usus sum Anglica (0,0000″ = pollic. Angl.) et Gallica (μ = micromillim.).

Species vel var. novæ signo ** notatæ sunt; quibus vero signum * appositum est, eæ jam cognitæ quidem, sed hac in terra non antea observatæ sunt.

Operum, quæ hoc in opusculo citavi, hæc ipse vidi et consului:

ARCHER, W. Desmidieæ or Desmidiaceæ; A History of Infusoria by A. Pritchard. London 1861. *(Archer in Pritch. Infus.)*

„ Description of a New Species of Micrasterias (Ag. et aliorum, non Ehr.); et Description of a New Species of Cosmarium (Corda), of Staurastrum (Meyen), of two New Species of Closterium (Nitzsch), and of Spirotænia (Bréb.); Quarterly Journal of Microscopical Science. Vol. II, new ser. London 1862. *(Archer Description 1862.)*

„ An Endeavour to identify Palmogloea macrococca (Kütz.); Description of a New Species of Cosmarium (Corda), and of Penium (Bréb.); et Description of a New Species of Cosmarium (Corda), and of Arthrodesmus (Ehr.); Quarterly Journal of Microscopical Science. Vol. IV, new ser. London 1864. *(Archer Description 1864.)*

„ Observations on Micrasterias Mahabuleshwarensis (Hobson), and Docidium Pristidæ (Hobson); Quarterly Journal of Microscopical Science. Vol. V, new ser. London 1865. *(Archer Observations.)*

„ On the Conjugation of Spirotænia condensata (Bréb.), and of Spirotænia truncata (Archer); Quarterly Journal of Microscopical Science. Vol. VII, new ser. London 1867. *(Archer Conjug. of Spirot.)*

BAILEY, J. W. Microscopical Observations made in South Carolina, Georgia and Florida; Smithsonian contributions to knowledge, Vol. II. New-York 1851. *(Bailey Micr. Observ.)*

BRÉBISSON, A. DE. Liste des Desmidiées observées en Basse-Normandie, et Additions a la Liste etc.; Mémoires de la Société impériale des sciences naturelles de Cherbourg. Tome IV. Cherbourg 1856. *(Bréb. Liste.)*

BULNHEIM, O. Einige Desmidieen; et Beiträge zur Flora der Desmidieen Sachsens, I, II; Hedwigia, ein Notizblatt für kryptogamische Studien, redigirt von L. Rabenhorst. Zweiter Band (1858—1863). Dresden 1863. *(Bulnh. in Hedwigia).*

CLEVE, P. TH. Bidrag till kännedomen om Sveriges sötvattensalger af familjen Desmidieæ; Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Årg. 20, 1863. Stockholm 1864. *(Cleve Bidrag).*

CRAMER, C. Algologische Notizen. Hedwigia, ein Notizblatt für kryptogamische Studien, redigirt von L. Rabenhorst. Zweiter Band (1858—1863). Dresden 1863. *(Cramer in Hedwigia).*

É Bary, A. Untersuchungen über die Familie der Conjugaten. Leipzig 1858. *(De Bary Conjugat.)*.

De-Notaris, G. Elementi per lo studio delle Desmidiacee Italiche. Genova 1867. *(De-Not. Elementi)*.

Ehrenberg, C. G. Ueber die Entwickelung und Lebensdauer der Infusionsthiere. Abhandl. d. Königl. Akad. d. Wissenschaft. zu Berlin 1831. Berlin 1832. *(Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1831)*.

„ Dritter Beitrag zur Erkentniss grosser Organisation in der Richtung des kleinsten Raumes. Abh. d. Königl. Ak. d. Wissenschaft. zu Berlin 1833. Berlin 1835. *(Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1833)*.

„ Mikroskopische Analyse d. Curländischen Meteorpapiers von 1686. Abh. d. Königl. Ak. d. Wissenschaft. zu Berlin 1838. Berlin 1839. *(Ehrenb. Meteorp.)*

„ Die Infusionsthierchen als vollkommene Organismen. Leipzig 1838. *(Ehrenb. Infus.)*

„ Verbreitung und Einfluss des Mikroskopischen Lebens in Süd- und Nord-Amerika. Berlin 1843. *(Ehrenb. Verbr.)*

Grunow, A. Ueber die in Rabenhorst's Decaden ausgegebenen Süsswasser-Diatomaceen und Desmidiaceen von der Insel Banka. Beiträge zur näheren Kenntniss und Verbreitung der Algen; herausgegeben von L. Rabenhorst. Heft. II. Leipzig 1865. *(Grunow in Rabenh. Beitr.)*

Hassall, A. H. A History of the British Freshwater Algæ. London 1845. *(Hassall Brit. Alg.)*

Hobson, J. Notes on Indian Desmidieæ; Quarterly Journal of Micr. Science. Vol. III, new ser. London 1863. *(Hobson Notes)*.

Meneghini, J. Synopsis Desmidicarum hucusque cognitarum. Linnæa, Jahrg. 1840. Halle 1840. *(Menegh. Synops.)*.

Nägeli, C. Gattungen einzelliger Algen. Zürich 1849. *(Näg. Gatt. einzell. Alg.)*

Nordstedt, O. Bidrag till kännedomen om Sveriges Desmidieæ. Botaniska Notiser, utgifne af Th. M. Fries, 1868. Upsala 1868. *(Nordst. Bidrag)*.

„ Symbolæ ad floram Brasiliæ centralis cognoscendam, edit. Eug. Warming. Particula quinta. 18 Fam. Desmidiaceæ. Videnskab. Meddel. fra den Naturhist. Forening i Kjöbenhavn 1869, N:o 14—15. *(Nordst. Desmid. Brasil.)*

Perty, M. Zur Kenntniss kleinster Lebensformen. Bern 1852. *(Perty Kleinst. Lebensf.)*

Rabenhorst, L. Die Algen Sachsens et die Algen Europa's. Dresden 1850—1870. *(Rabenh. Alg. Eur.)*

„ Flora Europæa Algarum aquæ dulcis et submarinæ. sect. III. Lipsiæ 1868. *(Rabenh. Fl. Eur. Alg.)*

Ralfs, J. The British Desmidieæ. The drawings by E. Jenner. London 1848. *(Ralfs Brit. Desmid.)*

Reinsch, P. Die Algenflora des Mittleren Theiles von Franken. Nürnberg 1867. *(Reinsch Algenflora)*.

WALLICH, G. C. Description of Desmidiaceæ from Lower Bengal. Annals and Magazine of Natural History. Vol. V, ser. 3. London 1860. (*Wallich Desmid.*)

WITTROCK, V. B. Anteckningar om Skandinaviens Desmidiacéer. Nova Acta Reg. Societ. Sc. Upsal. ser. III, vol. VII. Upsala 1869. (*Wittr. Anteckn.*)

DESMIDIACEÆ Kütz.

(Synopsis Diatomearum, Linnæa 1833, pag. 591, mut. char., sec. Wittr. Anteckn.; De Bary Conjugat. pag. 70).

I. MICRASTERIAS Ag.

(Flora 1827, pag. 642, sec. Wittr. Anteckn.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 68).

1. M. JENNERI Ralfs (Brit. Desmid. pag. 76. tab. XI, fig. 1).
   Tab. I, fig. 1.
   Hab. in Smolandia ad Huseby (CLEVE) et Unnaryd.

* 2. M. ANGULOSA Hantzsch (in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1407, cum descriptione optima! Reinsch Algenflora pag. 147, tab. VIII, fig. 2; in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1654!)
   Long. 0,012″ = 305 μ; Lat. 0,0096″ = 244 μ.
   Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö.

Species inter *M. Jenneri* et *denticulatam* fere intermedia, sed illâ multo major et huic magis affinis. Figura a cl. REINSCH l. c. data typicam quidem formam non bene exprimit.

3. M. DENTICULATA Bréb. (Alg. Falaise, pag. 54, tab. VIII (1835), sec. Ralfs; Ralfs Brit. Desmid. pag. 70, tab. VII, fig. 1.)
   Hab. In Smolandia ad Huseby (CLEVE), Wirestorp, Räppe, Unnaryd et Femsjö. In Ostrogothia ad Bolltorp.

Forma capitulifera (Hantzsch in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1407) in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Unnaryd in Smolandia non rara est.

* 4. M. THOMASIANA Archer (Description 1862, pag. 239, tab. XII, fig. 1—5.)
   Long. 0,0082—88″ = 208—224 μ; Lat. 0,0079—82″ = 200—208 μ.
   Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Smolandia ad Wirestorp et Unnaryd.

Paullo major et præ longitudine latior est forma Succica quam Anglica; præterea angulos lobi polaris bidentatos et processus basales cellulæ a latere quoque visæ conniventes habet.

5. M. rotata (Grev.) Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 259, tab. VI, fig. 1, sec. Ralfs Brit. Desmid. pag. 71, tab. VIII, fig. 1; *Echinella rotata* Greville, in Hooker British Flora, vol. II (1830), pag. 398, sec. Ralfs).

Zygosporæ globosæ, aculeis elongatis, simplicibus ornatæ.

Diam. zygosp. (exclus. acul.) $0{,}0043'' = 108\ \mu$; Long. acul. $0{,}001'' = 25\ \mu$. — Tab. I, fig. 2.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia (c. zygosp.). In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Huseby (Cleve), Wirestorp, Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Zygosporæ, quas ad Bergsbrunna maturas multas inveni, illis *M. denticulatæ* Bréb. (quas maturas diametro circiter $0{,}0031'' = 80\ \mu$. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna inveni) majores sunt et simplicibus aculeis compluribus obsitæ.

Cl. Rabenhorst, quum huic speciei varietatem *M. denticulatam* (Fl. Eur. Alg. Sect. III. pag. 192) jungeret, ea, quæ de his speciebus inter se distinguendis Archero illo auctore rectissime (in Hedwigia II, pag. 114) disputavit, oblitus, errasse eo magis videtur, quod ad ea, quibus inter se diversas esse *M. denticulatam* et *rotatam* subtilissime contra cl. Wallich defendit planeque probavit cl. Archer (Description 1862, pag. 242 et seqq.); hoc accedit, quod maturæ zygosporæ illius aculeis furcatis, hujus vero *simplicibus* armatæ sunt.

Ad Bergsbrunna individua nonnulla inveni, quæ lobis et intermediis tantum bis dichotomis, angulis lobi polaris integris (non bifidis) et incisuris omnibus extrorsum multo amplioribus a forma typica differunt. Long. $0{,}0102'' = 260\ \mu$.; Lat. $0{,}0096'' = 244\ \mu$. Vide tab. I, fig. 3!

** 6. M. brachyptera nov. sp.

M. magna, circiter tertia parte longior quam latior, ambitu elliptica, profunde constricta, strictiuræ margine prosiliente rufescente, sinu acutangulo extrorsum ampliato; semicellulæ quinquelobæ, lobo polari extra lobos intermedios longe (dimidio) porrecto et ab iis sinu lato discreto, sursum sensim angustato, sed in apice protractis angulis truncatis biaculeatis paullum dilatato, margine terminali undulato-concavo quasi 2. tumoribus aculeo (sæpe) ornatis instructo, lobis intermediis et basalibus fere æquilatis abbreviatis*), sinu non tam profundo, paullum ampliato, inter se discretis, bilobulatis, lobulis sinu obtusangulo discretis, apice emarginato-bifidis, laciniis truncatis, binis (vel singulis) aculeis subtilibus incurvis armatis. Semicellulæ intra

*) Unde nomen specificum, quod ex Græco (βραχύς = brevis; πτερόν = ala) ductum est.

marginem ventralem et margines lobi polaris laterales serie aculeorum subtilium instructæ, e vertice visæ fusiformes, utroque fine mucronatæ; a latere visæ anguste ovatæ. Membrana punctata. Corporis crassitudo dimidium diametri transversalis (s. acul.). Lobus polaris (excl. acul.) sexta parte latior quam longior. Latitudo lobi polaris (s. acul.) tertia parte latitudinis corporis (s. acul.) paullo major.

Long. (s. acul.) 0,0079–84″ = 200 — 214 μ.; Lat. (s. acul.) 0,0055–59″ = 140—150 μ. Crass. 0,00285″ = 72 μ.; Lat. isthmi 0,0014″ = 36 μ.; Lat. lobi polaris (s. acul.) 0,0022–23″ = 56 — 58 μ. — Tab. I, fig. 4.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna et Noor in Uplandia; ad Nacka prope Holmiam. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Wirestorp et Femsjö.

Micr. apiculatæ (Ehrenb.) Menegh. maxime affinis species hæc mihi videtur, tamen admodum insignis et ab illa satis est superque distincta nec, quamvis superficie aculeis nonnullis subtilissimis ornata, forma *M. apiculatæ* non satis evoluta habenda est.

7. M. APICULATA (Ehrenb.) Menegh. (Synops. pag. 216; *Euastrum apiculatum* Ehrenb. Infus. pag. 167, tab. XII, fig. 2.*))

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Räppe, Wirestorp, Femsjö.

8. M. FIMBRIATA Ralfs (Brit. Desmid. pag. 71, tab. VIII, fig. 2.)

Hab. ad Nacka prope Holmiam. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Wirestorp et Femsjö.

9. M. RADIOSA Ralfs (Brit. Desmid. pag. 72, tab. VIII, fig. 3; non Ag. Flora, nec *Echinella radiosa* Lyngb., sec. Nordst. Desmid. Brasil. pag. 223 (185)).

β ORNATA Nordst. (l. c. tab. II, fig. 11).

Hab. ad Räppe, Svenarum et Femsjö in Smolandia.

Aculeis tantum et membranâ punctatâ cum forma Brasiliensi, cetero cum Anglica congruit forma Smolandica.

Individua ad Räppe inventa magnitudine (Long.= Lat. 0,01″ =260 μ.) species maximas hujus generis æquant.

10. M. PAPILLIFERA Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 72, tab. IX, fig. 1.)

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Wirestorp, Räppe, Unnaryd et Femsjö.

---

*) E. "*aculeatum*" in tab. cit. nominatur, sed vitio typographico, quod in contextu emendatum est.

** 11. M. CONFERTA nov. sp. (*M. crenata* Cleve Bidrag pag. 487).

M. parva, diametro paullo longior, late elliptica, sinu profundo, lineari angustissimo; semicellulæ quinquelobæ, lobis omnibus et lobulis confertis, sinu lineari angustissimo inter se discretis, lobo polari subcuneato e basi angusta magis magisque dilatato, lateribus concavis, dorso convexo, sed in medio rotundato-emarginato, margine angulos obtusiusculos versus binis vel ternis papillis minutis instructo, lobis lateralibus fere æquilatis, sinu non admodum profundo discretis, in lobulos binos fissis, lobulis modo non, modo leviter emarginatis, margine papillis 2—4 minutis ornatis; semicellulæ a vertice visæ oblongo-lanceolatæ, utroque fine papilla instructæ; a latere visæ oblongæ, paullum infra medium leviter constrictæ, apice late rotundato papillis 3 instructæ. Membrana punctata, sæpe rufescens. Crassitudo vix tertia pars latitudinis corporis. Latitudo lobi polaris dimidio diametri transversalis corporis paullulo major. Lobus polaris apice fere duplo latior quam basi.

Long. 0,0033—34″ = 84 — 87 μ; Lat. 0,0029—30″ = 74 — 78 μ; Crass. 0,0009″ = 23 μ; Lat. isthmi 0,00063″ = 16 μ; Lat. lob. pol. 0,00157—173″ = 40 — 44 μ. — Tab. I, fig. 5.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Wirestorp et Femsjö.

Forma ipsa cellulæ elliptica et magnitudine ad *Micr. crenatam* Ralfs nonnihil accedit hæc species; sed tum aliis characteribus, tum imprimis lobis polaribus dorso omnino convexis, tamen in medio dorso semper emarginatis, ab illa difficilis non est ad distinguendum. *Micr. papilliferæ* Bréb. autem maxime est affinis, sed ab illa satis differre mihi videtur, tum iisdem rebus, quibus cum *M. crenata* quodammodo congruit, tum apice lobi polaris omnino convexo et latiore, tum lobis omnibus et lobulis confertissimis et his non bifidis, tum denique papillis ad incisuras primarias prorsus nullis.

Huc pertinere videtur forma illa, de qua cl. BULNHEIM (in Hedwigia II, pag. 57, tab. X, fig. 4) mentionem facit.

12. M. CRUX-MELITENSIS (Ehrenb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 73, tab. IX, fig. 3; *Euastrum Crux-Melitensis* Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1831, pag. 82, ex parte).

Hab. ad Wirestorp, Räppe et Unnaryd in Smolandia.

13. M. FURCATA Ralfs (Brit. Desmid. pag. 73, tab. IX, fig. 2, non Ag.)

Hab. in Smolandia ad Wirestorp, Räppe, Unnaryd et Femsjö.

Specimina Räppensia admodum sunt speciosa: Long. 0,0087″ = 220 μ; Lat. 0,008″ = 205 μ. Long. process. lobi pol. 0,00209″ = 53 μ.

14. M. Americana (Ehrenb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. XIX ("Errata and addenda"!), *(M. morsa)* pag. 74, tab. X, fig. 1; *Euastrum Americanum* Ehrenb. Verbr. pag. 125, tab. IV, fig. 15.)

Hab. in Smolandia ad Räppe, Svenarum et Femsjö.

* 15. M. Mahabuleshwarensis Hobson (Notes pag. 168, c. Icone; *M. morsa*, var. δ. Wallich Desmid. pag. 277, tab. XIII, fig. 10.)

Semicellulæ tumore basali, ut in specie sequenti, instructæ.

Long. 0,0067–87″ = 170 — 220 μ; Lat. 0,0063–75″ = 160 — 190 μ. — Tab. I, fig. 6.

Hab. ad Räppe et Femsjö in Smolandia. Ad Lyckeby in Blekingia (Cleve).

Omnibus his locis, sicut in Bengalia, nisi in amnibus inventa non est.

* 16. M. Wallichii Grunow (in Rabenh. Beiträge pag. 14, tab. II, fig. 21; Rabenh. Alg. Eur. N:o 1727!)

Long. 0,0088″ = 224 μ; Lat. 0,0082″ = 208 μ.

Hab. ad Räppe et Svenarum in Smolandia.

Individui ad Svenarum inventi lobus polaris alter eo fuit abnormis, quod in 6 processus, binos laterales, intermedios duos parvos, erat divisus.

Nulla alia re nisi lobis basalibus trifidis hæc species a *M. Mahabuleshwarensi* differt.

17. M. pinnatifida (Kütz.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 77, tab. X, fig. 3; *Euastrum pinnatifidum* Kütz. Phycologia Germ., pag. 134, sec. Ralfs).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Räppe, Svenarum, Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

18. M. incisa (Bréb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 211; *Euastrum incisum* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 216; *Euastrum Crux-Melitensis* Ehrenb. Infus. tab. XII, fig. 3. c.)

Long. 0,0021″ = 54 μ; Lat. 0,0022″ = 56 μ; Lat. lobi polaris 0,0015″ = 38 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Unum tantum individuum a me inventum est; quod angulis inferioribus (non superioribus, ut in var. *excisa* Nordst. Desmid. Brasil., pag. 219 (181), tab. II, fig. 12) loborum basalium incisura obtusangula bidentatis a forma typica paullum differt.

* 19. M. decemdentata Näg. (*Euastrum* (Micrast.) *decemdentatum* Nägeli Gatt. Einzell. Alg. pag. 123, tab. VI, H, fig. 2; non Cleve Bidrag pag. 487, tab. IV, fig. 2; *M. Itzigsohnii* A. Braun in Bréb. Liste, pag. 121, tab. I, fig. 2.)

** β Upsaliensis nov. var., Cleve mscr.

Var. magis ad formam Gallicam et Germanicam quam ad Helvetiacam accedens differt lobis basalibus extrorsum nec dilatatis nec angustatis, apice non tam profunde emarginato-bifidis, lobulis inferioribus paullo latioribus, truncatis, angulis papillato-aculeatis, superioribus angulo inferiori papillato-aculeatis, superiori obtusis; membrana subtiliter granulato-punctata.

Long. 0,00205″ = 52 μ; Lat. = Long.; Lat. lobi pol. 0,0014″ = 36 μ. — Tab. I, fig. 7.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam copiose, ubi cl. P. T. Cleve detexit.

Loco eodem individua nonnulla inventa sunt, quorum altera semicellula huc pertinet, altera ad formam, a cl. Hassall (Brit. Alg. tab. XC, fig. 3) delineatam. Cfr. *M. pinnatifidæ* var. Bulnheim (in Hedwigia II, pag. 57, tab. X, fig. 5)!

20. M. truncata (Corda) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 75, tab. X, fig. 5 b; *Cosmarium truncatum* Corda Alman. de Carlsbad, 1835, sec. Ralfs).

Hab. ad Huseby (Cleve), Wirestorp, Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Forma ad *M. truncatam β. quadratam* Bulnh. (in Hedwigia, tab. IX, fig. 5) prope accedens, sed fere circularis, ad Bolltorp in Ostrogothia frequens, in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia rara est. Long. 0,00425″ = 108 μ; Lat. 0,00386″ = 98 μ.

Micr. decemdentatam Cleve (Bidrag pag. 487, tab. IV, fig. 2), quæ nihil aliud est, quam varietas *Micr. truncatæ*, formâ loborum lateralium et sinu, quo lobus polaris a lateralibus est discretus, rotundato, ad *M. depauperatam* Nordst. (Desmid. Brasil., pag. 222 (184), cum Icone) accedens, ad Bergsbrunna inveni.

II. EUASTRUM Ehrenb.

(Abh. d. Berl. Ak. 1831, pag. 82, mut. char; Ralfs Brit. Desmid. pag. 78).

1. E. verrucosum Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 247; Ralfs Brit. Desmid. pag. 79, tab. XI, fig. 2).

Hab. in Smolandia ad Huseby (Cleve), Räppe, Unnaryd et Femsjö.

Forma minor lobulis basalibus apice incurvis, conniventibus.

Long. 0,00315″ = 80 μ; Lat. 0,0028″ = 72 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam in stagno æstate fere tota exsiccato.

** β. rhomboideum nov. var.

Var. semicellulis subtriangularibus, integris vel paullo infra apicem

utrimque processu brevi, rotundato (quasi lobulo) instructis, e basi lata in apicem paullum productum, late leviterque emarginatum, subito angustatis, lateribus rectis; a vertice visis medio ventricosis, sub apice utroque, paullum producto, utrimque tumore instructis; a latere visis subovatis, apice non dilatatis, sed angustatis.

Long. 0,0043″ = 110 μ; Lat. 0,0042″ = 107 μ; Crass. 0,0022″ = 57 μ. — Tab. I, fig. 8.

Hab. ad Räppe in Smolandia.

Insignis et a forma α habitu ipso diversa quidem hæc varietas, sed propria species habenda meo judicio vix est, nam specimina formæ α in Smolandia persæpe sunt a me inventa, quæ a vertice et a latere visa ad varietatem nostram prope accedunt.

2. E. pectinatum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 86, tab. XIV, fig. 5.).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Unnaryd, Svenarum et Räppe in Smolandia.

Forma lobo polari breviori, minus dilatato, lobis lateralibus margine integris, angulis cellulæ omnibus subcapitellatis. Long. 0,0024″ = 60 μ; Lat. 0,00165″ = 42 μ; Lat. lobi pol. 0,0012″ = 30 μ. — Tab. I, fig. 9.

Hab. ad Huseby (Cleve) et Unnaryd in Smolandia.

3. E. gemmatum Bréb. (in Kütz. Phycol. Germ., pag. 134, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 87, tab. XIV, fig. 4.).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp. Ad Lyckeby in Blekingia (Cleve).

4. E. oblongum (Grev.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 80, tab. XII; *Echinella oblonga* Greville in Hooker Brit. Fl. vol. II, pag. 398, sec. Ralfs).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp, c. zygosp. In Smolandia ad Unnaryd. In Blekingia ad Hoby (Cleve).

Forma a me inventa a fig. cit. differt numero et dispositione tumorum basalium et cum forma a cl. Cramer in Hedwigia (sub nomine *E. oblongiformis*) tab. XII, fig. 3. delineata congruit.

5. E. crassum (Bréb.) (*Cosmarium crassum* in Menegh. Synops. pag. 222, pro parte).

Diagnosis a cl. Brébisson (et ab aliis auctoribus) data justo latius patet, quare hæc nova descriptio ad specimina Suecica delineata est:

E. maximum, diametro circiter duplo longius; semicellulæ subquadratæ, tumoribus ternis basalibus ornatæ, trilobæ, lobo polari valde dilatato,

apice inciso-bifido, a vertice viso quadrilobulato, a lateralibus sinu profundo angusto discreto, lateralibus plus minus retusis, margine processu brevi rotundato sæpe instructis (= var. *appendiculatum* Bréb.), subbilobulatis, lobulis obtusis, superioribus adscendentibus et a latere bifidis; semicellulæ a vertice visæ subellipticæ, utrimque tumore præditæ, apicibus paullum rotundato-productis; a latere visæ pyramidales. Membrana punctata.

Long. 0,0075″ = 190 μ; Lat. 0,004″ = 102 μ; Crass. 0,0028″ = 72 μ. — Tab. I, fig. 10.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

In Rabenh. Alg. Eur. N:o 1226 hanc ipsam formam dedit beat. BULNHEIM.

** β SCROBICULATUM nov. var.

Var. paullo minor quam forma α, apices versus sensim attenuata; semicellulæ præter tumores 3. basales in centro scrobiculis singulis vel binis instructæ, lateribus rectis; e vertice conspectæ subquadratæ, apicibus paullum rotundato-productis; a latere visæ apice attenuatæ.

Long. 0,0063″ = 160 μ; Lat. 0,003″ = 76 μ; Crass. 0,002″ = 51 μ. — Tab. II, fig. 1.

Hab. ad Nacka prope Holmiam; in "Lassby backar" prope Upsaliam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Huseby (CLEVE) in Smolandia.

A basi visa var. ad *E. quadriceps* Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 216 (178), tab. II, fig. 5) prope accedit.

Quamvis et numero tumorum et habitu variet hæc species (cfr inter se figuras a nobis infra datas et eas quas cl. RALFS in Brit. Desmid. tab. XI, fig. 3 a, b dedit!), tamen a sequenti, quæ cum hac confusa ab auctoribus esse commixtaque videtur, imprimis angulis (lobulis) loborum lateralium superioribus a latere bifidis (vide infra tab. I, fig. 10 c et tab. II, fig. 1 c!) optime est distincta.

** 6. E VENTRICOSUM nov. sp.

E. magnum, diametro dimidio longius, ambitu subellipticum, medio profunde constrictum, sinu angusto lineari; semicellulæ basi valde dilatatæ, trilobæ, lobo polari abbreviato, sursum subito dilatato, inciso-bifido, inter laterales insinuato, e vertice quadrilobulato, lateralibus sinu profundo latissimo bilobulatis, lobulis superioribus obtusis, adscendentibus et a latere visis integris (non bifidis), inferioribus subtriangularibus, prominentibus; semicellulæ tumoribus basalibus ternis, binis submedianis et in lobo polari binis instructæ, e vertice visæ anguste ellipticæ, utrimque gibberibus quinis ornatæ; a latere visæ sursum sensim angustatæ, utrimque tumore præditæ, apice subtruncato fere capitato-dilatatæ. Latitudo lobi polaris crassitudinem corporis fere æquans. Membrana punctata.

Long. 0,0041″ = 105 μ; Lat. 0,0026–27″ = 66—69 μ; Crass. 0,00157″ = 40 μ. — Tab. II, fig. 2.

Hab. ad Unnaryd in Smolandia.

Huc pertinet fortasse *E. crassum* β. (Ralfs Brit. Desmid. tab. XI, fig. 3 e, f), quæ var., quum formâ α. et minor esset et semicellulas basi magis dilatatas lobosque laterales profundius retusos haberet, ab illa secernenda propria species cl:o Brébisson visa quidem est; sed, quum nec e fig. cit. Ralfsii nec e descriptione dijudicari possit, integrine sint, an bifidi anguli (lobuli) loborum lateralium superiores a latere visi, qui characterem specificum, si non unum et solum, at tamen optimum nostro quidem judicio præbent, dubium est, utrum ad *E. crassum* (Bréb.), an ad nostram speciem var. illa referenda sit.

7. E. pinnatum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 81, tab. XIII, fig. 1).

Hab. ad Huseby (Cleve) et Unnaryd in Smolandia. In Ostrogothia ad Bolltorp.

Forma a me inventa paullum differt tumoribus minoribus basalibus tantum ternis, tumore inter lobos intermedios deficiente et lobis intermediis (ut in *E. oblongo*) apice sæpius emarginatis (et a latere bifidis differt, si quidem forma Anglica integros habet, quod e fig. cit. videri non licet).

8. E. humerosum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 82, tab. XIII, fig. 2).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Unnaryd in Smolandia.

9. E. affine Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 191, tab. VII, fig. 3, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 82, tab. XIII, fig. 3).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia. In Blekingia ad Lösen (Cleve).

10. E. ampullaceum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 83, tab. XIII, fig. 4).

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Huseby (Cleve) et Unnaryd in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

11. E. Didelta Ralfs (Brit. Desmid. pag. 84, tab. XIV, fig. 1).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd et Femsjö. In Blekingia ad Lösen (Cleve).

*12. E. cuneatum Jenner (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 90, tab. XXXII, fig. 3).

Long. 0,00378–394″ = 96—100 μ; Lat. 0,00185–197″ = 47—50 μ; Lat. isthmi 0,0005″ = 13 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Formâ Anglicâ Suecica sexta parte minor est et apicibus angustior. Illam nihil esse fortasse, nisi varietatem *E. crassi*, cl. Ralfs (l. c.) suspicatur, hæc vero *E. ansato* Ehrenb. proxima nostro quidem judicio est.

13. E. ANSATUM Ehrenb. (Infus. pag. 162, tab. XII, fig. 6; Ralfs Brit. Desmid. pag. 85, tab. XIV, fig. 2).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Forma tumoribus (magis conspicuis) in utraque semicellula ternis basalibus, supra basin binis et in lobo polari binis instructa (= *E. circulare* Hass. Brit. Alg. pag. 383, tab. XC, fig. 5).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

Variat hæc species tumoribus plus minus distinctis; e fig. 2 d. (Ralfs l. c.), quacum *E. circulare* Hass. a latere visum perfecte congruit, videri licet, tumores in *E. ansato* Ehrenb., quamvis in cellula a fronte visa sæpe minus conspicuos, tamen prorsus nullos non esse.

14. E. SINUOSUM Lenorm. (in Herb. (1845), sec. Ralfs; Archer in Pritch. Infus. pag. 729; *E. circulare* β. (*non* α.) Ralfs Brit. Desmid. pag. 85, tab. XIII, fig. 5, a, b, d, tab. XIV, fig. 3, b, c (*non* a.); *E. circulare* var. *Falesiensis* Bréb. Liste pag. 122).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd et Femsjö.

In "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia specimina nonnulla a nobis inventa sunt, quæ punctis ocellatis (scrobiculis) senis (primo vultu spiciem tumorum præ se ferentibus) inter tumores illos quinos basales interpositis ad *E. circulare* γ. Ralfs (l. c. tab. XIII, fig. 5 c; *E. Jenneri* Archer l. c. pag. 730) prope accedunt. Num tumoribus undenis, an potius punctis ocellatis, i. e. scrobiculis (speciem tumorum præ se ferentibus) præditæ sunt semicellulæ varietatis illius γ? Vide fig. cit. RALFSII!

A priori hæc species differt lobis basalibus magis distinctis et sinuatis et imprimis lobo polari (oblique) a vertice viso plus minus distincte quadrilobulato (vide Ralfs l. c. tab. XIV, fig. 3 c!), a latere truncato et a fronte dilatato, quare ad *E. circulare* Hass. (quod nihil est, nisi forma *E. ansati* Ehrenb.) a cl. RALFS jure relata esse nobis quidem non videtur.

**15. E. INERME nov. sp. (*E. elegans* β. *inerme* Ralfs Brit. Desmid. pag. 89, tab. XIV, fig. 7 e.).

E. submediocre, diametro subduplo longius, ambitu subellipticum, incisura mediana profunda, angustissima; semicellulæ subtriangulares, sursum angustatæ, apice paullum protracto truncatæ et profunde inciso-bifidæ, sed non dilatatæ nec dentibus munitæ, martine utroque laterali biundulatæ undulis inferioribus prominulis, obtusis, angulis inferioribus oblique truncatis; semicellulæ ad basin tumoribus ternis (lateralibus vix conspicuis), paullo supra binis et inter eos puncto ocellato instructæ, tumoribus omnibus minutis; e vertice visæ subellipticæ lateribus bigibbis; a latere visæ ovatæ. La-

titudo apicis semicellulæ triens diametri longitudinalis corporis. Membrana subtiliter punctata.

Long. 0,0022″ = 56 μ; Lat. 0,00126—138″ = 32—35 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ; Crass. 0,00083″ = 21 μ. — Tab. II, fig. 3.

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd; utroque loco rarissime.

E. sinuoso Lenorm. et *ansato* Ehrenb. affine ab *E. eleganti* (Bréb.) Kütz. differt tumoribus lateribusque cellulæ e vertice visæ bigibbis, dentibus autem subapicalibus tumoreque centrali granulato nullis.

16. E. INSIGNE Hass. (Brit. Alg. pag. 21, tab. XLI, fig. 2; Ralfs Brit. Desmid. pag. 83, tab. XIII, fig. 6).

Hab. ad Nacka prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

17. E. INTERMEDIUM Cleve (Bidrag pag. 484, tab. IV, fig. 1).
Tab. II, fig. 4.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp.

Ad characteres, quibus CLEVE hanc speciem l. c. determinavit, id quoque accedere docet NORDSTEDT (Desmid. Brasil. pag. 217 (179)), quod lobus polaris e vertice visus bilobulatus sit (in *E. insigni* Hass. autem quadrilobulatus); varietas igitur *E. insignis*, ut cl. RABENHORST (Fl. Eur. Alg. Sect. III, pag. 184) putat, nullo modo est habendum *E. intermedium*. Vide figuram nostram!

18. E. ROSTRATUM Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 192, tab. VII, fig. 5, sec. Aut.; Brit. Desmid. pag. 88, tab. XIV, fig. 6).

Hab. ad Holmiam (CLEVE). Ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö et Svenarum in Smolandia. In Blekingia ad Lösen (CLEVE).

**19. E. DIVARICATUM nov. sp.

E. parvum, quarta parte longius quam latius, profundissime constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ subtriangulares, e basi lata gradatim et valde angustatæ, paullo supra basin tumore granulato depresso et ad marginem tuberculis nonnullis minutis ornatæ, trilobæ, lobo polari brevi, non dilatato, a lateralibus sinu subrectangulo discreto, incisura ampliata profunde bilobulato, lobulis apice truncatis, in angulo exteriore aculeo brevi instructis, lobis lateralibus sinu amplo bilobulatis, lobulis superioribus verticalibus subrectangulis, inferioribus prominentibus, in aculeum brevem extrorsum directum subito attenuatis; semicellulæ e vertice visæ anguste ellipticæ, medio utrimque granulato-dentatæ, apicibus dente munitis; a latere visæ ovatæ, ad basin utrimque granulato-dentatæ, apice acuminatæ. Latitudo lobi polaris dimidium diametri transversalis corporis.

Long. 0,0016–18″ = 40—45 μ; Lat. 0,00126–14″ = 32—36 μ; Lat. isthmi 0,00028″ = 7 μ; Crass. 0,00075″ = 19 μ. — Tab. II, fig. 5.

Hab. inter sphagna in "Wahlenbergs sjö" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

Hanc speciem, cum *E. rostrato* Ralfs, quod ad formam cellulæ a vertice et a latere visæ et ad ornatum membranæ (exceptis scilicet aculeis) attinet, valde congruentem, in America boreali cl. CLEVE primus invenit.

E. elegantulum Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 208, tab. XVI, fig. 7) a nostra specie differt lobulis inferioribus inermibus tumoreque centrali granulato nullo.

20. E. ELEGANS (Bréb.) Kütz. (Phycolog. German. pag. 135, sec. Aut; *Cosmarium elegans* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 222).

Forma α. (Ralfs Brit. Desmid. pag. 89, tab. XIV, fig. 7 a—c).

Hab. ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

β. SPINOSUM Ralfs (l. c. fig. 7 f, i, k).

Hab. ad Unnaryd in Smolandia, rarissime.

**21. E. EROSUM nov. sp.

E. parvum, diametro subduplo longius, profunde constrictum, sinu lineari angusto, extremo ampliato; semicellulæ subhexagonæ, apicem versus paullum attenuatæ, lateribus medio processu brevi rotundato (quasi lobulo) instructis, apice subtruncato leviter emarginatæ, angulis superioribus obtusis, inferioribus subito rotundatis; e vertice visæ subrectangulares lateribus leviter convexis, utroque fine late truncatæ et subtiliter 3-crenulatæ; e latere conspectæ quadraticæ, apice paullum producto et angustato truncatæ et obsolete 3-crenulatæ. Membrana glabra. Crassitudo duæ partes latitudinis corporis.

Long. 0,0015″ = 39 μ; Lat. 0,0009″ = 23 μ; Crass. 0,00063″ = 16 μ; Lat. isthmi 0,00033″ = 8,5 μ; Lat. marg. termin. 0,00055″ = 14 μ.

Tab. II, fig. 6.

Hab. in aqua pluviali in colli inter Upsaliam et Vaksala sito.

Ab *E. eleganti* (Bréb.) Kütz., *binali* (Turp.) Ralfs et *inermi* nov. sp., cujus habitu fere est a fronte visum, differt tumoribus nullis, apicibus emarginatis, non inciso-bifidis, a vertice autem et a latere visum apicibus truncato-crenulatis.

22. E. BINALE (Turp.) Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 193, sec. Ralfs; *Heterocarpella binalis* Turp. Dict. des Sc. Nat. 1820, sec. Aut.).

Hæ formæ a me inventæ sunt:

a.) Forma minuta, ad *E. emarginulum* Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 209, tab. XVI, fig. 8) valde accedens (Ralfs Brit. Desmid. tab. XIV, fig. 8 a).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

b.) Forma apicibus leviter emarginatis, semicellulis basi ventricosis, integris (Ralfs l. c. fig. 8 b).

Long. 0,0009″ = 23,5 μ; Lat. 0,0007″ = 17,5 μ; Lat. isthmi 0,00018″ = 4,5 μ.

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Femsjö in Smolandia.

c.) Forma lobis basalibus sinuato-bilobulatis (Ralfs l. c. fig. 8, c, d), ad *E. lobulatum* Bréb. (Liste pag. 124, tab. I, fig. 4) accedens.

Hab. ad Lösen in Blekingia (Cleve). Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

d.) var. β. Ralfs (l. c. fig. 8 f).

Hab. ad Unnaryd in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

e.) **γ. elobatum nov. var.

E. parvum, vix tertia parte longius quam latius, hexagonum, incisura mediana profundissima, angusta; semicellulæ trapezicæ, sursum sensim angustatæ, in apice late truncato quam levissime emarginatæ, angulis superioribus rectis, lateribus leviter biundulatis, in centro verruca instructæ; e vertice visæ anguste ellipticæ, apicibus obtusiusculis, in utroque latere verruca ornatæ; e latere visæ ellipticæ.

Long. 0,0011″ = 28 μ; Lat. 0,0008″ = 20,5 μ; Crass. 0,00043″ = 11 μ; Lat. isthmi 0,00016″ = 4 μ; Lat. marg. term. 0,00057″ = 14,5 μ.

Tab. II, fig. 7.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

23. E. lobulatum Bréb. (Liste pag. 124, tab. I, fig. 4).

Hab. ad Noor in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

24. E. venustum Bréb. (Liste pag. 124, tab. I, fig. 3).

Semicellulæ in centro puncto ocellato præditæ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Svenarum in Smolandia.

Formam minorem margine terminali recto (*Didymidium* (Cosm.) *Brauni*, *forma A.*, γ. *Meneghinii* Reinsch Algenflora pag. 114, tab. X, fig. 3, d), sed ad genus *Spondylosium* individuis ad 7 in catenulam fragilem conjunctis prope accedentem, una cum *E. venusto* stagna sphagnosa habitantem ad Unnaryd inveni. Long. 0,00083–94″ = 21—24 μ; Lat. 0,0006–67″ = 15—17 μ.

**25. E. crassicolle nov. sp.

E. parvum, diametro duplo longius, non admodum profunde constrictum, sinu lineari angustissimo, a latere visum oblongum, apicibus protractis

truncatis, lateribus quadriundulatis; semicellulæ sursum leviter attenuatæ, trilobæ, lobis lateralibus brevibus, leviter sinuato-bilobulatis, lobo polari lato, subdilatato, apice emarginato subcordato, a lateralibus sinu lato rotundato discreto; e vertice visæ hexagonæ, utroque polo truncatæ, medio ventricosæ. Latitudo lobi polaris fere tertia pars, longitudo quadrans diametri longitudinalis corporis. Membrana .....?

Long. 0,0011″ = 28 μ; Lat. 0,00057″ = 14,5 μ; Lat. isthmi 0,00034″ = 8,5 μ; Crass. 0,00043″ = 11 μ; Lat. lobi pol. 0,00039″ = 10 μ.

Tab. II, fig. 8.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam. Ad Unnaryd in Smolandia; utroque loco rarissime.

Quum cellulas evacuatas invenire mihi non contigerit, dicere non possum, nec qualis sit membrana, nec qualis sint tumores (?), undulas cellulæ e latere visæ efficientes.

A fronte visum ad *E. venustum* Bréb. quodammodo accedit, sed a vertice et a latere visum longe est diversum, semicellulæ enim illius et e vertice et e latere conspectæ ellipticæ sunt.

III. COSMARIUM Corda.

(Alman. de Carlsbad 1835, sec. Aut., mut. char; Ralfs Brit. Desmid. pag. 91).

A. COSMARIUM (sensu strict.) nov. subgen. (gen. *Cosmarium* De Bary Conjugat. pag. 72, maxima ex parte).

Massa chlorophyllacea centralis; corpora chlorophyllacea singula vel bina, e nucleis amylaceis singulis radiantia. Zygosporæ plerumque aculeis vel muricibus ornatæ, globosæ, raro glabræ et globosæ vel angulatæ.

**1. C. ORTHOSTICHUM nov. sp.

C. submediocre, paullo longius quam latius, profunde constrictum, sinu angusto lineari; semicellulæ subellipticæ, utroque fine late rotundatæ, margine ventrali et medio dorsali recto, granulatæ, granulis in series 7—8 rectas*) verticales ordinatis; a vertice visæ ellipticæ, granulatæ, in centro punctatæ granulis nullis; a latere visæ circulares. Latitudo isthmi triens diametri transversalis corporis. Crassitudo duæ partes longitudinis cellulæ. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,00134—142″ = 34—36 μ; Lat. 0,0012—13″ = 30—33 μ; Crass. 0,00094″ = 24 μ; Lat. isthmi 0,00043″ = 11 μ. — Tab. II, fig. 9.

*) Inde nomen specificum (ὀρθός = rectus; στίχος = series vel ordo).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp.

A specie sequenti facile dignoscitur granulis acutiusculis (non verrucis depressis) in series verticales regulares ordinatis, semicellulis basi non reniformibus, multo minoribus et a vertice visis in centro nudis; præterea nuclei amylacei hac in specie singuli sunt, in sequente bini.

**β. PUMILUM nov. var.

Var. subduplo minor, tam longa quam lata, dorso leviter latissimeque convexa, granulis series 6 verticales et 3 horizontales efficientibus.

Long. 0,00085″ = 21,5 μ; Lat. 0,00079″ = 20 μ; Crass. 0,00055″ = 14 μ; Lat. isthmi 0,0003″ = 8 μ. — Tab. II, fig. 10.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

2. C. MARGARITIFERUM (Turp.) Menegh. (Synops. pag. 219; Ralfs Brit. Desmid. pag. 100, tab. XVI, fig. 2; *Ursinella margaritifera* Turp. Dict. des Sc. Nat. fig. 23 (1820), sec. Ralfs).

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Räppe et Femsjö. In Ostrogothia ad Bolltorp.

**3. C. QUADRUM nov. sp.

C. submagnum, circiter tam longum quam latum, profunde constrictum, sinu lineari angusto, subquadratum, apice utroque levissime retusum, lateribus subrectis, angulis latissime rotundatis, a latere visum utroque polo valde rotundatum, medio utrimque late excavatum; semicellulæ basi recta inter se contiguæ, angulis inferioribus subrectis, margine laterali crenato, dorsali dense crenulato; a vertice visæ oblongæ. Membrana dense verrucosa, verrucis fere in quincuncem ordinatis, series et longitudinales 17 rectas et oblique transversales paullum arcuatas efficientibus, in medio cellulæ a vertice visæ minoribus. Crassitudo corporis circiter dimidium diametri longitudinalis. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00287–307″ = 73—78 μ; Lat. 0,00276–284″ = 70—72 μ; Crass. 0,0015–158″ = 38—40 μ; Lat. isthmi 0,00114″ = 29 μ. — Tab. II, fig. 11.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

C. latum Bréb. α et β., *conspersum* Ralfs et nostra species, quæ similitudine quadam et habitus et magnitudinis conjuncta sunt, quibus characteribus inter se differant, hoc loco breviter exponere conabimur:

Longitudo cellulæ latitudine in *C. consperso* quarta usque tertia parte major est, in *C. lato* α. et β. autem sexta vel quinta parte major, in nostra specie vero vix duodecima parte latitudinem superat. Semicellulæ a fronte visæ in *C. consperso* et *lato* α. dorso plus minus convexæ sunt, in *C. lato* β. medio dorso truncatæ, in *C. Quadro* levis-

sime retusæ; a vertice autem visæ in *C. consperso* ellipticæ, in *C. lato* α.(?) et β. oblongo-ellipticæ, in *C. Quadro* oblongæ; angulos inferiores semicellularum *C. consper-sum* et *Quadrum* subrectos habent, *C. latum* α. et β. rotundatos. — Verrucæ, quæ in *C. Quadro* (17 series verticales efficientes) et imprimis in *C. lato* β. densiores sunt, quam in *C. consperso* (ubi series verticales 14 adsunt) et *lato* α., series in *C. consperso*, *lato* β. et *Quadro* verticales, in *C. lato* α. et *consperso* transversas paullum arcuatas, in *C. Quadro* et *lato* β. oblique transversas efficiunt. — Præterea *C. latum* β. a ceteris differt verrucis multo majoribus membranaque inter verrucas pellucido-punctata. *C. Quadrum* autem differt, quod verrucæ in medio cellulæ a vertice visæ multo minores et fere ad granulos reductæ sunt. *C. Quadrum* et *latum* β., *C. consperso* et *lato* α. paullo minora, magnitudine fere eadem sunt.

4. C. LATUM Bréb. (Liste pag. 128, tab. I, fig. 10).

**β. MARGARITATUM nov. var. (*C. latum* Wittr. Anteckn. pag. 12).

Var. paullo minor quam forma α; semicellulæ dorso, medio recto, altius convexæ, e vertice visæ oblongo-ellipticæ; verrucæ densissimæ, multo majores quam in forma α, in series distinctas regulares et verticales et oblique transversas ordinatæ. Membrana inter verrucas pellucido-punctata.

Long. 0,00315″ = 80 μ; Lat. 0,00268″ = 68 μ; Lat. isthmi 0,00078″ = 20 μ.

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

Puncta, quibus membranam instructam esse diximus, duplicia sunt, quam verrucæ et singulas sena circumstant.

5. C. CONSPERSUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 101, tab. XVI, fig. 4).

Hab. ad Nacka prope Holmiam. Ad Bergsbrunna in Uplandia.

Var. β. *rotundatum* Wittr. (Anteckn. pag. 13, fig. 4) admodum rara est et in formam α. transit.

6. C. BOTRYTIS (Bory) Menegh. (Synops. pag. 220; Ralfs Brit. Desmid. pag. 99, tab. XVI, fig. 1; *Heterocarpella Botrytis* Bory Dict. Class., tab VIII (1825), sec. Aut.).

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

*7. C. GEMMIFERUM Bréb. (Liste pag. 301; Archer in Pritch. Infus. pag. 733; Rabenh. Alg. Eur. N:o 1585).

Nuclei amylacei bini.

Long. 0,0028″ = 72 μ; Lat. 0,0022–23″ = 56—58 μ; Crass. 0,00138″ = 35 μ; Lat. isthmi 0,00063″ = 16 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

8. C. tetraophthalmum (Kütz.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 98, tab. XVII, fig. 11; *Heterocarpella tetraophthalma* Kütz. Synops. Diat. in Linnæa 1833, pag. 597, fig. 87, sec. Ralfs).

Forma verrucis minoribus, in apice semicellulæ nullis, membrana dense granulato-punctata.

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

9. C. Brebissonii Menegh. (Synops. pag. 219).

Nuclei amylacei bini.

Long. 0,0022″ = 56 μ; Lat. 0,002′ = 51 μ; Lat. isthmi 0,00063″ = 16 μ.

Hab. in "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Huseby (Cleve), Räppe, Unnaryd, Femsjö et Wirestorp.

Forma Gallica, a Meneghini l. c. descripta, quæ ab Anglica, a cl. Ralfs (Brit. Desmid. pag. 100, tab. XVI, fig. 3) delineata, "cellulis" (= semicellulis) "a latere formam trapezii præ se ferentibus, superficie granulato-margaritacea" (vide Menegh. Synops. l. c!) nonnihil differre videtur, apud nos admodum vulgaris est et in formam, semicellulis subtrapezicis membranaque muricibus conicis ornata ad Anglicam prope accedentem, formis intermediis nonnumquam transit.

10. C. Ungerianum Näg. (*Euastrum* (Cosm.) *Ungerianum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 120, tab. VII, A, fig. 10).

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna et Noor in Uplandia.

**11. C. trachypleurum nov. sp.

C. mediocre, diametro quarta parte longius, profunde constrictum, sinu intimo lineari angusto, extremo ampliato; semicellulæ subreniformes, medio dorso truncatæ et nudæ, intra marginem exteriorem et in ipso margine utroque laterali verrucis acute conicis in series perphericas subdispositis munitæ*), in centro verrucis 7 (6 perphericis, 1 centrali) majoribus depressis et inter verrucas punctis nonnullis rufescentibus ornatæ; a vertice visæ ellipticæ, medio utrimque verrucis ternis truncatis ornatæ, intra marginem et in utroque polo verrucis acute conicis instructæ, in centro nudæ; a latere visæ circulares. Membrana subtiliter punctata, fascia connexiva minus distincta Latitudo isthmi quadrans diametri longitudinalis corporis. Crassitudo circiter duæ partes latitudinis cellulæ. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00197″ = 50 μ; Lat. 0,00158″ = 40 μ; Lat. isthmi 0,00048′ = 12,3 μ; Crass. 0,0011″ = 28 μ. — Tab. II, fig. 12.

*) Unde ductum est nomen specificum (τραχύς = asper; πλευρά = latus).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Inter formam genuinam *Cosmarii Brebissonii* Menegh. et *Cosm. urnigerum* Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 208 (170), tab. III, fig. 21) nostra species fere intermedia esse videtur.

**12. C. QUINARIUM nov. sp.

C. submediocre, subhexagonum, circiter quarta parte longius quam latius, incisura mediana profunda lineari; semicellulæ subtrapezicæ, sursum valde angustatæ, dorso subtruncatæ, lateribus subconvexis, angulis inferioribus obtusis, margine obsolete granulato-dentatæ, ad marginem serie granulorum acutorum præditæ, in centro obtusis granulis 5, in series 2 transversas ordinatis, instructæ et inter eas pellucido-punctatæ; e vertice visæ ellipticæ, granulatæ, in centro granulis nullis; a latere visæ circulares, utrimque ternis granulis ornatæ. Corporis crassitudo duæ partes diametri transversalis. Latitudo marginis terminalis fere dimidium latitudinis cellulæ. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00154–165″ = 39—42 μ; Lat. 0,0013–136″ = 33—34,5 μ; Crass. 0,00086″ = 22 μ; Lat. isthmi 0,00037′ = 9,5 μ. — Tab. II, fig. 14.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia.

Habitu fere est *Cosm. cruciati* Bréb. (Liste pag. 129, tab. I, fig. 14), sed differt nucleis amylaceis (quantum videre mihi quidem licuerit) non cruciatim dispositis et semicellulis non perfecte trapezicis nec granulis minutis ubique obsessis, sed intra marginem serie granulorum et in centro seriebus binis transversis verrucularum ornatis.

13. C. ORNATUM Ralfs (in Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 392, tab. XI, fig. 3, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 104, tab. XVI, fig. 7).

Nuclei amylacei bini.

Long. 0,0014″ = 36 μ; Lat. = Long.; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ; Crass. (inclus. tumor.) 0,00087″ = 22 μ.

Hab. ad Bergsbrunna et Noor in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

Forma Suecica ab Anglica differt dorso minus (interdum non) producto granulisque in tumore centrali concentrice ordinatis, in centro autem semicellulæ a vertice visæ nullis.

Zygospora matura ad Unnaryd a me inventa, cum figura zygosporæ *C. margaritiferi*, a cl. RALFS (Brit. Desmid. tab. XXXIII, fig. 6, b) data, quum magnitudine, tum longitudine formaque aculeorum valde congruens, a zygospora *C. ornati*, quam RALFS (l. c. tab. XVI, fig. 7, e) delineavit, corpore ipso sphærico nec lobato aculeisque multo brevioribus differt.

*14. C. protractum Näg. (*Euastrum* (Cosm.) *protractum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 119, tab. VII, A, fig. 4; *non* Cleve Bidrag pag. 488).

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Räppe et Svenarum.

15. C. Turpinii Bréb. (Liste pag. 127, tab. I, fig. 11; *C. protractum* Cleve Bidrag pag. 488).

Forma tumoribus centralibus minutis binis (non, ut in forma Gallica, singulis). Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00284″ = 72 μ; Lat. 0,0026″ = 66 μ; Lat. isthmi 0,0007—75′ = 18—19 μ; Crass. 0,0014″ = 36 μ. — Tab. III, fig. 9.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (ubi Cel. Prof. J. E. Areschoug primus nostrum invenit). Ad Räppe et Svenarum in Smolandia.

**16. C. Quasillus nov. sp.

C. mediocre, hexagonum, paullo longius quam latius, profunde constrictum sinu lineari angusto, extremo ampliato; semicellulæ trapeziceæ, e basi lata recta subito angustatæ, lateribus subrectis, inferne subtiliter granulato-dentatis, superne undulatis, dorso paullum producto et levissime undulato truncatæ, angulis et superioribus et inferioribus obtuse rotundatis, tumore basali magno obovato, verruculis subconcentrice dispositis ornato, instructæ; a vertice visæ anguste ellipticæ, medio utrimque tumore verruculoso præditæ; a latere visæ utrimque tumore magno basali verruculoso ornatæ, apice late leviterque rotundatæ. Membrana granulata, granulis in series subregulares, radiantes (et concentricas) ordinatis, area parva circa tumorem basalem nuda. Latitudo dorsi producti dimidio diametro transversali corporis paullo minor. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,0026–31″ = 66—80 μ; Lat. 0,0024–29″ = 60—74 μ; Crass. (inclus. tumor.) 0,0017″ = 44 μ; Lat. isthmi 0,00069–83 = 17,5—21 μ.

Tab. III, fig. 10.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (Wittrock), ad Vaksala et prope Gottsunda in Uplandia.

A *Cosm. Turpinii* Bréb., cujus habitu fere est, apicibus cellulæ multo latioribus, productis, levissime undulatis, non retusis, lateribus undulatis nec retusis aliisque rebus nostra species satis est superque distincta.

17. C. Broomei Thwaites (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 103, tab. XVI, fig. 6).

Nuclei amylacei bini.(?)

Hab in "Kungsparken" prope Upsaliam. In Smolandia ad Wirestorp.

Zygosporæ hujus speciei glabræ sunt, sec. Ralfs (l. c. tab. XXXIII, fig. 7) et Archer (in Pritch. Infus. tab. I, fig. 7).

18. C. BIRETUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 102, tab. XVI, fig. 5).

Nuclei amylacei bini.

Hab. ad Noor in Uplandia. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Unnaryd in Smolandia.

Forma Suecica, Anglicâ tertia parte minor, lateribus nonnumquam leviter retusis tumoreque centrali minus distincto ad *C. porrectum* Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 207 (169), tab. III, fig. 28) quodammodo accedit.

**19. C. LATIFRONS nov. sp.

C. submediocre, tam longum quam latum, quadrangulare, modice constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ tetragonæ, duplo longiores quam latiores, e basi recta latiuscula subito dilatatæ, margine subtiliter granulato-dentatæ, dorso leviter latissimeque convexo, lateribus rectis vel levissime retusis, angulis superioribus obtusis, inferioribus obtusangulis, granulatæ, in centro granulis nullis sed tumore basali, minus elevato, seriebus granulorum verticalibus 3 ornato, instructæ; e vertice visæ ellipticæ, granulatæ, sed in centro granulis nullis, medio utrimque tumore parvo granulato præditæ; a latere visæ fere hexagono-orbiculares. Crassitudo cellulæ duæ partes latitudinis. Latitudo marginis basalis semicellulæ tres partes diametri transversalis corporis et latitudine isthmi subduplo major. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,00134—15″ = 34—38 μ; Lat. = Long.; Crass. 0,0009″ = 23,3 μ; Lat. isthmi 0,0006″ = 15 μ. — Tab. III, fig. 7.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam in vallicula sæpe inundata.

Nucleis amylaceis singulis, semicellulis sursum magis dilatatis, multo minoribus, non ubique nec tam dense granulatis, sed et a fronte et a vertice visis in centro granulis nudatis, a vertice visis e medio vix tumido utrumque polum versus sensim attenuatis, tumore basali, quamvis minus elevato, tamen distinctiore, isthmo denique ad latitudinem cellulæ multo latiore nostra species a *C. bireto* Bréb. facile dignoscitur.

*20. C. PUNCTULATUM Bréb. (Liste pag. 129, tab. I, fig. 16; *non* De Not. Elementi pag. 46, tab. IV, fig. 33).

Zygosporæ globosæ, verrucis apice 3—4-fidis obsessæ

Long. cellulæ 0,0009—0,0013′ = 23—33 μ; Lat. 0,00083—0,00′2″ = 21—30 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ; Crass. 0,00063″ = 16 μ; Diam. zygosp. s. verr. 0,0014″ = 36 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam. — Ad Unnaryd (c. zygosp.), Femsjö et Räppe in Smolandia.

**21. C. Wittrockii nov. sp.

C. parvum, tam longum quam latum vel paullo longius, profunde constrictum, sinu amplo subrectangulo; semicellulæ subellipticæ—semiellipticæ, dorso latissime leviterque convexæ vel truncatæ, utroque fine rotundatæ, ventre alte convexæ; a vertice conspectæ late ellipticæ; a latere visæ circulares. Membrana subtiliter granulata, granulis in series longitudinales, isthmo interruptas ordinatis. Crassitudo circiter duæ partes longitudinis cellulæ. Latitudo isthmi dimidium diametri transversalis corporis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,0007–86″ = 18—22 μ; Lat. 0,00059–83″ = 15—21 μ; Crass. 0,00048′ = 12,2 μ; Lat. isthmi 0,00029–35″ = 7,5—9 μ. — Tab. III, fig. 14.

Hab. in "Lassby backar" (ubi cl. V. B. Wittrock detexit) et in "Norby skog" prope Upsaliam.

Semicellulæ hujus speciei modo dorso leviter convexæ sunt et fere sesqui longiores quam latiores; modo dorso sunt truncatæ duploque longiores quam latiores et tum habitu *Staurastri striolati* (Näg.) Archer (Vide Nordst. Desmid. Brasil. tab. IV, fig. 45 a!) a fronte visi (excepto scilicet elongato isthmo) nostra species fere est.

**22. C. geminatum nov. sp.

C. parvum, tam longum quam latum, ambitu subquadratum, profunde constrictum, sinu acutangulo sensim ampliato; semicellulæ oblongæ, utroque fine truncato-rotundatæ, dorso latissime subtruncatæ, ventre subconvexæ, margine exteriore subtiliter granulato-dentatæ, ad utrumque polum et sub dorso granulatæ, in centro tumoribus binis minutis quadrifidis (quadrigranulatis) et infra eos ad isthmum granulis ternis ornatæ; a vertice visæ ambitu ellipticæ, medio utrimque verrucis binis emarginatis instructæ, in apice utroque et sub apice sinuato-denticulatæ, intra marginem seribus 2 subconcentricis granulorum ornatæ, in centro glabræ; a latere visæ fere hexagono-orbiculares, dorso truncatæ, latere utroque denticulatæ et verruca emarginata instructæ. Latitudo isthmi triens, crassitudo duæ partes diametri transversalis corporis.

Long. 0,00094—0,00106″ = 24—27 μ; Lat. 0,00098—0,0011″ = 25—28 μ; Crass. 0,00069″ = 17,5 μ; Lat. isthmi 0,00031–34″ = 8—8,7 μ. — Tab. III, fig. 8.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam, rarissime.

Species admodum insignis!

*23. C. Regnesi Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *Regnesi* Reinsch Algenflora pag. 112, tab. VII, fig. 8).

Hab. ad Räppe in Smolandia.

**24. C. monomazum nov. sp.

C. submediocre, circiter tam longum quam latum, profunde constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ fere hexagono-ellipticæ, dorso, medio truncato, convexæ, margine dorsali et laterali subtiliter crenulatæ, crenulis 16*), margine suprabasali integræ et oblique truncatæ, sed ad sinum medianum utrimque papillula instructæ, in centro papilla ornatæ**); a vertice visæ anguste ellipticæ, medio utrimque papilla præditæ, intra marginem lateralem utrumque serie papillarum bifidarum longitudinali subrecta, in apicibus (semicellulæ) subtruncatis in papillam excurrente instructæ; a latere visæ circulares, utrimque papillis binis, altera mediana, altera subapicali ornatæ. Latitudo isthmi triens, crassitudo (inclus. papill.) duæ partes diametri transversalis corporis.

Long. 0,0015″ = 38 μ; Lat. 0,00133″ = 34 μ; Crass. 0,00087″ = 22 μ; Lat. isthmi 0,00045″ = 11,5 μ. — Tab. III, fig. 11.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam, rarissime.

C. cristato Ralfs (Brit. Desmid. pag. 105, tab. XVII, fig. 2) nostra species proxima est, tamen his rebus bene distincta. Semicellulæ ejus semicirculares non sunt, sed medio dorso et ad basin utrimque (angulis inferioribus) truncatæ ob eamque rem irregulariter hexagono-ellipticæ (latitudine semicellularum paullo supra basin, non ad basin ipsam, maxima); in centro tumore nullo, sed tantum papilla ornatæ; a vertice visæ anguste ellipticæ lateribus modice convexis, non, ut in *C. cristato*, subrectis; margine subtiliter crenulatæ, sed margine suprabasali (angulis inferioribus) integro et ad finem sinus mediani papillula utrimque instructo. Hæ crenulæ, ut jam diximus, papillæ re vera sunt emarginatæ nec, ut in *C. cristato*, integræ.

**25. C. quadrifarium nov. sp.

C. submediocre, diametro quarta parte longius, profunde constrictum, sinu lineari angusto; semicellulæ semicirculares, angulis inferioribus subrectis, margine verrucis 17 emarginato-truncatis et ad marginem serie verrucarum similium instructæ, tumore basali, orbiculari, (12—17-)granulato ornatæ; a vertice visæ ambitu ellipticæ, medio utrimque tumore granulato præditæ, in medio 4 seriebus verrucarum bifidarum longitudinalibus, distinctis, in utroque fine (cellulæ) papillas singulas singulis efficientibus, ornatæ***); a latere visæ utrimque tumore granulato instructæ, apice papillis 4 præditæ. Corporis crassitudo duæ partes diametri transversalis. Nuclei amylacei bini.

---

*) Papillæ 16 emarginatæ re vera sunt, quæ, nisi in semicellulis oblique a fronte visis non distinctæ, in cellula ab ipsa fronte visa speciem crenularum ob dorsum semicellulæ a latere visæ convexum præ se ferunt.

**) Qua ex re nomen habet species (μόνος = unus vel solus; μαζός = mamma vel papilla.

***) Unde nomen specificum.

Zygosporæ subquadratæ, glabræ, angulis paullum protractis, truncatis, semicellulis residuis, membrana glaucescente.

Long. cell. 0,00157–173″ = 40—44 μ; Lat. 0,00126–142″ = 32—36 μ; Crass. 0,0009–96″ = 23—24,5 μ; Lat. isthmi 0,0006″ = 15 μ; Long. zygosp. 0,00157″ = 40 μ; Lat. 0,00134″ = 34 μ. — Tab. III, fig. 12.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Zygosporæ maturæ 2 a me inventæ cum zygosporis *C. tincti* Ralfs (Brit. Desmid. tab. XXXII, fig. 7) valde congruunt, sed multo sunt majores.

**26. C. HEXASTICHUM nov. sp.

C. mediocre, fere quarta parte longius quam latius, profunde constrictum, sinu lineari, extremo paullum ampliato; semicellulæ perfecte semicirculares angulis inferioribus subrectis, margine verrucis 15 emarginato-truncatis et intra marginem seriebus 2 concentricis verrucarum similium ornatæ, tumore basali semiorbiculari verrucoso instructæ, verrucis 9, 2—4-fidis in series 2 transversas dispositis; a vertice visæ ellipticæ, medio utrimque subtumidæ et verrucosæ, utroque fine 6-papillato-crenatæ, in medio 6 seriebus verrucarum bifidarum longitudinalibus distinctis instructæ *); a latere visæ apice late rotundato 6-papillato-crenatæ, utrimque paullo supra basin ventricosæ et verrucis 2 emarginatis præditæ. Latitudo isthmi dimidiam cellulæ latitudinem æquans. Corporis crassitudo tres quintæ partes diametri longitudinalis. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00208″ = 53 μ; Lat. 0,00165–173″ = 42—44 μ; Crass. 0,0012″ = 31 μ; Lat. isthmi 0,00082″ = 21 μ. — Tab. III, fig. 13.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna, raro.

Priori simillima quidem hæc species est, sed fere quarta parte major semicellulas seriebus senis verrucarum marginalibus cinctas habet, in illa autem series marginales utriusque semicellulæ quaternæ sunt; tumores basales illius speciei orbiculares sunt et granulis simplicibus ornati, hæc species tumores transversos, semiorbiculares, verrucis duplicibus—quadruplicibus (bi—quadrigranulatis), series 2 transversas efficientibus instructos habet. His characteribus constantibus satis inter se distinctæ nobis visæ sunt hæ species.

*27. C. CÆLATUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 103, tab. XVII, fig. 1).

Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,00174″ = 44 μ; Lat. 0,00142–150″ = 36—38 μ; Crass. 0,00083″ = 21 μ; Lat. isthmi 0,0006″ = 15 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam, rarissime.

---

*) Ex quo species nomen habet (ἕξ = sex; στίχος = series vel ordo).

Specimina a nobis inventa cum fig. 1 b, a cl. RALFS l. c. data, valde congruunt, sed semicellulas a latere visas apice non tam profunde emarginatas, quam in fig. 1 e, habent.

*28. C. PULCHERRIMUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 213 (175), tab. III, fig. 24).

Forma dimidio major, diametro quarta parte longior, granulis tumoris basalis series 7 verticales efficientibus, semicellulis e vertice visis medio vix inflatis.

Long. 0,00256–268″ = 65—68 μ; Lat. 0,002–21″ = 51—54 μ; Crass. 0,0012″ = 30 μ; Lat. isthmi 0,00063–70″ = 16—18 μ.

Hab. ad Femsjö et Räppe in Smolandia.

**29. C. SPECIOSUM nov. sp.

C. mediocre, circiter dimidio longius quam latius, fere elliptico-oblongum, modice constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ sursum magis magisque sed leviter attenuatæ, dorso subtruncatæ, lateribus levissime convexis, angulis inferioribus subrectis, ventre planæ, margine crenatæ, crenis 18, marginem versus granulatæ, granulis in series regulares concentricas ordinatis, ab basin 7—8 seriebus granulorum minorum verticalibus, minus distinctis ornatæ; a vertice visæ ellipticæ, utroque polo subtilissime crenulatæ; a latere visæ subovatæ. Crassitudo circiter dimidium diametri longitudinalis corporis. Latitudo isthmi dimidium diametri transversalis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,00213–244″ = 54—62 μ; Lat. 0,00154–161″ = 39—41 μ; Crass. 0,00108″ = 27,5 μ; Lat. isthmi 0,00079–87″ = 20—22 μ.

Tab. III, fig. 5.

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam.

C. notabili De Bary (Conjugat. pag. 72, tab. VI, fig. 52 et 53) proxima hæc species esse videtur.

30. C. CRENATUM Ralfs (in Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 394, tab. XI, fig. 6 (1844), sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 96, tab. XV, fig. 7).

Nuclei amylacei singuli.

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam.

β. SUBCRENATUM Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 165; *Euastrum crenatum* Perty Kleinst. Lebensf. tab. XVI, fig. 10).

Long. 0,00157″ = 40 μ; Lat. 0,0011″ = 28 μ; Lat. isthmi 0,00067″ = 17 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam, perraro.

A forma *α.* diversa est var. *β.* imprimis apicibus cellulæ valde rotundatis, non truncatis.

31. C. UNDULATUM Corda (Almanach de Carlsb. 1839, pag. 243, tab. V, fig. 26, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 97, tab. XV, fig. 8 a et e).

Membrana marginem versus punctis distinctis conspersa. Nuclei amylacei bini.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd et Wirestorp.

**32. C. CYCLICUM nov. sp.

C. mediocre, tam latum quam longum, perfecte circulare, profunde constrictum sinu lineari angustissimo, extremo nonnumquam ampliato; semicellulæ semicirculares, ventre planæ, angulis subrectis vel oblique truncatis, margine crenatæ, crenis 12; a vertice conspectæ anguste ellipticæ; a latere visæ sursum dilatatæ, apice subtruncatæ. Membrana marginem versus obsolete granulato-plicata, plicis in series regulares, concentricas ordinatis. Corporis crassitudo dimidium, latitudo isthmi triens diametri transversalis. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,0019–20″ = 49—52 *μ*; Lat. 0,00205–217″ = 52—55 *μ*; Crass. 0,001″ = 26 *μ*; Lat. isthmi 0,00067–75″ = 17—19 *μ*. — Tab. III, fig. 6.

Hab. in "Kungsparken" et ad Vaksala prope Upsaliam, rarissime.

C. speciosum nov. sp., *notabile* De Bary, *crenatum* Ralfs *α.* et *β.*, *undulatum* Corda et *cyclicum* nov. sp. una tamquam series sunt. Illa 3, ambitu subelliptica, singulos nucleos amylaceos habent; hæc 2, plus minus orbicularia, binos.

**33. C. SEXANGULARE nov. sp.

C. submediocre, diametro quinta parte longius, profunde constrictum, sinu lineari; semicellulæ elliptico-hexagonæ, dorso truncatæ, utroque polo obtuse rotundatæ, basi subreniformi; a vertice visæ ellipticæ; a latere circulares. Membrana subtiliter punctata. Crassitudo duæ partes diametri transversalis corporis. Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,00165″ = 42 *μ*; Lat. 0,00134–142″ = 34—36 *μ*; Crass. 0,00087–96″ = 22—24,5 *μ*; Lat. isthmi 0,00043–47″ = 11—12 *μ*; Lat. marg. term. 0,0006–7′ = 15—18 *μ*. — Tab. II, fig. 23.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Sequenti proxima nostra species est.

*34. C. NITIDULUM De Not. (Elementi pag. 42, tab. III, fig. 26).

Membrana subtiliter punctata. Nuclei amylacei singuli.

a. Forma genuina:

Long. 0,00118″ = 30 μ; Lat. 0,0009″ = 23 μ; Lat. isthmi 0,00031″ = 8 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

b. Forma major:

Long. 0,0016″ = 40 μ; Lat. 0,0012″ = 30,5 μ; Crass. 0,00088″ = 22,5 μ; Lat. isthmi 0,00039″ = 10 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

*35. C. RETUSUM (Perty) Rabenh. (Fl. Eur. Alg. sect. III, pag. 167; *Euastrum retusum* Perty Kleinst. Lebensf. pag. 208, tab. XVI, fig. 12).

Quum forma a nobis inventa nonnihil a Pertyana differre videatur, hæc nova descriptio, ad specimina Suecica delineata, danda nobis visa est:

C. minus, diametro tertia parte longius, incisura mediana profunda angustissima; semicellulæ subtriangulares, basi subreniformes, sed dorso valde angustato-productæ et truncatæ, lateribus leviter retusis, ad angulos inferiores valde rotundatos granulatæ, in margine ipso dorsali granulis nonnullis et basin versus seriebus binis granulorum verticalibus ornatæ, granulis omnibus minus distinctis; a vertice visæ anguste ellipticæ, medio utrimque tuberculis binis obsoletis instructæ; a latere visæ ovatæ, apice subtruncatæ. Crassitudo dimidium diametri longitudinalis corporis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,00134–154″ = 34—39 μ; Lat. 0,00102–118″ = 26—30 μ; Crass. 0,00067–73″ = 17—18,5 μ; Lat. isthmi 0,00031–40″ = 8—10 μ; Lat. marg. termin. 0,00063–71″ = 16—18 μ. — Tab. III, fig. 3.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam. In Ostrogothia ad Bolltorp.

Forma Pertyana differt semicellulis a latere visis subrhomboideis membranaque fortasse granulis nuda; quæ, quamvis ab auctore observata non sint, tamen nulla adesse pro certo non est habendum; sunt enim minus distincta et in cellula chlorophyllosa vix visibilia.

Forma minor dorso minus protracto.

Long. 0,00094—0,00106″ = 24—27 μ; Lat. 0,00075–83″ = 19—21 μ; Crass. 0,00043″ = 11 μ; Lat. isthmi 0,00024″ = 6 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

36. C. NYMANNIANUM Grunow (in Rabenh. Fl. Eur. Alg. pag. 166).

Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,00173–189″ = 44—48 μ; Lat. 0,0013–14″ = 33—36 μ; Lat. isthmi 0,00035″ = 9 μ. — Tab. III, fig. 1.

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

Formæ *A. majori* speciei sequentis primo quidem aspectu simillimum est, sed differt apicibus leviter retusis, lateribus minus repandis, membrana distincte punctata et in centro semicellulæ utriusque puncto ocellato (æque ac in *E. venusto* Bréb.) instructa.

*37. C. Hammeri Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *Hammeri* Reinsch Algenflora pag. 111).

Forma *A. majoris* minor (l. c. tab. X, fig. 1 b, c).

Long. 0,001″ = 25 μ; Lat. 0,00065″ = 16,5 μ; Lat. isthmi 0,00018″ = 4,5 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Specimina a nobis inventa cum illis, quæ in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1224 (unde sumtum est individuum a cl. Reinsch l. c. delineatum) adsunt, prorsus congruunt.

*38. C. Clepsydra Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 212 (174), tab. III, fig. 29).

Forma semicellulis subellipticis nec angulosis a forma Brasiliensi paullum diversa.

Long. 0,0007″ = 18 μ; Lat. = Long.; Lat. isthmi 0,00018″ = 4,5 μ.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam.

**39. C. protuberans nov. sp.

C. parvum, circiter tam longum quam latum, profunde constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ tetragonæ, subduplo longiores quam latiores, e basi recta subito dilatatæ lateribus rectis, angulis superioribus subrectis, inferioribus obtusangulis, ad dorsum latissime convexum tumore granulato-punctato instructæ; a vertice visæ oblongæ, utroque fine subtruncatæ, medio utrimque tumore valde elevato, subgranulato præditæ; a latere visæ subtriangulares, e basi angusta valde dilatatæ, dorso late leviterque convexo, angulis superioribus obtusis. Membrana subtiliter punctata. Latitudo marginis ventralis crassitudinem corporis æquans. Latitudo isthmi fere quadrans diametri longitudinalis corporis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,00094″ = 24 μ; Lat. 0,00087–91″ = 22—23 μ; Crass. 0,00063–71″ = 16—18 μ; Lat. isthmi 0,00024–27″ = 6—7 μ. — Tab. III, fig. 17.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

**40. C. TETRACHONDRUM nov. sp.

C. parvum, paullo latius quam longius, profunde constrictum sinu lineari angustissimo; semicellulæ semiellipticæ, vix $2^1/_2$-plo longiores quam latiores, dorso medio truncato convexæ, ventre planæ, utroque fine valde rotundatæ, ad isthmum granulis binis ornatæ; e vertice conspectæ ellipticooblongæ, utrimque granulis binis instructæ; a latere circulares, utrimque granulo basali munitæ. Crassitudo dimidium diametri longitudinalis corporis. Latitudo isthmi fere quadrans latitudinis cellulæ. Nuclei amylacei singuli.

Long. $0{,}0008'' = 20{,}5\ \mu$; Lat. $0{,}0009—0{,}00103'' = 23—26{,}3\ \mu$; Crass. $0{,}00042'' = 10{,}7\ \mu$; Lat. isthmi $0{,}00024–27'' = 6—7\ \mu$. — Tab. III, fig. 2.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

*41. C. BIREMUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 212 (174), tab. III, fig. 33).

Forma major murice centrali paullo breviori.

Long. $0{,}00087'' = 22\ \mu$; Lat. = Long.; Crass. $0{,}0006'' = 15\ \mu$; Lat. isthmi $0{,}00024'' = 6\ \mu$.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam.

*42. C. DEPRESSUM (Näg.) (*Euastrum* (Tetracanthium) *depressum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 114, tab. VII, C, fig. 2; non *Cosm. depressum* Bailey Micr. Obs. pag. 36, Tab. I, fig. 1).

Long. $0{,}00146–158'' = 37—40\ \mu$; Lat. $0{,}00158–189'' = 40—48\ \mu$; Lat. isthmi $0{,}00046'' = 12\ \mu$; Crass. $0{,}00078'' = 20\ \mu$.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna, Gottsunda (CLEVE) et Noor in Uplandia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

A *C. Phaseolo* Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 106, tab. XXXII, fig. 5) differt semicellulis plerumque ellipticis nec reniformibus, tumore centrali nullo, membrana subtilissime punctata et latitudine corporis majore præ longitudine; — quare ad illud non est, ut auctoribus nonnullis placet, hæc species nostro quidem judicio referenda. — *Arthrodesmo convergenti* Ehrenb. autem sine dubio maxime est affinis.

*43. C. OBSOLETUM (Hantzsch) Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *obsoletum* Algenflora pag. 110, tab. IX, fig. 5; *Arthrodesmus obsoletus* Hantzsch in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1407 (cum descriptione)!).

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam, copiose.

Nec ad *Arthrodesmum convergentem* Ehrenb. referenda, ut cl. RABENHORST (in Fl. Eur. Alg. pag. 227) fecit, hæc species ullo pacto est, binos enim nucleos amylaceos habet, nec omnino generi *Arthrodesmo* adnumeranda esse videtur, anguli enim modo non, modo minus distincte acuminati sunt.

Forma Suecica cum Germanica prorsus congruit.

**44. C. Smolandicum nov. sp.

C. mediocre, suborbiculare, diametro octava parte longius, profundissime constrictum, sinu lineari subangusto; semicellulæ subsemicirculares, dorso omnino convexæ, sed (plerumque) medio dorso subtruncatæ, ventre planæ, angulis (inferioribus) obtusis, papilla instructis; a vertice visæ ellipticæ; a latere visæ circulares. Membrana sparse et grosse punctata; fascia connexiva minus distincta. Latitudo isthmi quadrans diametri transversalis corporis. Crassitudo dimidiam longitudinem cellulæ vix superans. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00213″ = 54 μ; Lat. 0,00189″ = 48 μ; Crass. 0,0011″ = 28 μ; Lat. isthmi 0,00048″ = 12 μ. — Tab. II, fig. 17.

Hab. ad Räppe in Smolandia.

**45. C. taxichondrum nov. sp.

C. submediocre, suborbiculare, diametro septima parte longius, profundissime constrictum, sinu lineari extrorsum vix ampliato; semicellulæ semicirculares, medio dorso subtruncatæ, margine ventrali subrecto, angulis (inferioribus) subrectis, paullum incrassatis, ad isthmum verrucula præditæ, in parte superiori seriebus binis transversis, leviter arcuatis, altera subdorsali 3 verrucularum, altera submediana 5—6 verr., ornatæ; a vertice conspectæ ellipticæ, medio utrimque verruculis 5—6 et intra margines laterales ternis munitæ; a latere circulares, utrimque 3 verruculis instructæ. Membrana distincte punctata. Crassitudo fere duæ partes latitudinis corporis. Latitudo isthmi quadrans diametri longitudinalis. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00173″ = 44 μ; Lat. 0,0015″ = 38 μ; Crass. 0,00094″ = 24 μ; Lat. isthmi 0,00039—43″ = 10—11 μ. — Tab. II, fig. 13.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe.

Verruculæ quasi in ordines dispositæ sunt, ex quo ductum est nomen specificum (τάξις = ordo vel acies; χόνδρος = granulum).

**46. C. pachydermum nov. sp.

C. permagnum, tertia fere parte longius quam latius, profunde constrictum, sinu lineari angusto; semicellulæ alte semicirculares, duas fere partes circuli efficientes, dorso alte convexæ, lateribus infra rectiusculis, verticalibus, angulis (inferioribus) subito rotundatis, subrectis; a vertice visæ ovales; a latere elliptico-orbiculares. Membrana crassa, distincte dense punctata. Corporis crassitudo dimidium diametri longitudinalis. Latitudo isthmi vix dimidium diametri transversalis. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00413–461″ = 105—117 μ; Lat. 0,00315–343″ = 80—87 μ; Crass. 0,00217–232″ = 55—59 μ; Lat. isthmi 0,00146–158″ = 37—40 μ; Crass. membranæ 0,0001–12″ = 2,5—3 μ. — Tab. II, fig. 15.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Räppe in Smolandia.

C. Ralfsii Bréb., cum nostra specie magnitudine fere congruens, differt semicellulis triangulari-semicircularibus, a vertice visis subfusiformibus; præterea multo est profundius constrictum, ut latitudo isthmi quarta parte diametri transversalis paullulo minor sit, membranaque ejus nec tam crassa est nec (tam) distincte punctata; structurâ quoque massæ chlorophyllaceæ (quam parietalem habere videtur) a nostra specie sine dubio multum differt.

C. circulare Reinsch, nostra specie tertia parte minus, ab illa facile dignoscitur latitudine cellulæ longitudinem fere æquante, membrana subtiliter punctata et imprimis semicellulis perfecte semicircularibus.

**47. C. PERFORATUM nov. sp.

C. mediocre, circulare, paullulo longius quam latius, modice constrictum, sinu acutangulo, extrorsum sensim dilatato (raro lineari subangusto); semicellulæ subsemicirculares, dorso alte convexæ, sed medio dorso subtruncatæ vel subretusæ, angulis (inferioribus) oblique truncatis, obtusangulis; a vertice visæ late ellipticæ; a latere visæ circulares, sed basi lata confluentes, dorso late rotundatæ. Membrana distincte sparse punctata, sed in area basali subtriangulari punctis maximis pellucido-punctata. Crassitudo duæ partes diametri transversalis corporis. Latitudo isthmi dimidiâ cellulæ latitudine paullo major. Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00234–268″ = 60—68 μ; Lat. 0,00225–248″ = 57—63 μ; Crass. 0,0015–158″ = 38—40 μ; Lat. isthmi 0,00126–134″ = 32—34 μ.

Tab. II, fig. 16.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna et Noor in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Räppe et Wirestorp.

Apud nos tam vulgare esse videtur, quam *C. pyramidatum*, *margaritiferum*, *Brebissonii* et cetera.

A *C. circulari* Reinsch nostra species his characteribus bene est distincta: Semicellulas non perfecte semicirculares habet, sed medio dorso subtruncatas vel subretusas angulis plus minus oblique truncatis, obtusangulis; incisura mediana acutangula, extrorsum sensim ampliata disjunctas (in *C. circulari* "dimidia extra articulum conjunctivum inter se contigua" sunt, sec. Reinsch); a vertice visas late ellipticas, utroque fine obtusangulas nec rotundatas; præterea minus est constricta, ut latitudo isthmi dimidiam cellulæ latitudinem paullum superet (in *C. circulari* "articuli conjunctivi latitudo diametri transversalis triens (aut paullo minus)" est, sec. Reinsch)

et membranam in area basali subtriangulari pellucido-punctatam (quasi perforatam) habet, qua re non a *C. circulari* tantum, sed a reliquis omnibus *Cosmariis* differt.

*48. C. CIRCULARE Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *circulare* Reinsch Algenflora pag. 108, tab. X, fig. 2).

Long. 0,00189–197″ = 48—50 μ; Lat. 0,0016–17″ = 41—43 μ; Crass. 0,00094″ = 24 μ; Lat. isthmi 0,00064″ = 16 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam, copiose.

A forma Reinschiana nihil differt Suecica nisi quod paullo minor est et latitudinem cellulæ longitudine octava fere parte minorem habet.

49. C. PYRAMIDATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 94, ex parte, tab. XV, fig. 4 a, b, c (non d, e, f)).

Nuclei amalycei bini.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. In Blekingia ad Lösen (Cleve).

**50. C. PSEUDOPYRAMIDATUM nov. sp. (*C. pyramidatum β. minus* Reinsch in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1902, c. icone).

C. habitu *C. pyramidati* Bréb., sed multo (subduplo) minus. Membrana subtiliter punctata. Nuclei amalycei singuli.

Long. 0,00173″ = 44 μ; Lat. 0,0011″ = 28 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ; Crass. 0,00077″ = 19,5 μ. — Tab. II, fig. 18.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

Forma major (*C. pyramidatum* Ralfs Brit. Desmid., ex parte, tab. XV, fig. 4 d, e, f).

Long. 0,002–25″ = 52—64 μ; Lat. 0,00126–157″ = 32—40 μ; Lat. isthmi 0,00043–59″ = 11—15 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

**51. C. VARIOLATUM nov. sp.

C. parvum, duabus partibus longius quam latius, ellipticum, incisura mediana profunda, lineari angustissima; semicellulæ e basi recta magis magisque angustatæ, apice valde rotundatæ, sed medio apice nonnumquam subretusæ, lateribus leviter convexis, angulis (inferioribus) subrectis; a vertice visæ late ellipticæ; a latere obovatæ. Membrana quasi variolis notata vel subpustulata. Latitudo isthmi triens, crassitudo tres partes diametri transversalis corporis. Nuclei amalycei singuli.

Long. 0,00126–138″ = 32—35 μ; Lat. 0,00075–83″ = 19—21 μ; Crass. 0,0006″ = 15 μ; Lat. isthmi 0,00024–26″ = 6—6,5 μ. — Tab. II, fig. 19.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Quasi prioris infans, sed membrana non subtiliter, sed grosse punctata punctis speciem variolarum vel pustularum præ se ferentibus bene distinctum.

52. C. GRANATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 96, tab. XXXII, fig. 6).

Hab. ad Räppe, Svenarum et Unnaryd in Smolandia. In Blekingia ad Lösen (CLEVE).

*53. C. PSEUDOGRANATUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 211 (173), tab. III, fig. 27).

b. Forma media:

Long. 0,00178″ = 45 μ; Lat. 0,00118″ = 30 μ.

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam.

54. C. POLYGONUM Näg. (*Euastrum* (Cosm.) *polygonum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 120, tab. VII, A, fig. 9).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Femsjö in Smolandia.

*55. C. TRILOBULATUM Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *trilobulatum* Reinsch Algenflora pag. 116, tab. IX, fig. 6).

Membrana in centro semicellulæ paullum incrassata.

Long. 0,00087″ = 22 μ; Lat. 0,0006–63″ = 15—16 μ; Lat. isthmi 0,00022″ = 5,5 μ; Lat. lobi pol. 0,0004″ = 10 μ.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Specimina a nobis inventa ejus ipsius formæ sunt, quæ in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1224 (unde sumtum est individuum a cl. REINSCH l. c., fig. 6 a, delineatum) data est.

*56. C. TETRAGONUM Näg. (*Euastrum* (Cosm.) *tetragonum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 119, tab. VII, A, fig. 5).

Forma apicibus subprotractis, lateribus semicellularum levissime bisinuatis, angulis earum superioribus rectis, intermediis obtusangulis.

Long. 0,00165–181″ = 42—46 μ; Lat. 0,001″ = 27 μ; Lat. isthmi 0,0003″ = 8 μ; Crass. 0,00075″ = 19 μ; Lat. marg. termin. 0,00061″ = 15,5 μ.

Tab. II, fig. 21.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam. Ad Wirestorp in Smolandia; utroque loco rarissime.

57. C. Nægelianum Bréb. (Liste pag. 127; *Euastrum* (Cosm.) *crenatum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 120, tab. VII, A, fig. 8 b).

Hab. ad Carlberg prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

**58. C. abruptum nov. sp.

C. parvum, subquadratum, paullo longius quam latius, incisura mediana profunda lineari angustissima; semicellulæ transverse rectangulares, dorso paullulum protracto truncatæ, lateribus levissime retusis, angulis (lateralibus) superioribus truncatis, in centro verruca instructæ; a vertice visæ ovales, in utroque latere papilla ornatæ; a latere visæ subsemicirculares, medio utrimque papilla munitæ. Latitudo isthmi vix triens diametri transversalis corporis. Nuclei amalycei singuli.

Long. 0,00071—79″ = 18—20 μ; Lat. 0,00061—71″ = 15,5—18 μ; Crass. 0,00047″ = 12 μ; Lat. isthmi 0,00018—21″ = 4,5—5,5 μ; Lat. marg. termin. 0,00035″ = 9 μ. — Tab. II, fig. 22.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

*59. C. pygmæum Archer (Description 1864, pag. 174, tab. VI, fig. 45—49).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Verum esse *Cosmarium* hoc nobis videtur nec ob zygosporas glabras ad genus *Sphærozosma* referendum (Cfr. ea. quæ hac de re supra (pag. 2—4) disputavimus!).

*60. C. Norimbergense Reinsch (*Didymidium* (Cosm.) *Norimbergense* Reinsch Algenflora pag. 113, tab. IX, fig. 2).

Long. 0,0006″ = 15 μ; Lat. 0,00039—47″ = 10—12 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Forma Suecica apicibus truncatis, non retusis, cum fig. cit. 2 f congruit, sed minor est.

*61. C. exiguum Archer (Description 1864, pag. 178, tab. VI, fig. 32, 33).

Long. 0,00071—87″ = 18—22 μ; Lat. 0,00039—47″ = 10—12 μ; Lat. isthmi 0,00014″ = 3,5 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

62. C. Meneghinii Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 96, tab. XV, fig. 6).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd.

β. angulosum Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 163; *Cosmarium angulosum* Bréb. Liste pag. 127, tab. I, fig. 17).

Long. 0,0011″ = 28 μ; Lat. 0,00072″ = 18 μ; Lat. isthmi 0,00019″ = 5 μ.

Hab. ad Unnaryd in Smolandia.

γ. CONCINNUM Rabenh. (l. c.; *Cosmarium concinnum* Rabenh. Alg. Eur. N:o 1303; Reinsch Algenflora tab. IX, fig. 3).

a. majus (Reinsch l. c. fig. 3 a).

Long. 0,0011″ = 28 μ; Lat. 0,001″ = 26 μ; Lat. isthmi 0,00028″ = 7 μ.

Hab. in fossis argillosis ad Gottsunda (CLEVE) et Bergsbrunna in Uplandia.

c. concinnum (Reinsch l. c. fig. 3 b, c, g).

Hab. ad Unnaryd in Smolandia.

*63. C. TINCTUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 95, tab. XXXII, fig. 7).

Hab. in "Lassby backar" et "Kungsparken" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna et Noor in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd.

Hujus speciei propria est rufescens vel luteola membrana, unde illud specificum nomen habet.

Ob zygosporas glabras referenda ad genus *Sphærozosma* esse cl:o DE BARY (Conjugat. pag. 73) et post eum cl:o RABENHORST (Fl. Eur. Alg. pag. 150) hæc species visa est, sed, sicut cl. RALFS, BRÉBISSON et ARCHER, eam *Cosmariorum* in genere retinendam esse putamus eoque magis, quod nec cellulas concatenatas, nisi divisione nondum perfecta binas, umquam habet nec glabras sola zygosporas (nam et *Cosm. pygmæo* Archer, *moniliformi* (Turp.) Ralfs, *rupestri* Näg., *quadrifario* nov. sp. et *Broomei* Thwaites glabræ sunt zygosporæ) et angulosas (fere ut *C. quadrifarium* nov. sp.; vide tab. III, fig. 12 c!), quales nulla vera *Sphærozosmatis* species habere umquam reperta est.

64. C. BIOCULATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 95, tab. XV, fig. 5; *Heterocarpella bioculata* Bréb. Alg. Falaise pag. 56, tab. VII, sec. Ralfs).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

65. C. MONILIFORME (Turp.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 107, tab. XVII, fig. 6; *Tessarthronia moniliformis* Turpin Dict. des Sc. Nat. tab. VII, fig. 1?, sec. Ralfs).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. 0,00146″ = 37 μ. — Tab. III, fig. 15.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia (c. zygosp.). In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö et Svenarum. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

**66. C. TUMIDUM nov. sp.

C. submediocre, diametro paullo longius, profunde constrictum, sinu lineari angusto; semicellulæ subovales, sed ventre planæ, dorso late convexæ; a vertice visæ subrhomboideæ, medio ventricosæ, utroque fine subito rotundatæ; a latere visæ circulares. Membrana (in centro semicellulæ distincte grosse) punctata. Corporis crassitudo tres partes diametri transversalis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,0013–146″ = 33—37 μ; Lat. 0,0011–125″ = 28—32 μ; Crass. 0,0009″ = 23 μ; Lat. isthmi 0,00031–35″ = 8—9 μ. — Tab. III, fig. 16.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Räppe in Smolandia.

A fronte visum habitu et magnitudine *C. Phaseoli* Bréb. fere est, sed differt semicellulis præ latitudine (altitudine) brevioribus, basi recta non reniformi, a vertice visis medio ventricosis, rhomboïdeis (non ovalibus tumore utrimque instructis). Præterea structurâ massæ chlorophyllaceæ differre videtur; quæ in nostra specie eadem est atque in *C. moniliformi* (Turp.) Ralfs (vide De Bary Conjugat. tab VI, fig. 48!), i. e. in cellula a vertice visa e nucleo amylaceo centrali undique radians; in *C. Phaseolo* Bréb. autem talis est, ni fallimur, qualis in *C. depresso* Näg. ceterisque speciebus sectionis *Eucosmarii* De Bary (l. c. pag. 72).

67. C. GLOBOSUM Bulnh. (in Hedwigia pag. 52, tab. IX, fig. 8; in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1223).

Membrana punctata.

Long. 0,00118–134″ = 30—34 μ; Lat. 0,0008–87″ = 20,3—22 μ; Lat. isthmi 0,00067–74″ = 17—19 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Räppe in Smolandia.

Massa chlorophyllacea hac in specie eodem modo formata est, atque in duabus prioribus. Membranam non esse glabram, ut cl. RABENHORST (in Fl. Eur. Alg. pag. 178) dicit, sed punctatam, videre nobis licuit quum in speciminibus a nobis inventis, tum in iis, quæ ab auctore ipso (in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1223) data sunt.

68. C. CONNATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 108, tab. XVII, fig. 10).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Svenarum. In Blekingia ad Hoby (CLEVE).

*69. C. PSEUDOCONNATUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 214 (176), tab. III, fig. 17).

Long. 0,00216″ = 55 μ; Lat. 0,00173″ = 44 μ; Lat. isthmi 0,00158″ = 40 μ.

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Femsjö et Wirestorp in Smolandia.

70. C. orbiculatum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 107, tab. XVII, fig. 5).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Femsjö in Smolandia.

*71. C. excavatum Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 214 (176), tab. III, fig. 25).

Forma duplo major (= *C. orbiculatum* Hassall Brit. Alg. pag. 364, tab. LXXXVI, fig. 5).

Long. 0,00167″ = 42,5 μ; Lat. 0,00092—98″ = 23,5—25 μ; Lat. isthmi 0,00059″ = 15 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd, Femsjö et Svenarum in Smolandia.

*72. C. Portianum Archer (in Micr. Journ. VIII, pag. 235, tab. XI, fig. 8 et 9, sec. Rabenh. Fl. Eur. Alg. pag. 160 (et 108, c. Icone); Pritch. Infus. pag. 733; *C. orbiculatum* De Bary Conjugat. tab. VI, fig. 49 et 50?).

Long. 0,00157″ = 40 μ; Lat. 0,00114 = 29 μ; Crass. 0,00094″ = 24 μ; Lat. isthmi 0,00051″ = 13 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Forma Suecica isthmum paullum elongatum habet.

73. C. amœnum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 102, tab. XVII, fig. 3).

Nuclei amylacei bini.

Hab. ad Nacka prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Svenarum in Smolandia.

Forma major, dimidio longior quam latior, semicellulis a fronte visis subcircularibus.

Long. 0,0022″ = 56 μ; Lat. 0,00142″ = 36 μ; Crass. 0,0011″ = 27,5 μ; Lat. isthmi 0,00063 = 16 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

74. C. annulatum (Näg.) De Bary (Conjugat. pag. 72; *Dysphinctium* (Calocylindrus) *annulatum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 111, tab. VI, F).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

Ob nucleos amylaceos binos ex transverso positos generi *Penio* adnumerandum nullo modo est; sed ad hoc subgenus *Cosmariorum*, an potius ad novum subgenus *Pleurotæniopsin* sit referendum, dicere non possumus.

*75. C. Thwaitesii Ralfs (Brit. Desmid. pag. 109, tab. XVII, fig. 8; non *Penium Thwaitesii* Cleve Bidrag pag. 492).

Nuclei amylacei bini (ex transverso positi).

Long. 0,00228—283″ = 58—72 μ; Lat. 0,0011—12″ = 28—30,5 μ; Crass. 0,00094—0,00102″ = 24—26 μ; Lat. isthmi 0,00094—0,00114″ = 24—29 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam. In "Rackarebergen" prope Holmiam.

Huc non pertinet *C. Thwaitesii β. majus* Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 175; Wittr. Anteckn. pag. 14, fig. 5), quod cum *C. De Baryi* Archer (= *Pleurotænio Cosmarioide* De Bary) identicum est.

76. C. quadratum Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 395, tab. XI, fig. 9, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 92, tab. XV, fig. 1 a, b, (non c); non *C. quadratum* Cleve Bidrag pag. 487).

Nuclei amylacei bini.

Long. 0,00236—252″ = 60—64 μ; Lat. 0,00126—134″ = 32—34 μ; Crass. 0,0011″ = 28 μ; Lat. isthmi 0,0009″ = 23 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam, ad Noor et Bergsbrunna in Uplandia. Ad Carlberg prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

Formâ Anglicâ, quam cl. Ralfs (in Brit. Desmid., tab. XV, fig. 1 a, b) delineavit, Succica quinta vel quarta parte major est et paullum differt angulis semicellularum superioribus late truncato-rotundatis, quo fit, ut illæ apice alte convexæ et paullo angustiores sint quam basi, deinde multo minus est constricta, ut latitudo isthmi duas partes diametri transversalis cellulæ æquet (in forma Anglica latitudo isthmi quadrantem latitudinis corporis vix superat, sec. Ralfs), et semicellulas a latere visas subovatas, apicem versus attenuatas habet; quibus rebus ad *Euastrum* (Cosm.) *integerrimum* Näg. (Gatt. einzell. Alg. pag. 119, tab. VII, A, fig. 1) paullum accedit, sed illo quarta parte minor est et semicellulas ambitu subquadraticas, non conicas, habet, basi rectas, non convexas, sinu lineari, non acutangulo valde dilatato, angulisque inferioribus subrectis, non late rotundatis.

C. Cucurbita Cleve (l. c. pag. 488) forma hæc ipsa est *C. quadrati* Ralfs.

**77. C. sinuosum nov. sp. (*C. quadratum*, var., Ralfs Brit. Desmid. tab. XV, fig. 1 c*); *Didymidium* (Cosm.) *plicatum* Reinsch Algenflora, ex parte, tab. IX, fig. 1 d; *C. quadratum* Cleve Bidrag pag. 487).

C. submediocre, diametro duplo longius, ambitu retangulare, non profunde constrictum, sinu lineari subangusto, extrorsum non ampliato, a latere

*) = "empty frond of variety", Ralfs l. c. pag. 93.

visum elliptico-oblongum, medio non distincte constrictum; semicellulæ quadraticæ, tam longæ quam latæ, lateribus leviter retusis, angulis inferioribus subrectis prominulis, superioribus subito rotundatis, subprominulis, apice retusæ; a vertice visæ subcirculares, utroque fine tumore parvo instructæ. Membrana glabra. Crassitudo corporis diametro transversali quinta parte minor. Latitudo isthmi tres partes diametri transversalis. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,0015–177″ = 38—45 μ; Lat. 0,00073–89″ = 18,5—22,5 μ; Crass. 0,00063–7″ = 16—17,5 μ; Lat. isthmi 0,00052–65″ = 13,3—16,5 μ; Lat. apic. cellulæ 0,00065–72″ = 16,5—18,2 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (Cand. S. HENSCHEN) et in colli inter Upsaliam et Vaksala sito.

A fronte visa hæc species habitu fere est *Euastri sublobati* Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 91, tab. XXXII, fig. 4), quod tamen multo brevius est præ latitudine, ut longitudo corporis latitudinem tantum quarta parte superet, deinde multo profundius constrictum, ut latitudo isthmi quinta parte diametri transversalis major non sit, a vertice denique visum cruciforme est.

A vertice autem et a latere visa cum *C. ancipiti* nov. sp. (cui maxime est affinis, ni fallimur) valde congruit, sed semicellulis a fronte visis utroque latere et apice retusis angulisque superioribus (subito) rotundatis facile dignoscitur.

A *C. quadrato* Ralfs differt apicibus retusis et nucleis amylaceis singulis.

**78. C. ANCEPS nov. sp.

C. parvum, duplo longius quam latius, oblongo-hexagonum, non profunde constrictum sinu lineari subangusto, a latere conspectum oblongum, medio utrimque levissime emarginatum, utroque polo valde rotundatum; semicellulæ subquadraticæ, e basi recta sensim attenuatæ, apice truncatæ et (plerumque) quam levissime emarginatæ, lateribus rectis, angulis inferioribus rectis, superioribus subrectis; a vertice visæ subcirculares, utroque fine paullum tumidæ. Membrana glabra. Latitudo isthmi duæ partes diametri transversalis corporis. Crassitudo latitudine cellulæ paullo minor. Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,00126–138″ = 32—35 μ; Lat. 0,00067–71″ = 17—18 μ; Crass. 0,00055″ = 14 μ; Lat. isthmi 0,00047″ = 12 μ; Lat. marg. term. 0,00047–55″ = 12—14 μ. — Tab. III, fig. 4.

Hab. ad Carlberg (ubi P. T. CLEVE primus invenit) et in "Rackarebergen" prope Holmiam.

Inter *Euastra* collocandum propter apices in medio levissime emarginatos nobis quidem non videtur; ut enim crassitudinem cellulæ omittamus, quæ præ latitudine multo major est, quam ut in *Euastro*, lobi laterales et tumores, illius generis proprii, hac in specie nulli sunt.

**79. C. Holmiense nov. sp.

C. mediocre, diametro duabus partibus longius, fere elliptico-rectangulare, modice constrictum, sinu lineari angusto; semicellulæ subquadraticæ, e basi recta sensim attenuatæ, sub apice leviter dilatato quasi constrictæ, lateribus rectis vel subconvexis, apicem versus obsolete crenulatis, dorso truncato obsolete biundulatæ, angulis inferioribus subito rotundatis, superioribus truncato-rotundatis; a vertice visæ late ellipticæ, utroque polo obtusangulo; a latere visæ rectangulari-ellipticæ, apice subtruncatæ. Membrana glabra. Latitudo isthmi dimidium diametri transversalis corporis. Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,0025—26″ = 63—66 μ; Lat. 0,0015—158″ = 38—40 μ; Crass. 0,0011″ = 28 μ; Lat. isthmi 0,00083″ = 21 μ; Lat. apic. cellulæ 0,00114″ = 29 μ.

Tab. II, fig. 20.

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam.

**β. integrum nov. var.

A forma α. differt semicellulis sursum paullo magis attenuatis, apice dilatato truncatis nec undulatis lateribusque earum integris (non crenulatis), rectis.

Long. 0,0022—244″ = 56—62 μ; Lat. 0,00142—157″ = 36—40 μ; Lat. isthmi 0,00079—87″ = 20—22 μ; Lat. apic. cellulæ 0,00102—118″ = 26—30 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et in colli inter Upsaliam et Vaksala sito.

Euastro sublobato β. pileolato Bréb. (Liste pag. 124) hæc varietas similis esse videtur a fronte quidem visa, sed a vertice conspecta cum forma α. prorsus congruit nec, ut *E. sublobatum*, cruciformis est.

**80. C. binerve nov. sp. (*C. quadratum* Hassall Brit. Alg. pag. 367, tab. LXXXVI, fig. 12 (non 11)?).

C. mediocre, diametro circiter duplo longius, ambitu anguste ellipticum, medio profunde constrictum, sinu lineari angustissimo, sed extremo ampliato; semicellulæ e basi subrecta sensim attenuatæ, lateribus levissime retusis, apice truncato-rotundatæ, angulis inferioribus subito rotundatis, subprominulis; a basi visæ valde compressæ; a vertice ipso visæ perfecte circulares, jugis vel costis binis distinctis, per medium ductis, paullum divergentibus ornatæ; a latere visæ obovatæ, apice jugis illis binis, deorsum divergentibus et mox decrescentibus instructæ. Membrana quam subtilissime et densissime striolata, seriebus punctorum quaternis (apicali, mediana et basalibus) transverse circa semicellulam ductis ornata. Latitudo isthmi

triens diametri transversalis corporis. Nuclei amylacei singuli, ut nobis visum est.

Long. 0,00217–236″ = 55—60 μ; Lat. 0,0012″ = 30,5 μ; Crass. 0,00087″ = 22 μ; Lat. isthmi 0,00039″ = 10 μ. — Tab. III, fig. 19.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia, raro.

Striolæ quam subtilissimæ et densissimæ nisi in cellula evacuata, exsiccata et 400:es amplificata non conspiciuntur.

Seriebus transversis punctorum cum specie sequenti propemodo congruit, sed in illa series suprabasales binæ, singulæ basales adsunt, hac in specie suprabasales nullæ, basales vero binæ. Series autem mediana, quæ circa sequentem directo ducta est, in semicellula hujus speciei a latere visa apicem versus paullum ascendit.

Euastrum (Cosm.) *integerrimum* Näg. (Gatt. einzell. Alg. pag. 119, tab. VII, A, fig. 1), quamvis a fronte visum habitu inter hanc speciem et sequentem fere intermedio sit, tamen formæ *C. quadrati* Ralfs apud nos frequenti proximum esse eo verisimilius videtur, quod forma prope eadem in Helvetia loco fere eodem, quo Nägeliana species, sumta et sub nomine *C. integerrimi* data a cl. Cramer (in Rabenh. Alg. Eur. N:o 1445) est.

**81. C. zonatum nov. sp.

C. submediocre, duplo longius quam latius, incisura mediana profunda acutangula; semicellulæ subovatæ, e basi valde convexa sensim attenuatæ, lateribus medio subretusis, apice late leviterque convexæ, angulis omnibus late rotundatis; a vertice ipso visæ circulares, a basi subcirculares; a latere visæ ovatæ. Membrana seriebus punctorum quinis (apicali, mediana, suprabasalibus, basali) simplicibus, ex transverso circa semicellulam utramque ductis, quasi in zonas divisa, in centro ipso apicis semicellulæ punctis nonnullis congregatis ornata, de cetero glabra. Latitudo isthmi triens diametri transversalis corporis. Crassitudo diametro transversali octava parte minor. Nuclei amylacei singuli.

Long. 0,0019″ = 48 μ; Lat. 0,00094″ = 24 μ; Crass. 0,00083″ = 21 μ; Lat. isthmi 0,00031″ = 8 μ. — Tab. III, fig. 18.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Sicut in priori puncta membranæ nisi 200:es amplificata vix sunt visibilia. Serie in mediana puncta, quorum numerus semper duplo major est quam in apicali, 20 sunt.

*82. C. parvulum Bréb. (Liste pag. 133, tab. I, fig. 18).

Forma major, membrana quasi pustulata vel variolata nec, ut in forma Gallica, glabra (vel subtiliter punctata).

Long. 0,0017–193″ = 44—49 μ; Lat. 0,0007–77″ = 18—19,5 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

Haud multum abest, quin hæc forma propria species sistenda nobis videatur; sed quum specimina originalia, quibuscum conferatur, nulla habeamus, huc interea relata a nobis est.

*83. C. cruciferum De Bary (Conjugat. pag. 72, tab. VII, G, fig. 3—6).

Long. 0,0006″ = 15 μ; Lat. 0,00039—43″ = 10—11 μ.

Hab. in aqua pluviali in colli inter Vaksala et Upsaliam sito.

Cum fig. 3, l. c. data, specimina omnia a nobis quam plurima inventa valde congruunt nec in ulla cellula plus unum nucleum amylaceum centralem umquam vidimus. Fig. 5 nonne cellulam nisi visceribus nondum divisam præbet?

84. C. Cucurbita Bréb. (in Desmaz. Crypt. de Fr. ed. I, N:o 1103, sec. Rabenh. Fl. Eur. Alg. pag. 174; Ralfs Brit. Desmid. pag. 108, tab. XVII, fig. 7; nec Cleve Bidrag pag. 488).

Long. 0,00118—134″ = 30—34 μ; Lat. 0,00071—73″ = 18—18,5 μ; Lat. isthmi 0,00069—71″ = 17,5—18 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam, copiose. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

Specimina Suecica a figuris, quæ a cl. Ralfs l. c. datæ sunt, eo differunt, quod paullulo sunt minora nec tam distincte constricta et semicellulas apice alte et æqualiter rotundatas, non truncato-rotundatas, et ad apicem versus subgranulato-punctatas, cetero punctatas habent.

A specie sequenti longe diversa est forma Suecica quidem.

*85. C. Palangula Bréb. (Liste pag. 132).

β. De Baryi Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 175; *C. Palangula* De Bary Conjugat. pag. 72, tab. VI, fig. 51).

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Nacka prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

B. PLEUROTÆNIOPSIS nov. subgen.

Massa chlorophyllacea lateralis, e tæniis vel laminis parietalibus, nucleos amylaceos nonnullos involventibus, formata.

Hoc subgenus, quamvis species ejus nonnullæ structura massæ chlorophyllaceæ cum gen. *Pleurotænio* Näg. congruant et habitu quoque ad id quodammodo accedant, tamen formâ cellulæ minus elongatâ et in primis locellis apicalibus sphæricis nullis bene est distinctum.

86. C. turgidum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 110, tab. XXXII, fig. 8; *Pleurotænium turgidum* De Bary Conjugat. pag. 75, tab. V, fig. 31).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

87. C. De Baryi Archer (in Pritch. Infus. pag. 735; *Pleurotœnium Cosmarioides* De Bary Conjugat. pag. 75, tab. V, fig. 32—33; *Cosm. Thwaitesii β. majus* Rabenh. Fl. Eur. Alg. pag. 175; Wittr. Anteckn. pag. 14, fig. 5).

Long. 0,0041—44″ = 104—112 μ; Lat. 0,00197—213″ = 50—54 μ; Lat. isthmi 0,00134—154″ = 34—39 μ; Crass. 0,00185—197″ = 47—50 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Nacka prope Holmiam. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

A vertice visa hæc species non est perfecte circularis, sed levissime compressa. Apices paullo magis rotundatos habet forma Suecica quam figura a cl. De Bary l. c. data. Semicellulæ forma ipsa paullum variant; latera enim ad basin versus leviter retusa nonnumquam habent et apicem versus paullulo sunt latiores quam ad basin. In "Norby skog" specimina perpauca inventa a nobis sunt, quæ a fronte visa habitu erant *C. turgidi* Bréb., i e. utrumque polum versus attenuata nec ab illo nisi cellula a vertice visa non perfecte circulari, membrana subtilius punctata et quod multo erant minora, dignosci evacuata quidem poterant.

C. Thwaitesii β. majus Rabenh. nihil aliud esse quam *C. De Baryi* Archer nec centralem massam chlorophyllaceam, nucleis amylaceis singulis præditam, sed parietalem habere, pro certo affirmare possumus; figura enim a cl. Wittrock l. c. data quamvis naturæ congruens sit, et quod ad structuram massæ chlorophyllaceæ pertinet, tamen ille, quum specie figuræ ejusdem eo adduceretur, ut singulos in semicellula utraque nucleos amylaceos magnos inesse (l. c. pag. 15) diceret, in errore quodam versatus est; centrum enim semicellulæ valde chlorophyllosæ dilutius (quod in ceteris quoque speciebus massa chlorophyllacea parietali instructis videri nonnumquam licet) pro nucleo amylaceo habuit.

88. C. Cucumis Corda (Alman. de Carlsbad 1835, pag. 121, fig. 27, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 93, tab. XV, fig. 2).

Membrana subtiliter punctata. Structura massæ chlorophyllaceæ fere eadem ac in priori.

Long. 0,0031—37″ = 79—94 μ; Lat. 0,0018—22″ = 46—56 μ; Crass. 0,00142—157″ = 36—40 μ; Lat. isthmi 0,0011—126″ = 28—32 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp. Ad Lösen in Blekingia (Cleve).

Forma Suecica non tam profunde est constricta quam Anglica. Priori hæc species maxime affinis est.

89. C. Ralfsii Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 93, tab. XV, fig. 3).

Hab. ad Unnaryd in Smolandia.

Individua chlorophyllosa nulla quidem a nobis inventa sunt, quare ad hoc subgenus referendam hanc speciem esse, nunc, certe dijudicare non possumus, tamen hic collocata a nobis est eam ob rem, quod massa chlorophyllacea laterali instructam eam esse e figura citata verisimillimum nobis videtur.

90. C. ovale Ralfs (Brit. Desmid. pag. 98, tab. XV, fig. 9).

Massa chlorophyllacea e laminis 4 parietalibus magnis formata.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Huseby (Cleve), Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Sicut in *Xanthidio armato* Bréb. laminæ chlorophyllaceæ parietales quaternæ hac in specie sunt, nucleo amylaceo centrali nullo. (Cavendum est, ne globulus obscurus granulorum mobilium, qui in centro semicellulæ imprimis auctumno et hieme sæpe adest, pro nucleo amylaceo centrali habeatur).

*91. C. striolatum (Näg.) Archer (in Pritch. Infus. pag. 734; *Dysphinctium striolatum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 112, tab. VI G, fig. 1).

Membrana seriebus verrucularum et punctorum regularibus, et ex transverso et ex obliquo et in longitudinem circa cellulam ductis, ornata, sed isthmo glabro. Tæniæ chlorophyllaceæ parietales senæ.

Long. 0,0053—576″ = 135—146 μ; Lat. 0,00252—268″ = 64—68 μ; Lat. isthmi 0,00197—217″ = 50—55 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Verruculæ et puncta, quibus membranam ornatam esse diximus, in series regulares confertas, et transversas et obliquas et longitudinales, hoc modo ordinata sunt: Transversæ alternæ tantum e verruculis recta linea positis, alternæ tantum e punctis serratim (Suethice: "i zig-zag") collocatis efficiuntur. In seriebus autem obliquis et longitudinalibus puncta bina inter 2 verruculas posita sunt, i. e. verruculas singulas bina puncta sequuntur. Numerus igitur punctorum duplo major est quam verrucularum. Verruculæ paullo minores sunt quam in figura a cl. Nägeli data. Quem, nec qualis re vera esset structura membranæ, nec quomodo massa chlorophyllacea esset formata, vidisse, e descriptione et figura ab illo data intelligi licet; quibus igitur rebus descriptio illa, quod ad structuram membranæ pertinet, a nostra differt, iis adduci in eam opinionem non possumus, ut formam a nobis inventam aliam esse ac Helvetiacam putemus.

Structura massæ chlorophyllaceæ eadem fere est ac in *C. prægrandi* nov. sp.

**92. C. elegantissimum nov. sp.

C. mediocre, circiter $2^1/_2$-plo longius quam latius, perfecte cylindricum, utroque polo late rotundatum, medio utrimque leviter excavatum; a vertice visum perfecte circulare, margine crenato-verrucosum. Membrana verrucis emarginatis, in series 22 longitudinales (tantum 9 a fronte visi-

biles), isthmo interruptas, et (in utraque semicellula) 8—9 transversas dispositis, ornata. Massa chlorophyllacea e tæniis 3 parietalibus, nucleos amylaceos binos involventibus, formata. Latitudo isthmi diametro transversali corporis octava parte minor.

Long. 0,00323—346″ = 82—88 μ; Lat. 0,00131—146″ = 33—37 μ; Lat. isthmi 0,00094—0,00106″ = 24—27 μ. — Tab. III, fig. 20.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

Proxima sunt (et structurâ massæ chlorophyllaceæ?) *C. annulatum* (Näg.) De Bary et *cylindricum* Ralfs.

**93. C. PRÆGRANDE nov. sp.

C. magnum, diametro vix duplo longius, profunde constrictum sinu acutangulo; semicellulæ globosæ, verrucis conicis non dense obsessæ (excepto locello apicali nudo). Membrana evidenter punctata. Tæniæ chlorophyllaceæ parietales 4 vel 6.

Long. 0,0039—41″ = 99—104 μ; Lat. 0,00221—236″ = 56—60 μ; Lat. isthmi 0,0009″ = 23 μ. — Tab. III, fig. 21.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia, una cum priori.

Species quum magnitudine tum structura massæ chlorophyllaceæ a *C. orbiculato* Ralfs longe diversa, quocum confusa esse ab auctoribus videtur.

IV. ARTHRODESMUS Ehrenb.

(Infus. pag. 149, mut. char.; Archer in Pritch. Infus. pag. 736).

1. A. CONVERGENS Ehrenb. (Infus. pag. 152, tab. X, fig. 18).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. 0,00173″ = 44 μ. — Tab. III, fig. 22.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (c. zygosp.) et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö, Räppe. Ad Hoby in Blekingia (CLEVE).

Zygosporæ, a CLEVEO (Bidrag pag. 489) primo inventæ, etiam maturæ glabræ sunt.

2. A. INCUS (Bréb.) Hassall (Brit. Alg. pag. 357; *Cosmarium Incus* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 228).

Formæ:

a. *Arthrodesmus Incus* Bulnh. (in Hedwigia pag. 51, tab. IX, fig. 3 (figuræ non optimæ)).

Ad *A. Incudem* α. Ralfs (Brit. Desmid. pag. 118, tab. XX, fig. 4 a) proxime accedens, sed major et diametro paullo longior est, sinu lineari angusto et semicellulas basi subreniformi contiguas et tantum tribus partibus longiores quam latiores habet.

Long. s. acul. 0,00126″ = 32 μ; Lat. s. acul. 0,00106″ = 27 μ; Lat. isthmi 0,00031″ = 8 μ.

Hab. inter sphagna in "Wahlenbergs sjö" in "Lassby backar" prope Upsaliam. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

b. *A. Incus* α. Ralfs (l. c. fig. 4 d).

Formæ priori similis, sed minor est, sinu acutangulo et semicellulas margine ventrali convexas habet, qua re ad *A. subulati* formam majorem Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 232 (194), tab. IV, fig. 59) accedit.

Long. s. acul. 0,00094″ = 24 μ; Lat. s. acul. 0,00079″ = 20 μ; Lat. isthmi 0,00022″ = 5,5 μ.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna.

A fronte visa hæc forma habitu est *Staurastri dejecti γ. connati* nov. var. (vide tab. III, fig. 28 a!) a latere visi.

c. *A. Incus* β. *intermedius* Wittr. (Anteckn. pag. 15, fig. 6).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

d. *A. Incus* β. Ralfs (l. c. fig. 4 e—h).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Huseby (Cleve), Unnaryd, Femsjö.

Hæc forma separanda a ceteris et propria species habenda fortasse est.

*3. A. tenuissimus Archer (Description 1864 pag. 175, tab. VI, fig. 50—55).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia, perraro.

*4. A. bifidus Bréb. (Liste pag. 135, tab. I, fig. 19).

Long. c. acul. = Lat. c. acul. 0,0007″ = 18 μ; Long. s. acul. 0,00051″ = 13 μ; Lat. s. acul. 0,00047″ = 12 μ; Lat. isthmi 0,00023″ = 6 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Räppe in Smolandia.

5. A. octocornis Ehrenb. (Infus. pag. 152; *Xanthidium octocorne* α. Ralfs Brit. Desmid. pag. 116, tab. XX, fig. 2 a—e).

Zygosporæ globosæ, aculeis simplicibus longis munitæ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (c. zygosp.) et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö et Räppe.

β. MAJOR (*Xanthidium octocorne β. major* Ralfs l. c. fig. 2 f—i).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Hæc species, quum massam chlorophyllaceam, ni fallimur, centralem (sicut ceteræ hujus generis species) habeat, inter *Xanthidia* collocanda non est.

V. STAURASTRUM Meyen.

(Nova acta vol. XIV, II, pag. 777, 1829, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 119).

A. STAURASTRUM (sensu strict.) nov. subgen. (gen. *Staurastrum* De Bary Conjugat. pag. 71).

Massa chlorophyllacea centralis, in laminas e nucleo amylaceo unico centrali radiantes, angulum vel radium cellulæ quemque (utrumque) versus geminas convergentes, formata.

1. S. MUTICUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 125, tab. XXI, fig. 4; *Binatella mutica* Bréb. Alg. Falaise pag. 57, tab. VIII, sec. Ralfs).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Carlberg prope Holmiam (CLEVE). Ad Unnaryd, Femsjö et Wirestorp in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Forma minor (*Phycastrum depressum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 126, tab. VIII A, fig. 1).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

*2. S. COARCTATUM Bréb. (Liste pag. 144, tab. I, fig. 29).

Forma fere duplo minor, semicellulis utroque polo angustato-obtusis. Membrana in angulis subtiliter punctata.

Long. 0,00083″ = 21 μ; Lat. 0,00079—85″ = 20—21 μ; Lat. isthmi 0,0002″ = 5 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

3. S. ORBICULARE (Ehrenb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 125, tab. XXI, fig. 5; *Desmidium? orbiculare* Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 292).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

Formam lateribus cellulæ e vertice visæ rectis ad *β. denticulatum* Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 224 (186), tab. IV, fig. 42) quodammodo accedentem in "Kungsparken" prope Upsaliam inveni.

*4. S. Clepsydra Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 224 (186)).

α. obtusum (l. c. tab. IV, fig. 48, (semicellulæ minores)).

Long. 0,0016″ = 41 *μ*; Lat. = Long.; Lat. isthmi 0,00083″ = 21 *μ*.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

A forma Brasiliensi Suecica paullum differt quod non tam profunde est constricta lateraque semicellularum a vertice visarum recta habet.

*5. S. striolatum (Näg.) Archer (in Pritch. Infus. pag. 740; *Phycastrum* (Amblyactinium) *striolatum* Näg. Gatt. einzell. Alg. pag. 126, tab. VIII, A, fig. 3).

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Gottsunda in Uplandia (Cleve).

Specimina Suecica cum forma a cl. Nordstedt (Desmid. Brasil. tab. IV, fig. 45) delineata fere congruunt.

*6. S. corniculatum nov. sp.

S. mediocre, diametro quinta vel quarta parte longius, medio utrimque emarginatura obtusangula leviter emarginatum; semicellulæ subcuneatæ, e basi latiuscula sensim dilatatæ, lateribus subconvexis, margine dorsali recto, angulis (superioribus) oblique sursum angustato-protractis, obtusis; a vertice visæ triangulares lateribus rectis, angulis obtusis. Membrana glabra. Latitudo isthmi dimidiam cellulæ latitudinem æquans vel paullulo major.

Long. 0,0014—165″ = 36—42 *μ*; Lat. 0,0012—13″ = 30—33 *μ*; Lat. isthmi 0,00067″ = 17 *μ*. — Tab. III, fig. 23.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Species habitu inter *S. pileolatum* Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 215, tab. XXXV, fig. 22) et *Clepsydra* Nordst. fere intermedio.

*7. S. bacillare Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 228; in Ralfs Brit. Desmid. pag. 214, tab. XXXV, fig. 21).

**β. obesum nov. var.

Var. corpore robusto, brachiis valde decurtatis, prope nullis, utroque polo leviter convexa; e vertice visa trigona.

Long. 0,0009″ = 23 μ; Lat. 0,00106″ = 27 μ; Lat. isthmi 0,0003″ = 7,5 μ. Tab. III, fig. 24.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

**8. S. INSIGNE nov. sp.

S. parvum, paullo vel tertia parte longius quam latius, medio utrimque emarginatura perfecte rectangula profunde emarginatum; semicellulæ fere formam pentagoni irregularis præ se ferentes, e basi latiuscula ad medium subito dilatatæ, lateribus (et inferioribus et superioribus) rectis, angulis lateralibus subrectis, dorso in gibberem truncatum subfastigatæ; a vertice visæ 5- (raro 4-) lobæ, lobis latis, brevi-conicis, obtusiusculis. Latitudo isthmi dimidium diametri transversalis corporis.

Long. 0,001—115″ = 26—29 μ; Lat. 0,00087″ = 22 μ; Lat. isthmi 0,00045″ = 11,5 μ. — Tab. III, fig. 25.

Hab. in "Lassby backar" et "Kungsparken" prope Upsaliam; et prope Vaksala in Uplandia.

Tantum unum individuum formæ tetragonæ (ad Vaksala) inventum a me est.

Species tumore apicali, quasi polum axis longitudinalis cellulæ porrectum efficiente, optime distincta.

*9. S. FRANCONICUM Reinsch (*Didymidium* (Staur.) *Franconicum* Reinsch Algenflora pag. 158, tab. XII, fig. 3).

Forma b. (l. c. fig. 3 a, b), sed cornubus granulatis.

Long. corn. exclus. 0,00047″ = 12 μ; Lat. corn. exclus. 0,0004″ = 10 μ.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

**10. S. LEPTODERMUM nov. sp.

S. mediocre, tam longum quam latum, profunde constrictum sinu subrectangulo, amplo; semicellulæ subcuneiformes, sursum valde dilatatæ, lateribus subrectis, obsolete biundatis, angulis in spinam perbrevem, oblique sursum versam, acuminatis, medio dorso paullum tumidæ; e vertice visæ triangulares, lateribus rectis, angulis acuminatis. Membrana glabra, tenuissima*).

Long. 0,00228—236″ = 58—60 μ; Lat. s. spin. = Long.; Lat. c. spin. 0,0024—25″ = 61—64 μ; Lat. isthmi 0,00087″ = 22 μ. — Tab. III, fig. 26.

Hab. ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

Phycastrum (Staur.) *repandum* Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 210, tab. XVI, fig. 26), cui nostra species maxime est affinis, differt dorso semicellularum retuso,

*) Ex quo nomen specificum (λεπτός = tenuis; δέρμα = membrana).

angulis longe cuspidatis, recurvis, lateribusque cellulæ e vertice visæ levissime retusis; præterea majus est, latitudine cellulæ longitudinem quarta parte superante.

Phycastrum (Staurastrum) *cristatum* Näg. (Gatt. einzell. Alg. pag. 127, tab. VIII, C, fig. 1) a nostra specie facile dignoscitur semicellulis subellipticis, dorso alte convexo, ad angulos aculeis obsito, lateribus cellulæ a vertice visæ leviter convexis angulisque obtusis aculeo superimposito.

11. S. BREVISPINA Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 229; in Ralfs Brit. Desmid. pag. 124, tab. XXXIV, fig. 7).

Hab. ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

**12. S. AVERSUM nov. sp. (*S. brevispina* Cleve Bidrag, pag. 489).

S. mediocre, diametro fere quarta parte longius, profundissime constrictum, sinu acutangulo, valde ampliato; semicellulæ obverse elliptico-semicirculares, dorso truncatæ vel levissime retusæ, ventre alte convexæ, in utroque polo rotundato spinula minutissima subpapilliformi ornatæ; e vertice visæ trigonæ, angulis truncato-rotundatis, spinula brevissima instructis, lateribus levissime retusis. Latitudo isthmi quadrans diametri longitudinalis cellulæ. Membrana subtilissime punctata.

Long. 0,0017—2″ = 43—52 μ; Lat. 0,0014—165″ = 36—42 μ; Lat. isthmi 0,00043—48″ = 11—12,3 μ. — Tab. III, fig. 27.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

A specie priori differt semicellulis ventre alte convexis, dorso truncatis vel levissime retusis; a vertice autem visum angulis subtruncatis lateribusque levissime retusis; præterea latitudinem cellulæ longitudine circiter quinta parte minorem habet.

*13. S. MUCRONATUM Ralfs (*S. mucronatum* α. et γ. Ralfs in Annals of Nat. Hist. vol. XV, pag. 152, tab. X, fig. 5, sec. Ralfs; *S. dejectum* β. et γ. Brit. Desmid. pag. 121, tab. XX, fig. 5 b, c).

Hab. ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

14. S. DEJECTUM Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 227; *S. dejectum* α. Ralfs Brit. Desmid. pag. 121, tab. XX, fig. 5 a).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia.

*β. APICULATUM (*S. apiculatum* Bréb. Liste pag. 142, tab. I, fig. 23).

Long. s. acul. 0,0007″ = 18 μ; Lat. = Long.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (CLEVE). Ad Carlberg prope Holmiam (CLEVE). Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

**γ. connatum nov. var.

Var. sinu acuto, subrectangulo, isthmo elongato nullo; semicellulæ ventre alte convexæ, dorso truncatæ vel levissime retusæ, utroque fine rotundatæ, angulis (superioribus) obtusis, spinula elongata, piliformi, rejecta, instructis; e vertice visæ trigonæ, lateribus levissime retusis, angulis rotundatis, spinula breviori ornatis.

Long. s. spinul. 0,00088″ = 22,4 μ; Lat. 0,00083″ = 21 μ; Lat. isthmi 0,00026″ = 6,6 μ; Long. spin. 0,0003—5″ = 8—13 μ. — Tab. III, fig. 28.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Femsjö.

Facere non possum quin cl:o Brebisson *S. dejectum* a *S. mucronato* separandum esse existimanti (Liste pag. 142) adsentiar; *S. apiculatum* vero nihil nisi varietatem *S. dejecti* esse puto.

15. S. Dickiei Ralfs (Brit. Desmid. pag. 123, tab. XXI, fig. 3).

Hab. ad Nacka prope Holmiam (copiosissime). Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

16. S. lanceolatum Archer (Description 1862, pag. 248, tab. XII, fig. 16—22).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

17. S. cuspidatum Breb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 122, tab. XXI, fig. 1).

Hab. ad Räppe et Svenarum in Smolandia.

**18. S. pterosporum nov. sp.

S. parvum, tam longum quam latum, incisura mediana profunda, latissima; semicellulæ subcuneatæ, sursum dilatatæ, dorso truncatæ, lateribus rectis, angulis subacutis, aculeo subtilissimo instructis; e vertice visæ trigonæ, lateribus rectis, angulis subacutis, subtiliter cuspidatis. Latitudo isthmi dimidium diametri transversalis cellulæ.

Zygosporæ rectangulares, compressæ, angulis in lobum late productis, lobi formam semicellularum residuarum æmulantes et in iis quasi in thecis conditi.

Long. cell. s. acul. = Lat. s. acul. 0,00055—59″ = 14—15 μ; Long. acul. 0,00016″ = 4 μ; Long. zygosp. s. lob. 0,0008″ = 20 μ; Lat. s. lob. 0,0005″ = 13 μ. — Tab. III, fig. 29.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam.

A forma trigona *Staurastri O'Mearii* Archer (in Proceedings of Dubl Zool. Bot. Association, vol. I, pars I, 1858, pag. 118, tab. XI, fig. 10—13) cellulæ vegetativæ nostræ speciei nisi aculeis brevioribus et latitudine corporis longitudinem æquante

non differunt; zygosporæ autem illius quum normales, i. e. globosæ aculeatæ sunt, nostra species zygosporas rectangulares, quadrilobas (unde nomen specificum), glabras, ergo valde abnormes habet; quare nobis optime distincta species visa est, sed novum subgenus eo minus sistens, quod cum ceteris *Staurastri* speciebus *S. brachiato* Ralfs, cujus zygosporæ aculeatæ quidem sunt, sed quadratæ, connexa est.

*19. S. aristiferum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 123, tab. XXI, fig. 2).

Forma tri- et tetragona.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia.

**20. S. megacanthum nov. sp.

S. mediocre, circiter tam longum quam latum (s. acul.), profundissime constrictum, sinu acutangulo vel subrectangulo; semicellulæ fere triangulari-fusiformes, introrsum ventricosæ, dorso subtruncatæ vel leviter convexæ, utroque fine in aculeum validum attenuatæ; a vertice visæ tri- vel tetragonæ, lateribus retusis, angulis in aculeum firmum productis. Latitudo isthmi quadrans diametri transversalis corporis (s. acul.). Membrana subtiliter punctata.

Lat. isthmi $0{,}00057'' = 14{,}5\ \mu$; Long. acul. usque ad $0{,}0007'' = 18\ \mu$.

Forma trigona: Long. $0{,}002'' = 50\ \mu$; Lat. s. acul. $0{,}00225'' = 57\ \mu$.

Forma tetragona: Long. $0{,}0018'' = 46\ \mu$; Lat. s. acul. $0{,}0024'' = 61\ \mu$; c. acul. $0{,}0038 = 97\ \mu$. — Tab. IV, fig. 1.

Hab. ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp in Smolandia.

*21. S. mamillatum Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 225 (187), tab. IV, fig. 55).

Forma isthmo breviori, lateribus cellulæ a vertice visæ leviter retusis.

Long. $0{,}00087–94'' = 22—24\ \mu$; Lat. s. acul. $0{,}00075–87'' = 19—22\ \mu$; Lat. c. acul. $0{,}0017'' = 44\ \mu$.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

22. S. Avicula Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 140, tab. XXIII, fig. 11).

Membrana granulata. (Cfr. Ralfs l. c.: "Frond scarcely rough").

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Räppe in Smolandia.

*23. S. commutatum (Kütz.) Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 206; *Phycastrum commutatum* Kütz. Spec. Alg.? pag. 180, sec. Rabenh.).

Hab. ad Räppe in Smolandia.

Priori proxima hæc species est.

24. S. BIFIDUM (Ehrenb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 215; *Desmidium bifidum* Ehrenb. Infus. pag. 141, tab. X, fig. 11; *Staur. exsectum* Cleve in Rabenh. Alg. Eur., N:o 1925).

Descriptio ad specimina Suecica delineata:

S. submediocre, circiter tam longum quam latum (exclus. acul.), incisura mediana profunda, carinæformi; semicellulæ subelliptico-triangulares, introrsum paullum ventricosæ, margine dorsali, medio recto, ad utrumque polum versus deorsum valde inclinato, in utroque polo (quasi rostellato-incurvo) in spinam oblique deorsum versam subito acuminatæ; a vertice visæ trigonæ, lateribus subrectis, angulis latiusculis, bicuspidatis, inter cuspides late excavatis. Membrana glabra. Latitudo isthmi dimidio diametro longitudinali corporis paullo minor.

Long. $0{,}0012\text{—}13'' = 30\text{—}33\ \mu$; Lat. c. spin. $0{,}0019'' = 48\ \mu$; Lat. s. spin. $0{,}0013'' = 33\ \mu$; Lat. isthmi $0{,}00051\text{—}55'' = 13\text{—}14\ \mu$; Long. spin. usque ad $0{,}00035'' = 9\ \mu$. — Tab. IV, fig. 2.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam.

*25. S. TRIFIDUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 226 (188), tab. IV, fig. 51).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

26. S. BRACHIATUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 131, tab. XXIII, fig. 9).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

27. S. LÆVE Ralfs (Brit. Desmid. pag. 131, tab. XXIII, fig. 10).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

β. CLEVEI Wittr. (Anteckn. pag. 18, fig. 9).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Svenarum in Smolandia.

*28. S. ERASUM Bréb. (Liste pag. 143, tab. I, fig. 28).

Forma espinulosa:*)

Long. $0{,}00134\text{—}146'' = 34\text{—}37\ \mu$; Lat. = Long.; Lat. isthmi $0{,}00047'' = 12\ \mu$.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

*) Bréb. l. c.: "Elle" (hæc species) "s'en" (a *S. ruguloso, dilatato et margaritaceo*) "distingue par quelques épines très courtes, manquant quelquefois, qui se trouvent au sommet de ses angles et un peu au-dessous".

29. S. dilatatum Ehrenb. (Infus. pag. 143, tab. X, fig. 13; Ralfs Brit. Desmid. pag. 133, tab. XXI, fig. 8).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

30. S. tricorne (Bréb.) Menegh. (Synops. pag. 225; *Binatella tricornis* Bréb. Alg. Falaise, pag. 57, tab. VIII, sec. Ralfs).

Var. *β*. Ralfs (Brit. Desmid. pag. 134, tab. XXXIV, fig. 8 b, c, d).

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

31. S. punctulatum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 133, tab. XXII, fig. 1).

Zygosporæ globosæ, aculeis longis, basi latiusculis, apice dichotomis armatæ.

Diam. zygosp. s. acul. 0,00114″ = 29 *μ*; Long. acul. 0,00055″ = 14 *μ*.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam.

32. S. hirsutum (Ehrenb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 127, tab. XXII, fig. 3; *Xanthidium hirsutum* Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 318).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

33. S. Brebissonii Archer (in Pritch. Infus. pag. 739; *S. pilosum* Bréb. Liste, pag. 141, tab. II, fig. 49; Cleve Bidrag pag. 490, tab. IV, fig. 3).

Hab. ad Carlberg prope Holmiam (Cleve).

In "Lassby backar" prope Upsaliam formam irregulariter tetragonam inveni; a vertice enim visa, quum unum latus reliquis multo minus haberet, trapezica fuit.

Cum figura zygosporæ, quam Cleve (l. c.) dedit, zygosporæ a me inventæ non perfecte congruunt; primum enim processus ter usque quater dichotomos (non, ut in fig. cit., primum trichotomos, deinde dichotomos) habent, deinde manubrium (= pars inferior, indivisa) processuum paullo brevius.

34. S. polytrichum (Perty) Rabenh. (Fl. Eur. Alg. Sect. III, pag. 214; *Phycastrum polytrichum* Perty Kleinst. Lebensf. pag. 210, tab. XVI, fig. 24).

Long. s. acul. 0,00284—307″ = 72—78 *μ*; Lat. s. acul. 0,0026—29″ = 66—75 *μ*; Long. acul. 0,00039—47″ = 10—12 *μ*; Lat. isthmi 0,00087—94″ = 22—24 *μ*.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam. Ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp in Smolandia.

Speciei sequenti proximum est, sed differt margine semicellularum ventrali convexo ob eamque rem sinu amplo; a vertice autem visum latera levissime retusa, angulos obtusos, non late rotundatos habet nec nisi in area parva mediana triangulari ab aculeis nudum est. Præterea subduplo majus est.

35. S. TELIFERUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 128, tab. XXII, fig. 4).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Svenarum in Smolandia.

36. S. SETIGERUM Cleve (Bidrag, pag. 490, tab. IV, fig. 4).

Tab. IV, fig. 3.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Huseby in Smolandia (CLEVE). Ad Bolltorp in Ostrogothia.

37. S. HYSTRIX Ralfs (Brit. Desmid. pag. 128, tab. XXII, fig. 5).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

38. S. CRISTATUM (Näg.) Archer (in Pritch. Infus. pag. 738; *Phycastrum cristatum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 127, tab. VIII, C, fig. 1).

Hab. ad Noor et Bergsbrunna in Uplandia.

*39. S. QUADRANGULARE Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 128, tab. XXII, fig. 7).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

β. ATTENUATUM Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 229 (191), tab. IV, fig. 44).

Hab. in "Lassby backar" et "Norby skog" prope Upsaliam. In Ostrogothia ad Bolltorp.

*40. S. PUNGENS Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 130, tab. XXXIV, fig. 10).

Forma e vertice visa lateribus leviter retusis. Membrana subtiliter granulato-punctata.

Long. acul. excl. = Lat. acul. excl. 0,001″ = 26 μ; Lat. isthmi 0,00043″ = 11 μ; Long. acul. 0,00035″ = 9 μ.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam, ad Bergsbrunna in Uplandia.

*41. S. DENTICULATUM (Näg.) Archer (in Pritch. Infus. pag. 738; *Phycastrum denticulatum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 128, tab. VIII, C, fig. 3).

Hab. ad Vaksala prope Upsaliam. In "Rackarebergen" prope Holmiam.

42. S. monticulosum Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 226; in Ralfs Brit. Desmid. pag. 130, tab. XXXIV, fig. 9).

Long. s. acul. 0,00136″ = 34,5 μ; c. acul. 0,00185″ = 47 μ; Lat. s. acul. 0,00146″ = 37 μ; c. acul. 0,0017″ = 43 μ; Lat. isthmi 0,00053″ = 13,5 μ.

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd et Femsjö.

43. S. spongiosum Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 229; Ralfs Brit. Desmid. pag. 141, tab. XXIII, fig. 4; *Phycastrum Griffithsianum* Nägeli Gatt. einzell. Alg. pag. 128, tab. VIII, C, fig. 2).

Forma tri- et tetragona.

Zygosporæ globosæ, aculeis numerosis, apice furcatis vel bis dichotomis, munitæ.

Diam. zygosp. acul. exclus. 0,0022″ = 56 μ; Long. acul. usque 0,00094″ = 24 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam (c. zygosp.) et ad Noor in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Wirestorp in Smolandia.

**44. S. pseudocrenatum nov. sp.

S. submediocre, quarta fere parte longius quam latius, subovale, apice utroque subtruncatum, medio profunde constrictum, sinu lineari angustissimo; semicellulæ subsemicirculares, margine ventrali recto, laterali utroque verrucis truncato-emarginatis nonnullis subcrenato, dorso obsolete croso, angulis (inferioribus) subtruncatis; a vertice visæ trigonæ, lateribus leviter retusis, angulis late subtruncatis, granulis ternis instructis.

Long. 0,0015—165″ = 38—42 μ; Lat. 0,00118—138″ = 30—35 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ. — Tab. IV, fig. 4.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Räppe in Smolandia.

Proximum est *S. crenato* Bailey (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 215, tab. XXXV, fig. 17), quod differt emarginatura mediana ampla, rotundata et semicellulis e basi cuneata flabelliformibus.

*45. S. scabrum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 214, tab. XXXV, fig. 20).

Long. 0,0013″ = 33 μ; Lat. = Long.; Lat. isthmi 0,00038″ = 9,7 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

*46. S. gemelliparum Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 230 (192). tab. IV, fig. 54).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Tantum unum individuum a me inventum est.

47. S. furcatum (Ehrenb.) Bréb. (Liste pag. 136; Archer in Pritch. Infus. pag. 743 (optima descriptio!); *Xanthidium furcatum* Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 318; Infus. pag. 148, tab. X, fig. 25 b; *Staurastrum spinosum* Ralfs Brit. Desmid. tab. XXII, fig. 8 a, b).

Forma 3—4-gona.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Femsjö, Unnaryd et Wirestorp in Smolandia.

*48. S. senarium (Ehrenb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 216; Archer in Pritch. Infus. pag. 743; *Desmidium senarium* Ehrenb. Verbr. pag. 124, tab. IV, fig. 22).

Formâ ipsâ corporis et magnitudine cum priori congruit, sed a fronte visum differt processibus in medio semicellularum inter angulares binis interpositis et dorsalibus respondentibus; a vertice autem visum præter processus singulos angulares et binos intra angulum quemque paullo intra marginem lateralem positos (qui in specie præcedenti quoque adsunt), processibus in margine ipso laterali inter angulos binis collocatis instructum est. Processus igitur hujus speciei angulis quinquies plures sunt, i. e. in semicellula formæ triangularis 15 (6 dorsales, 9 mediani (= singuli angulares et bini interangulares)), formæ quadrangularis 20 (8 dorsales, 12 mediani (= singuli angulares et bini interangulares)) adsunt. Sicut in specie priori processus apice sunt furcati vel tri—quadrifidi membranaque prorsus glabra est.

Long. proc. exclus. 0,0014—165″ = 36—42 μ; Lat. proc. exclus. 0,0012—14″ = 30—36 μ; Lat. isthmi 0,00067—75″ = 17—19 μ; Long. process. 0,0002—7″ = 5—18 μ.

Forma tetragona:

Hab. ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Forma trigona processibus valde abbreviatis.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

Formâ tetragonâ et specie præcedenti, quacum confusa ab auctoribus est commixtaque, forma trigona multo est apud nos frequentior.

**49. S. forficulatum nov. sp.

S. mediocre, paullo latius quam longius (exclus. acul.), profunde constrictum, sinu sublineari; semicellulæ (formæ trigonæ) subtrapeziceæ dorso truncato vel (formæ tetragonæ) subellipticeæ dorso late rotundato, ventre convexæ, utroque fine angustatæ, paullulum productæ et in aculeos binos divergentes

profunde fissæ, margine ad utrumque polum versus verrucis emarginato-truncatis (vel processibus bifidis brevissimis) ornatæ; a vertice visæ tri—tetragonæ lateribus leviter retusis, angulis in aculeum productis, ad angulos verrucis (vel processibus) similibus instructæ.

Long. 0,0018–19″ = 46—48 μ; Lat. s. acul. 0,00213–22″ = 54—56 μ; c. acul. 0,00284–295″ = 72—75 μ; Long. acul. 0,00039–47″ = 10—12 μ; Lat. isthmi 0,00063″ = 16 μ. — Tab. IV, fig. 5.

Hab. ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp in Smolandia.

Speciei priori proxima est sine dubio nostra species, sed differt angulis quasi forficula instructis margineque verrucis emarginato-truncatis ornato.

50. S. polymorphum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 135, tab. XXII, fig. 9).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. Ad Hoby et Lösen in Blekingia (Cleve).

*51. S. oxyacantha Archer (in Nat. Hist. Review vol. VI (1859), pag. 462, tab. XXXIII, fig. 1 et 2, sec. Rabenh. in Hedwigia pag. 119; Pritch. Infus. pag. 742).

Long. 0,00116″ = 29,5 μ; Lat. 0,00157″ = 40 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Noor in Uplandia.

β. bicorne nov. var.

Var. paullo major quam forma α, semicellulis a fronte visis introrsum valde ventricosis, dorso paullum producto, truncato, utrimque aculeis singulis oblique sursum versis ornato, angulis inferioribus rotundatis, superioribus in cornu gracile, elongatum, incurvum, margine profunde dentato-crenatum, apice furcatum, productis; semicellulæ a vertice visæ rhomboideæ, utroque polo in cornu elongatum, strictum, gracile, margine subintegrum, apice acuminatum, productæ, paullo intra cornu utrumque aculeis binis instructæ; a latere visæ fere hexagono-orbiculares, utrimque paullum tumidæ, dorso aculeis 4 (tantum 2 visibilibus) ornatæ. Latitudo isthmi quadrans longitudinis corporis (s. acul.). Membrana glabra.

Long. s. acul. 0,00165″ = 42 μ; c. acul. 0,002″ = 51 μ; Lat. s. corn. 0,00087–94″ = 22—24 μ; c. corn. 0,0022–32″ = 56—82 μ; Long. corn. usque 0,00118″ = 30 μ; Long. acul. dorsal. 0,0003″ = 7,7 μ; Lat. isthmi 0,00037–43″ = 9,5—11 μ; Crass. 0,00094″ = 24 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

S. grallatorio Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 228 (190), tab. IV, fig. 52) simillima hæc varietas est, sed differt cornibus incurvis nec tam gracilibus aculeisque dorsalibus.

*52. S. controversum Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 228; Ralfs Brit. Desmid. pag. 141, tab. XXIII, fig. 3).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

53. S. aculeatum (Ehrenb.) Menegh. (Synops. pag. 226; Ralfs Brit. Desmid. pag. 142, tab. XXIII, fig. 2; *Desmidium aculeatum* Ehrenb. Infus. pag. 142, tab. X, fig. 12).

Zygosporæ globosæ, aculeis longis, apice furcatis vel dichotomis, armatæ.

Diam. zygosp. s. acul. $0{,}0017'' = 44\ \mu$; Long. acul. $0{,}0007'' = 18\ \mu$.

Hab. ad Noor in Uplandia (c. zygosp.). Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Wirestorp in Smolandia.

*54. S. Sancti Sebaldi Reinsch (*Didymidium* (Staur.) *Sancti Sebaldi* Reinsch Algenflora pag. 175, tab. XI, fig. 1).

Forma tri- et tetragona.

Hab. in "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam, prope Vaksala et ad Noor in Uplandia. Ad Räppe in Smolandia.

55. S. vestitum Ralfs (Brit. Desmid. pag. 143, tab. XXIII, fig. 1).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

56. S. gracile Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XV, pag. 155, tab. XI, fig. 3, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 136, tab. XXII, fig. 12).

Hab. ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

β. bicorne Bulnh. (in Hedwigia pag. 51, tab. IX, fig. 2).

Hab. in "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

57. S. paradoxum Meyen (Nov. Act. Leop. Holm., vol. XIV, pag. 43, fig. 37, 38 (1828), sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 138, tab. XXIII, fig. 8).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

58. S. tetracerum (Kütz.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 137, tab. XXIII, fig. 7; *Micrasterias tetracera* Kütz. Synops. Diatom. in Linnæa 1833, pag. 602, fig. 83, 84, sec. Ralfs).

Zygosporæ globosæ, processibus (circiter 16) elongatis, basi dilatatis, apice furcatis vel bis dichotomis, ornatæ.

Diam. zygosp. s. process. 0,00063″ = 16 μ; c. process. 0,0012″ = 30 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (c. zygosp.) et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia.

Forma trigona:

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

**59. S. Cerastes nov. sp.

S. submagnum, paullo latius quam longius; semicellulæ (introrsum) lunatæ, sed in media parte introrsum subconico-ventricosæ, utrimque in cornu robustum, non longissimum, incurvum, apicem subobtusum versus attenuatum, margine exteriore (convexo) verrucis numerosis, emarginato-bifidis, sed apicem cornus versus integris et papillæformibus dense obsitum, margine interiore (concavo) nudum, angustato-productæ, ad basin utrimque papilla instructæ; a vertice visæ tri-quadrangulares, angulis in cornu validum, strictum, e basi lata apicem tridentatum versus valde attenuatum, productis, margine et intra marginem verrucis emarginato-bifidis, apicem cornuum versus integris, papilliformibus et densissimis ornatæ.

Long. 0,00205–217″ = 52—55 μ; Lat. c. corn. 0,00248–284″ = 63—72 μ; Lat. isthmi 0,00039–47″ = 10—12 μ. — Tab. IV, fig. 6.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia, copiose. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

S. cyrtocero Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag 139, tab. XXII, fig. 10) maxime affine est.

*60. S. Arachne Ralfs (Annals of Nat. Hist. vol. XV, pag. 157, tab. XI, fig. 6 (1845), sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 136, tab. XXIII, fig. 6).

Hab. in "Lassby backar" et "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Carlberg prope Holmiam (Cleve). Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Huseby (Cleve), Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp. Ad Lösen in Blekingia (Cleve).

**61. S. Ophiura nov. sp.

S. permagnum, medio utrimque leviter emarginatum; semicellulæ fere obovatæ, sursum sensim dilatatæ, in apice convexo papillis bifidis ornatæ, angulis inferioribus papilla instructis, superioribus in radium valde elongatum, gracile, subachroum, strictum vel leviter incurvum, margine subtiliter denticulatum, apice uni-bidentatum productis; semicellulæ a vertice visæ 7-(raro 6- vel 8-)radiatæ, radiis prælongis, apicem tridentatum versus sen-

sim sensimque attenuatis, margine serrato-dentatis, in centro coronula papillarum 7 (raro 6 vel 8) quadrifidarum ornatæ.

Long. 0,00256—323″ = 65—82 μ; Lat. exclus. rad. 0,00134—157″ = 34—40 μ; inclus. rad. 0,0055—61″ = 140—155 μ; Maxima long. rad. 0,0025″ = 63 μ; Lat. isthmi 0,00087″ = 22 μ. — Tab. IV, fig. 7.

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

Formæ hexagonæ et octagonæ tantum singula individua inventa sunt.

Habitu est *Staurastri Arachnes* Ralfs, sed multis partibus majus et papillis dorsalibus et basalibus distinctum.

*62. S. Arctiscon (Ehrenb.) (*Xanthidium Arctiscon**) Ehrenb. Verbr. pag. 138; *Xanthidium* N:o 2 Bailey in Silliman American Journal of Sc. and Arts, vol. XLI, 1841, pag. 291, tab. III, fig. 15, sec. Ehrenb. l. c.).

Descriptio ad specimina Succica delineata:

S. permagnum, modice constrictum, sinu extrorsum valde ampliato; semicellulæ subglobosæ, paullum depressæ, sub dorso processibus senis oblique sursum versis, in media parte novenis**) extrorsum directis coronatæ, processibus omnibus prælongis, æquilongis, subachrois, rectis, margine 4-denticulatis, apice trifidis; a vertice visæ 9-gonæ, angulis in processum prælongum, rectum, margine denticulatum, apice trifidum, productis, in medio processibus 6 similibus præditæ. Membrana subtiliter punctata. Longitudo corporis (s. proc.) diametro transversali (s. proc.) tertia parte major. Latitudo isthmi dimidium latitudinis cellulæ (exclus. proc.).

Long. s. process. 0,0025″ = 64 μ; c. proc. 0,0051″ = 130 μ; Lat. s. proc. 0,0019″ = 48 μ; c. proc. = Long. c. proc.; Long. proc. 0,00157—173″ = 40—44 μ; Lat. isthmi 0,001″ = 25 μ. — Tab. IV, fig. 8.

Hab. ad Unnaryd, Femsjö, Wirestorp et Räppe in Smolandia.

Figuram quidem citatam, a cl. Bailey deditam, non vidi, sed tantum ejus exemplum, ex quo et e descriptione a cl. Ehrenberg delineata concludere posse mihi videor, formam a me inventam huc pertinere.

63. S. furcigerum Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 226; *Didymocladon furcigerus* Ralfs Brit. Desmid. pag. 144, tab. XXXIII, fig. 12).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd.

---

*) Ex "ἄρκτος" (= ursus), non ex "ἄρτος" (= panis) deminutum esse nomen specificum videtur, quare Arctiscon scribendum est, non Artiscon (ut Ralfs aliique post eum scripserunt).

**) In semicellula a fronte visa tantum 5 conspiciuntur.

*64. S. pseudofurcigerum Reinsch (*Didymidium* (Staur.) *pseudofurcigerum* Reinsch Algenflora pag. 169, tab. XI, fig. 2; *Desmidium eustephanum* Ehrenb. Verbr. pag. 124, tab. IV, fig. 23?).

Forma tri- et tetragona.

Long. s. process. 0,00146—217″ = 37—55 μ; Lat. s. proc. 0,00134—189″ = 34—48 μ; Long. proc. 0,0004—0,0013″ = 10—33 μ; Lat. isthmi 0,00047—79″ = 12—20 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam. Ad Unnaryd, Femsjö et Räppe in Smolandia.

A specie præcedenti hæc nihil differt nisi quod processus dorsales binos intra angulum quemque positos habet (in priori singuli in angulis, intra angulos singuli sunt processus); processus igitur dorsales formæ trigonæ 6 sunt, tetragonæ 8.

*65. S. sexangulare (Bulnh.) (*Didymocladon sexangularis* Bulnh. in Hedwigia pag. 51, tab. IX A, fig. 1; in Rabenh. Alg. N:o 1224!).

Quum hæc species ad *S. furcigerum* Bréb., a quo optime distincta mihi quidem videtur, ab auctoribus nonnullis relata eam ob rem fortasse sit, quod nec diagnosin ejus nec figuras satis accuratas Bulnheim dedit, descriptio ad specimina Suecica delineata illustrataque figuris hoc loco danda mihi visa est.

S. mediocre vel magnum, modice constrictum, sinu acutangulo ampliato; semicellulæ (plus minus) depresse globosæ, dorso truncatæ, ventre convexæ, utrimque in processum, in radios binos (raro ternos) valde divergentes (alterum extrorsum, alterum oblique sursum versos) profundissime fissum, late protractæ, radiis elongatis, achrois, margine subtiliter 3—4-denticulatis, apice 3—4-fidis; a vertice visæ 4-, 5-, 6- vel 7-gonæ, angulis paullum protractis, in radios binos (raro ternos) elongatos, alterum alteri oblique superpositos, margine denticulatos, apice tri-quadrifidos, profunde fissis, inter angulos retusæ et (intra marginem) granulis nonnullis ornatæ. Longitudo corporis (s. rad.) diametro transversali (s. proc. et rad.) circiter tertia parte major.

Long. s. rad. 0,00173—236″ = 44—60 μ; c. rad. 0,004″ = 100 μ; Lat. s. rad. et proc. 0,0011—17″ = 28—43 μ; s. rad. c. proc. 0,00177—213″ = 45—54 μ; c. rad. 0,0035—46″ = 90—116 μ; Maxima long. rad. 0,00126″ = 32 μ; Lat. isthmi 0,00063—87 = 16—22 μ. — Tab. IV, fig. 9.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Femsjö, Räppe et Wirestorp in Smolandia.

A *Staur. furcigero* Bréb. differt corpore ipso semicellularum subgloboso, non elliptico, ventre convexo, non subreniformi, incisura mediana acutangula, dilatata,

non (sub)lineari, brachiis omnibus lateralibus, nullis dorsalibus, sensim sensimque attenuatis, subtiliter non dense denticulatis, (in *S. furcigero* processus breviores sunt, e basi crassa valde attenuati et granulis dentiformibus numerosis valde exasperati).

B. PLEURENTERIUM nov. subgen.

Massa chlorophyllacea lateralis, e tæniis vel laminis parietalibus,*) nucleos amylaceos plures involventibus, formata.

66. S. TUMIDUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 126, tab. XXI, fig. 6; *Binatella tumida* Bréb. Alg. Falaise pag. 66, sec. Ralfs l. c.).

Teniæ chlorophyllaceæ lateri cuique cellulæ quaternæ adjacentes.

Zygosporæ ovoideæ, membrana admodum crassa, muricibus conicis obtusis sparsis obsita.

Long. zygosp. s. muric. 0,0069″ = 176 μ; Lat. s. muric. 0,0036″ = 92 μ; Long. muric. 0,00055″ = 14 μ. — Tab. IV, fig. 10.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia (forma 3- et 4-gona et zygosp.). Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Huseby in Smolandia (CLEVE).

Structura massæ chlorophyllaceæ fere eadem ac in *S. longispino* (Bail.) Archer.

*67. S. GRANDE Bulnh. (in Hedwigia pag. 51, tab. IX A, fig. 14).

Descriptio ad specimina Suecica delineata:

S. magnum, tam longum quam latum, sinu profundo acutangulo; semicellulæ ellipticæ, utroque fine obtusæ; a vertice visæ tri-quadrangulares, lateribus leviter retusis, angulis obtusangulis. Parietes cellulæ laminis chlorophyllaceis binis intus obducti. Membrana subtiliter punctata.

Long. 0,0033–35″ = 84—88 μ; Lat. 0,00315–323″ = 80—82 μ; Lat. isthmi 0,00087′ = 22 μ.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Femsjö et Räppe.

Massa chlorophyllacea cellulæ e vertice visæ sic fere formata quidem est, ut in figura (sinistra) citata, sed valde est observandum, nucleum amylaceum centralem nullum adesse.

Forma paullo major semicellulis paullo longioribus, dorso minus convexis; a vertice visa lateribus magis retusis angulisque subtumidis, 3—4-gona.

Long. 0,00394″ = 100 μ; Lat. 0,0041″ = 104 μ; Lat. isthmi 0,00098′ = 25 μ. — Tab. IV, fig. 11.

Hab. ad Räppe in Smolandia.

---

*) Unde nomen genericum (πλευρά = latus; ἔντερα = intestina).

Quod ad structuram massæ chlorophyllaceæ pertinet, hæc forma a fronte visa cum *X. armato* Bréb. valde congruit.

Ad characteres, quibus distinctam a *S. mutico* Bréb. hanc speciem esse Bulnheim (l. c.) exposuit, id accedit, quod massa chlorophyllacea lateralis est.

68. S. longispinum (Bailey) Archer (in Pritch. Infus. pag. 743 (descriptio exacta!); *Didymocladon? longispinum* Bailey Micr. Observ. pag. 28 et 36, tab. I, fig. 17; *Staurastrum bidentatum* Wittr. Anteckn. pag. 16, fig. 7).

Forma 3—4-gona.

Tæniæ chlorophyllaceæ binæ laterales, in angulis singulæ.

Long. 0,00378–425″ = 96—108 μ; Lat. s. spin. 0,00354–402″ = 90—102 μ; Maxima long. spin. 0,0012″ = 30 μ; Lat. isthmi 0,00165–18″ = 42—46 μ.

Tab. V, fig. 1.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (cel. Prof. J. E. Areschoug, qui hac in terra primus invenit) et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Femsjö et Räppe. In Ostrogothia ad Bolltorp.

A forma Americana nihil differt Suecica, efformata quidem, nisi quod spinas præ magnitudine corporis ipsius multo breviores habet; a fronte enim visa quum semicellulas plus minus triangulari-ellipticas, dorso subrectas vel leviter convexas, a vertice autem visa latera subrecta (plerumque levissime retusa, nonnumquam subconvexa) habeat, cum forma Americana (de qua cl. Archer l. c. dicit: "Segments in frond view triangular, truncate on outer margin .....; end view ..... side straight.") habitu corporis ipsius admodum congruere nobis videtur; ad quod quum accedit, quod massa chlorophyllacea in utraque forma eodem modo est formata, quod e figura a cl. Bailey l. c. dedita cum nostra comparata plane elucet, forma a nobis inventa et infra delineata ad speciem illam Baileyanam neglecta spinarum longitudinis dissimilitudine jure relata esse nobis quidem videtur.

S. bidentatum Wittr. huc pertinere nec aliud esse quam formam non satis evolutam pro certo habemus; sed valde observandum est, figuram a cl. Wittrock l. c. datam, cetero optimam illam quidem et accuratam, tamen, quod ad structuram massæ chlorophyllaceæ pertinet, naturæ congruentem, quantum quidem ex individuis plurimis a nobis inventis judicari liceat, sine dubio non esse.

*69. S. Brasiliense Nordst. (Desmid. Brasil. pag. 227 (189), tab. IV, fig. 39).

Forma subduplo major, e vertice visa 5—6-gona.

Long. s. acul. 0,00276–374″ = 70—95 μ; c. acul. 0,0045–63″ = 114—160 μ; Lat. s. acul. 0,0026–315″ = 66—80 μ; c. acul. 0,00425–552″ = 108—140 μ; Lat. isthmi 0,00118–138″ = 30—35 μ. — Tab. V, fig. 2.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Wirestorp et Räppe.

Hac in specie massa chlorophyllacea hoc modo formata nobis visa est:

Ad centrum dorsi semicellularum nuclei amylacei bini adsunt (in semicellulis a vertice visis tantum singuli conspiciuntur); unde tæniæ chlorophyllaceæ secundum dorsum, angulum quemque versus, singulæ radiantes, angulos secutæ, basin semicellularum versus pergunt. Forma igitur massæ chlorophyllaceæ inter centralem et lateralem fere intermedia dici potest; nuclei enim amylacei bini, quamvis subdorsales, tamen subcentrales adsunt, tæniæ autem chlorophyllaceæ parietales tot, quot anguli.

70. S. SEXCOSTATUM Bréb. (in Menegh. Synops. pag. 228; in Ralfs Brit. Desmid. pag. 129, tab. XXIII, fig. 5).

Hab. ad Carlberg prope Holmiam (CLEVE).

Tum e figura citata, tum e figura a cl. HASSALL (in Brit. Alg. tab. LXXXV, fig. 6) data concludere posse mihi visus sum, massam chlorophyllaceam hujus speciei lateralem esse, speciemque huic subgeneri igitur esse adnumerandam.

**71. S. MUTILATUM nov. sp.

S. mediocre, diametro circiter tertia parte longius, non profunde constrictum sinu obtusangulo; semicellulæ subhexagonæ, e basi admodum lata ad medium dilatatæ, dorso truncatæ vel subconvexæ, lateribus et superioribus et inferioribus subrectis, utroque fine obtusangulæ, verrucis denticulatis in series transversas, basalem et medianam, dispositis, supra medium sparsis, ornatæ; a vertice visæ orbiculari- 4—5-gonæ, angulis obtusis, lateribus leviter convexis, margine sub-eroso-verrucosæ, verrucis (laterum) bi-(angulorum) tri-quadridentatis, intra marginem verrucis similibus sparsis, in centro nullis præditæ.

Long. $0{,}00225–248'' = 57—63\ \mu$; Lat. $0{,}00165–173'' = 42—44\ \mu$; Lat. isthmi $0{,}001'' = 26\ \mu$. — Tab. V, fig. 3.

Hab. in colli inter Upsaliam et Vaksala sito.

A fronte visum habitu fere est speciei præcedentis, sed a vertice visum differt lobis nullis (unde nomen specificum) lateribusque convexis. Similitudinem, quæ inter has 2 species interest, massæ chlorophyllaceæ quoque esse, verisimile videtur, quare ad hoc subgenus referendam nostram speciem esse putavimus.

VI. XANTHIDIUM Ehrenb.

(Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 317, mut. char.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 111).

Massa chlorophyllacea lateralis, e laminis parietalibus formata.

A. SCHIZACANTHUM nov. subgen.

Cellulæ processibus peripheriicis brevibus apice tri-quadrifidis*) armatæ. Laminæ chlorophyllaceæ 4, nucleos amylaceos nonnullos invol-

*) Ex quo nomen genericum (σχίζω = findo; ἄκανθα = spina).

ventes. Zygosporæ globosæ inermes, membrana scrobiculata. (Vide tab. V, fig. 4 et Ralfs Brit. Desmid. tab. XVIII, fig. g!).

1. X. ARMATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 112, tab. XVIII; *Cosmarium armatum* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 218).

Diam. zygosp. 0,00394—425″ = 100—108 μ. — Tab. V, fig. 4.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia (c. zygosp.). In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd, Huseby (CLEVE) et Räppe. In Blekingia ad Lösen (CLEVE).

Laminæ chlorophyllaceæ in semicellula a fronte et a latere visa rima dilutiore longitudinali, in semicellula a vertice visa cruce dilutiore discretæ sunt.

Membranâ zygosporarum scrobiculatâ hæc species a ceteris omnibus Desmidiaceis longe diversa cum Zygnemaceis et Mesocarpaceis quibusdam congruit.

Ad novum *Staurastri* subgenus *Pleurenterium* hæc species structura massæ chlorophyllaceæ prope accedit.

B. HOLACANTHUM nov. subgen.

Cellulæ aculeis simplicibus*) armatæ. Laminæ chlorophyllaceæ 4 vel (in forma triquetra) 6, nucleos amylaceos singulos involventes. Zygosporæ globosæ, aculeis simplicibus longis armatæ. (Vide tab. V, fig. 5 et 6 et Cramer in Hedwigia pag. 63, tab. XII, fig. 2!).

2. X. ACULEATUM Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 318; Ralfs Brit. Desmid. pag. 113, tab. XIX, fig. 1).

Diam. zygosp. 0,0026—276″ = 66—70 μ; Long. acul. 0,0013″ = 33 μ.

Tab. V, fig. 5.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

In "Kungsparken" prope Upsaliam zygosporas complures inveni.

3. X. FASCICULATUM Ehrenb. (Infus. (ex parte) tab. X, fig. 24 b; *X. fasciculatum β. polygonum* Ralfs Brit. Desmid. pag. 114, tab. XIX, fig. 4).

Hab. ad Noor in Uplandia.

4. X. ANTILOPÆUM (Bréb.) Kütz. (Spec. Alg. pag. 177, sec. Bréb. Liste pag. 134; *Cosmarium antilopæum* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 218; *Xanthidium fasciculatum α.* Ralfs Brit. Desmid. tab. XX, fig. 1; *Xanthidium fasciculatum* Ehrenb. Infus. (ex parte) tab. X, fig. 24 a).

Diam. zygosp. 0,0023″ = 58 μ; Long. acul. 0,00079″ = 20 μ.

*) Unde nomen genericum (ὅλος = integer; ἄκανθα = spina).

Hab. in "Lassby backar" (c. zygosp.) et "Kungsparken" prope Upsaliam; ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Nacka prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö in Smolandia.

β. TRIQUETRUM nov. var.

Var. a vertice visa trigona, lateribus rectis vel levissime convexis, medio in callum fuscens incrassatis, angulis latis, emarginatura rotundata in aculeos binos firmos fissis, intra angulos aculeis similibus binis instructa. Laminæ chlorophyllaceæ 6.

Long. s. acul. 0,0032—35″ = 81—89 μ; Lat. s. acul. 0,00268—284″ = 68—72 μ. — Tab. V, fig. 6.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe, Svenarum. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

5. X. CRISTATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 115, tab. XIX, fig. 3 a, b, c).

Diam. zygosp. 0,002″ = 51 μ; Long. acul. 0,00063″ = 16 μ.

Hab. ad Unnaryd (c. zygosp.), Femsjö, Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

β. UNCINATUM Bréb. (l. c. fig. 3 d, e, f).

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam.

VII. TETMEMORUS Ralfs.

(In Annals of Nat. Hist. vol. XIV, pag. 256, sec. Wittr. Anteckn. pag. 19).

1. T. BREBISSONII (Menegh.) Ralfs (in Annals of Nat. Hist. vol. XIV, tab. VIII, fig. 1, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 145, tab. XXIV, fig. 1 a—c; *Closterium Brebissonii* Menegh. Synops. pag. 236).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Smolandia ad Unnaryd.

*β. MINOR De Bary (Conjugat. pag. 73, tab. V, fig. 9).

Hab. in "Lassby backar" et "Kungsparken" prope Upsaliam; ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

2. T. GRANULATUS (Bréb.) Ralfs (in Annals of Nat. Hist. vol. XIV, tab. VIII, fig. 2, sec. Aut.; *Closterium granulatum* Bréb. in Menegh. Synops. pag. 236).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd et Femsjö.

*3. T. MINUTUS De Bary (Conjugat. pag. 74, tab. V, fig. 10).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna, raro.

VIII. CLOSTERIUM Nitzsch.

(Beitrag zur Infusorienkunde pag. 60 et 67, sec. Aut.).

*1. C. OBTUSUM Bréb. (Liste pag. 154, tab. II, fig. 46).

Long. 0,002″ = 50 μ; Lat. 0,0002″ = 5 μ.

Hab. ad Carlberg prope Holmiam (CLEVE).

2. C. DIDYMOTOCUM Corda (Almanach de Carlsb. 1835, pag. 125, tab. V, fig. 64, 65, sec. Ralfs; Ralfs Brit. Desmid. pag. 168, tab. XXVIII, fig. 7).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Svenarum, Huseby (CLEVE) et Unnaryd.

3. C. STRIOLATUM Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 68; Infus. pag. 95, tab. VI, fig. 12).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Räppe, Unnaryd et Femsjö in Smolandia. In Blekingia ad Hoby (CLEVE).

4. C. INTERMEDIUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 171, tab. XXIX, fig. 3).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. 0,0021″ = 54 μ.

Hab. ad Noor in Uplandia (c. zygosp.). Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Räppe, Unnaryd et Femsjö.

*5. C. REGULARE Bréb. (Liste pag. 148, tab. II, fig. 35).

Striæ longitudinales circiter 15; mediæ transversæ 2.

Diam. 0,00083–87″ = 21—22 μ; Long. decies-undecies major.

Hab. in "Lassby backar" (CLEVE) et "Kungsparken" prope Upsaliam. Ad Femsjö in Smolandia.

**6. C. ARCHERIANUM nov. sp. Cleve mscr.

C. anguste lanceolatum, decies-undecies longius quam latius, valde æqualiter curvatum, semilunare vel subsemicirculare, latere ventrali non tumidum, utrimque in apicem subobtusum, plus minus porrectum, sensim æqualiter attenuatum, in media parte striis transversalibus 2—4 instructum. Mem-

brana luteolo-fuscescens, longitudinaliter striata, striis circiter 10. Nuclei amylacei in serie una dispositi, locello indistincto corpusculum unicum includente.

Long. 0,0077—90″ = 196—230 μ; Lat. 0,00073—84″ = 18,5—21,3 μ.

Tab. V, fig. 13.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Svenarum, Räppe et Femsjö.

Habitu est *Cl. arcuati* Bréb., apicibus *Cl. porrecto* Nordst. propius, membranâ striatâ ad *Cl. regulare* Bréb. et *Cynthia* De Not. prope accedens.

In Smolandia cl. P. T. CLEVE hanc speciem detexit.

Hoc opusculum specie in honorem cl.i ARCHER, algologi præstantissimi, nominata ornare licitum esse, valde me juvat.

*7. C. CYNTHIA De Not. (Elementi pag. 65, tab. VII, fig. 71).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Long. cell. 0,0041—63″ = 104—160 μ; Lat. 0,00043—70″ = 11—18 μ; diam. zygosp. 0,0011—12″ = 28—31 μ.

Hab. in "Lassby backar" (c. zygosp.) et "Norby skog" prope Upsaliam. Ad Svenarum et Räppe in Smolandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Est quasi forma striata *Closterii Jenneri* Ralfs.

Specimina Suecica Italicis plerumque sunt paullo minora.

8. C. COSTATUM Corda (Almanach de Carlsbad 1835, pag. 124, tab. V, fig. 61—63, sec. Aut.).

Zygosporæ globosæ—ovoïdeo-globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. 0,004—47″ = 100—120 μ.

Hab. ad Noor in Uplandia (c. zygosp.). Ad Svenarum, Unnaryd et Femsjö in Smolandia. Ad Hoby in Blekingia (CLEVE).

9. C. ANGUSTATUM Kütz. (Phycol. Germ. pag. 132, sec. Ralfs; Ralfs Brit. Desmid. pag. 172, tab. XXIX, fig. 4).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Huseby (CLEVE), Unnaryd, Femsjö et Svenarum in Smolandia.

10. C. JUNCIDUM Ralfs (Brit. Desmid. pag. 172, tab. XXIX, fig. 6).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö et Räppe.

*11. C. DIRECTUM Archer (Description 1862, pag. 249, tab. XII, fig. 23—24).

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (Prof. J. E. ARESCHOUG). Ad Nacka prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Lösen in Blekingia (CLEVE). In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö et Räppe.

12. C. Lunula (Müller) Nitzsch (Beitrag zur Infusorienkunde, 1817, pag. 60 et 67, sec. Wittr. Anteckn.; *Vibrio Lunula* Müller Naturforscher XX, 1784, pag. 142, sec. Aut.).

Hab. in Smolandia ad Svenarum, Unnaryd et Femsjö. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

13. C. acerosum (Schrank) Ehrenb. (Infus. pag. 92, tab. VI, fig. 1; *Vibrio acerosus* Schrank Fauna Boica, pag. 47, 1803, sec. Ralfs).

Hab. ad Carlberg prope Holmiam (Cleve).

14. C. lanceolatum Kütz. (Phycolog. Germ. pag. 130, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 165, tab. XXVIII, fig. 1; non Cleve Bidrag pag. 495, tab. IV, fig. 7).

Hab. in horto botanico Upsaliensi, copiose.

*15. C. turgidum Ehrenb. (Infus. pag. 95, tab. VI, fig. 7; Ralfs Brit. Desmid. pag. 165, tab. XXVII, fig. 3).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

16. C. Pritchardianum Archer (Description 1862, pag. 250, tab. XII, fig. 25—27; *C. lanceolatum* Cleve Bidrag pag. 495, tab. IV, fig. 7).

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam.

17. C. lineatum Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 238; Infus. pag. 96, tab. VI, fig. 8).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Svenarum, Unnaryd et Femsjö. Ad Hoby in Blekingia (Cleve).

Zygosporæ, quas ad Bergsbrunna complures inveni, duplices omnes fuerunt membrana valde incrassata, evidenter bilamellosa.

*18. C. strigosum Bréb. (Liste pag. 153, tab. II, fig. 43).

Long. 0,0063—94″ = 160—240 μ; Lat. 0,00039—63″ = 10—16 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam. Ad Carlberg prope Holmiam (Cleve).

*19. C. attenuatum Ehrenb. (Infus. pag. 94, tab. VI, fig. 4; Ralfs Brit. Desmid. pag. 169, tab. XXIX, fig. 5).

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Svenarum et Unnaryd.

*20. C. macilentum Bréb. (Liste pag. 153, tab. II, fig. 36).

Diam. 0,00049″ = 12,5 μ; Longitudo 24—42-es major.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia, copiose.

Species valde insignis tum habitu ipso, tum membrana subachroa, pallide luteo-rufescente et suturis singulis—quaternis (striæ transversæ non sunt appellandæ) semel—quater ornata.

*21. C. MALINVERNIANUM De Not. (in Erbario crittico Italieno N:o 1254, sec. Rabenh. Fl. Eur. Alg. pag. 131).

Medio vix tumidum, apicibus minus obtusis quam in *C. Ehrenbergii* Menegh., membrana rufescente, longitudinaliter subtiliter striata, in media parte striis transversalibus 4.

Long. 0,0157″ = 400 μ; Lat. 0,0025″ = 64 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam, raro.

22. C. MONILIFERUM (Bory) Ehrenb. (Infus. pag. 90, tab. V, fig. 16; *Lunulina monilifera* Bory Encycl. méth. Hist. Nat. des Zoophyt. 1824, tab. III, fig. 22, 25 et 27, sec. Aut.).

Hab. in Smolandia ad Svenarum, Räppe et Unnaryd. Ad Hoby in Blekingia (CLEVE).

Copulatio, a CLEVE observata, modo fit eodem, atque in *C. Lunula* (Müller) Nitzsch (vide De Bary Conjugat. pag. 54 et 55, tab. V, fig. 24—30!) et *C. Ehrenbergii* Menegh. (vide Pritch. Infus. pag. 14, tab. XVI, fig. 10—14!) evolutioque zygosporarum eadem fere est ac illa, quam MORREN in *C. Ehrenbergii* (Pritch. Infus. l. c. fig. 16—19) observavit, sed zygosporæ quiescunt nec moventur. Vide tab. V, fig. 14!

23. C. LEIBLEINII Kütz. (Synops. Diatom. in Linnæa 1833, pag. 596, sec. Ralfs; Ralfs Brit. Desmid. pag. 167, tab. XXVIII, fig. 4).

Hab. ad Wernamo in Smolandia.

24. C. DIANÆ Ehrenb. (Infus. pag. 92, tab. V, fig. 17).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. 0,0014″ = 36 μ.

Hab. ad Noor in Uplandia (c. zygosp). Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Hoby in Blekingia (CLEVE). In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Svenarum.

*25. C. ARCUATUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 219; Liste pag. 149, tab. II, fig. 38).

Diam. 0,00098″ = 25 μ; Longitudo 11—12-es major.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö et Svenarum.

26. C. Venus Kütz. (Phycol. Germ. pag. 130, sec. Ralfs; in Ralfs Brit. Desmid. pag 220, tab. XXXV, fig. 12).

Long. 0,002″ = 50 μ; Lat. 0,0003″ = 8 μ.

Hab. ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

27. C. Jenneri Ralfs (Brit. Desmid. pag. 167, tab. XXVIII, fig. 6).

Hab. ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

28. C. calosporum Wittr. (Anteckn. pag. 23, fig. 11).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Specimina copulata permulta inveni.

Specimina longitudinaliter striolata nulla vidi nec dubito, quin cl. Wittrock et Nägeli, membranam hujus speciei (puto enim *C. calosporum* Wittr. et *parvulum* Näg. ad unam eandem speciem, a *C. parvulo* De Bary diversam, pertinere) extremo fieri longitudinaliter striatam dicentes, specimina etiam *C. Cynthiæ* De Not. ante oculos habuerint.

29. C. Ralfsii Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 174, tab. XXX, fig. 2).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Unnaryd.

β. hybridum Rabenh. (Fl. Eur. Alg. Sect. III, pag. 135; *C. Ralfsii* Cleve in Rabenh. Alg. N:o 1927).

Long. 0,017″ = 430 μ; Lat. 0,0014″ = 36 μ.

Hab. ad Femsjö et Wirestorp in Smolandia. In Blekingia ad Hoby (Cleve).

30. C. rostratum Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1831, pag. 67; Infus. pag. 97, tab. VI, fig. 10).

Hab. ad Huseby (Cleve), Svenarum et Unnaryd in Smolandia

*31. C. setaceum Ehrenb. (Abh. d. Berl. Ak. 1833, pag. 239; Infus. pag. 97, tab. VI, fig. 11; Ralfs Brit. Desmid. pag. 176, tab. XXX, fig. 4).

Hab. ad Huseby (Cleve), Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

32. C. Kützingii Bréb. (Liste pag. 156, tab. II, fig. 40).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Unnaryd in Smolandia.

33. C. pronum Bréb. (Liste pag. 157, tab. II, fig. 42; Cleve Bidrag, pag. 495, tab. IV, fig. 8).

Long. 0,0138″ = 350 μ; Lat. 0,00024″ = 6 μ.

Hab. in "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

34. C. DECORUM Bréb. (Liste pag. 151, tab. II, fig. 39).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

35. C. CORNU Ehrenb. (Infus. pag. 94, tab. VI, fig. 5; Ralfs Brit. Desmid. pag. 176, tab. XXX, fig. 6).

Hab. ad Unnaryd in Smolandia.

36. C. ACUTUM (Lyngb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 177, tab. XXX, fig. 5; *Echinella acuta* Lyngbye, Tent. Hydrophyt. Dan. pag. 209, tab. LXIX, G, sec. Ralfs).

Hab. in Smolandia ad Unnaryd.

37. C. GRACILE Bréb. (Liste, pag. 155, tab. II, fig. 45; *C. juncidum*, forma c, Rabenh. Fl. Eur. Alg. Sect. III, pag. 127).

Zygosporæ subquadratæ, angulis rotundatis, in aculeum magis minusve elongatum plerumque protractis.

Diam. cellulæ 0,00023–24″ = 5,8—6 μ; Longitudo 25—30-es major. Long. zygosp. s. acul. 0,0011–118″ = 28—30 μ; Lat. 0,00087″ = 22 μ.

Tab. V, fig. 15.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam (c. zygosp.). In Smolandia ad Räppe, Unnaryd et Femsjö. Ad Bolltorp in Ostrogothia.

Ad *C. gracile* Bréb. pertinere mihi visa est hæc forma, quamvis apicibus non tam subito curvatis paullum diversa; *C. juncido* Ralfs autem varietas adnumeranda nullo modo est, quod multo gracilior striisque prorsus est destituta et quod zygosporas subquadraticas habet, quibus ad *C. Cornu* Ehrenb., *acutum* (Lyngb.) Bréb. et *pusillum* Hantzsch (cujus zygosporæ quadraticæ sunt, teste REINSCHIO in Algenflora pag. 187) prope accedit.

38. C. CERATIUM Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 206, tab. XVI, fig. 21).

Hab. ad Räppe in Smolandia.

*39. C. LINEA Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 206, tab. XVI, fig. 20).

Diam. 0,00035″ = 9 μ; Longitudo 42-es major.

Hab. in "Kungsparken" prope Upsaliam. In "Rackarebergen" prope Holmiam. Ad Räppe in Smolandia.

IX. MESOTÆNIUM Näg.

(Gatt. einzell. Alg. pag. 108).

1. M. BRAUNII De Bary (Conjugat. pag. 74, tab. VII, A, fig. 1—8; *Palmoglœa macrococca* Al. Braun Verjüng. pag. 349, tab. I, sec. De Bary).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

X. CYLINDROCYSTIS Menegh.

(Cenni sulla organografia e fisiol. delle Alg. pag. 5 et 26, 1838, sec. Ralfs; De Bary Conjugat. pag. 74).

1. C. Brebissonii Menegh. (l. c. pag. 5 et 26 (1838), sec. Ralfs; De Bary Conjugat. pag. 74, tab. VII, E; *Penium Brebissonii* Ralfs Brit. Desmid. pag. 153, tab. XXV, fig. 6 (b?) c—h, non a).

   Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

2. C. crassa De Bary (Conjugat. pag. 74, tab. VII, C.

   Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

**3. C.? diplospora nov. sp.

C. magna, diametro duplo longior, subcylindrica, medio levissime constricta, utrumque polum versus sensim sensimque sed levissime dilatata, apicibus late rotundatis; a vertice visa perfecte circularis. Membrana achroa, glabra.

Zygosporæ duplices, compressæ, transverse subrectangulares, angulis exterioribus subporrectis rotundatis, semicellulis residuis.

Long. cell. 0,00236—260″ = 60—66 μ; Lat. 0,00118—130″ = 30—33 μ; Lat. isthmi 0,00106—114″ = 27—29 μ; Lat. zygosp. 0,0026″ = 66 μ; Long. semizygosp. 0,0015—165″ = 38—42 μ. — Tab. V, fig. 7.

Hab. in "Kungsparken" et "Norby skog" prope Upsaliam; ad Bergsbrunna in Uplandia (c. zygosp.). In Smolandia ad Unnaryd.

Cellulis medio quamvis levissime angustatis, massa gelatinosa nulla involutis, zygosporis duplicibus et imprimis formatione zygosporarum (ut enim sæpissime in Desmidiaceis fit, zygosporæ hac in specie quoque tali modo formantur, ut cellulæ copulativæ rima transversa mediana dehiscant et massis protoplasmaticis et chlorophyllaceis per eam effusis et mixtis, in semicellulas dilabantur) a ceteris speciebus huic generi adnumeratis nostra multum differt illa quidem, sed quum structurâ massæ chlorophyllaceæ cum illis prorsus congruat, ad hoc genus interea referenda nobis visa est. Forma formationeque zygosporarum cum *Penio didymocarpo* nov. sp. congruit; habitu autem fere est *P. rufescentis* Cleve, quod tamen a nostra specie differt cellulis angustioribus (diametro $2^1/_2$-plo longioribus), membrana rufescente, punctata et massa chlorophyllacea in laminas longitudinales ex axi centrali radiantes formata.

XI. PENIUM (Bréb.).

(in Ralfs Brit. Desmid. pag. 148 mut. char.; De Bary Conjugat. pag. 73).

Semicellulæ basi non longitudinaliter plicatæ nec tumidæ. Nuclei amylacei singuli—complures.

Ut supra (pag. 7) diximus, perdifficile est hoc genus a *Cosmario* certis characteribus distinguere; quod vero, si *Cosmariorum* sectio 4 *Calocylindrus* De Bary (Conjugat. pag. 72) (exceptis scilicet *Cosm. notabili* Bréb., *annulato* (Näg.) De By et *cylindrico* Ralfs) huc relata erit, cellulis fusiformibus vel plus minus cylindricis, non vel levissime constrictis, a vertice circularibus et corpore chlorophyllaceo axili poterit fortasse fieri.

1. P. Digitus (Ehrenb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 150, tab. XXV, fig. 3; *Closterium Digitus* Ehrenb. Infus. pag. 94, tab. VI, fig. 3).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Huseby (Cleve), Räppe, Svenarum et Unnaryd. Ad Hoby et Lösen in Blekingia (Cleve).

2. P. lamellosum Bréb. (Liste pag. 146, tab. II, fig. 34).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Räppe in Smolandia. Ad Lösen in Blekingia (Cleve).

3. P. oblongum De Bary (Conjugat. pag. 73, tab. VIII, G, fig. 1, 2).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. Ad Unnaryd in Smolandia.

4. P. interruptum Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 151, tab. XXV, fig. 4).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd.

5. P. closterioides Ralfs (Brit. Desmid. pag. 152, tab. XXXIV, fig. 4).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. $0{,}0018-22'' = 46-56\ \mu$.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia, utroque loco cum zygosp. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Wirestorp, Räppe et Unnaryd in Smolandia. Ad Lösen in Blekingia (Cleve).

Laminæ chlorophyllaceæ sæpe sunt, ut in priori, interruptæ.

*6. P. Navicula Bréb. (Liste pag. 146, tab. II, fig. 37).

Zygosporæ subquadratæ, compressæ, angulis porrectis, acutiusculis, cellulis copulatis residuis.

Long. cell. $0{,}0017-24'' = 43-61\ \mu$; Lat. $0{,}00047-55'' = 12-14\ \mu$; Long. zygosp. $0{,}0015-17'' = 38-43\ \mu$; Lat. $0{,}0013-15'' = 33-38\ \mu$. — Tab. V, fig. 8.

Hab. in "Lassby backar" (cel. Prof. J. E. Areschoug), "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam; ad Bergsbrunna (cum zygosp. permultis) et Noor in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Svenarum, Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Zygosporis subquadratis angulis porrectis a *P. closterioidi* Ralfs diversum ad *Closterium Cornu* Ehrenb., *acutum* (Lyngbye) Bréb. et *gracile* Bréb. nonnihil accedit.

7. P. margaritaceum (Ehrenb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 149, tab. XXV, fig. 1; *Closterium margaritaceum* Ehrenb. Infus. pag. 95, tab. VI, fig. 13).

γ. punctatum Ralfs (l. c. fig. 1 d—h).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd in Smolandia.

Formas α et β nusquam inveni.

8. P. Cylindrus (Ehrenb.) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 150, tab. XXV, fig. 2; *Closterium? Cylindrus* Ehrenb. Infus. pag. 95, tab. VI, fig. 6).

Zygosporæ globosæ, glabræ.

Diam. zygosp. $0{,}0008'' = 20\ \mu$.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia, cum zygosp. Ad Unnaryd in Smolandia.

Generi *Cylindrocysti* (Menegh.) adnumerandam hanc speciem esse suspicatur cl. De Bary (Conjugat. pag. 74), sed et structura massæ chlorophyllaceæ et zygosporæ veri *Penii* sunt.

9. P. rufescens Cleve (Bidrag, pag. 493, tab. IV, fig. 5).

Membrana externa rufescens, punctata; interna achroa, glabra.

Hab. ad Malma prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

Individua a me inventa paullo sunt minora, quam Cleve l. c. indicat; nam Long. $0{,}00241–252'' = 62–64\ \mu$; Lat. $0{,}00094–0{,}00104'' = 24–26{,}5''\ \mu$.

**10. P. didymocarpum nov. sp.

P. minutum, circiter $2^1/_2$-plo longius quam latius, subcylindricum, medio non constrictum, apices rotundatos versus levissime attenuatum. Membrana glabra. Nuclei amylacei singuli, loculo apicali nullo.

Zygosporæ duplices*), compressæ, subquadratæ, angulis rotundatis, exterioribus prominulis, semicellulis residuis.

Long. $0{,}0013–15'' = 33–38\ \mu$; Lat. $0{,}00055–58'' = 14–14{,}7\ \mu$; Lat. zygosp. $0{,}00134–15'' = 34–38\ \mu$; Long. $0{,}001–12'' = 26–30\ \mu$. — Tab. V, fig. 9.

*) Unde species nomen illud habet (*δίδυμος* = geminus; *καρπός* = fructus).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Unnaryd in Smolandia; omnibus his locis c. zygosp.

Cellulæ vegetæ a *P. Jenneri* Ralfs nisi apicibus leviter attenuatis et forasse structura massæ chlorophyllaceæ vix possunt distingui, sed in statu copulationis quum sunt, tum zygosporis subquadratis et, quod e speciminibus 7 (14) a me inventis concludere posse mihi videor, semper duplicibus (qua re cum *Closterio lineato* Ehrenb. et imprimis cum *Cylindrocysti diplospora* nov. sp. congruit), tum cellulis copulatis dehiscentibus et semicellulis inter se remotis hæc species satis mihi ab illo differre visa est. *P.* autem *Mooreano* Archer (Description 1864, pag. 179, tab. VI, fig. 34—44) maxime meâ sententiâ est affinis.

Semicellulæ angulis exterioribus zygosporarum etiam maturarum semper adhærent.

*11. P. polymorphum Perty (Kleinst. Lebensf. pag. 207, tab. XVI, fig. 15).

Descriptio ad specimina Suecica delineata:

P. parvum, 2—2½-plo longius quam latius, subcylindricum, medio non vel vix distincte constrictum, e medio in apices truncato-rotundatos sensim sensimque sed levissime attenuatum; e vertice visum perfecte circulare. Membrana subtiliter longitudinaliter striata. Nuclei amylacei singuli, magni; locello apicali nullo.

Long. $0{,}0017-23'' = 43—58\ \mu$; Lat. $0{,}0008-10'' = 20{,}5—26\ \mu$.

Tab. V, fig. 10.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. Ad Nacka prope Holmiam. Ad Unnaryd in Smolandia.

Verumne hoc sit *P. polymorphum*, dubium mihi, rationem figuræ ab auctore deditæ habenti, ideo videtur, quod utrumque polum versus quamvis levissime, tamen distincte hoc est attenuatum, qua re ad *P. curtum* Perty (l. c. fig. 17 a) non Bréb. prope accedit. Figuræ autem a cl. Perty deditæ cum descriptione (in qua cellulas ellipticas esse dicit) non bene congruunt.

Hujus speciei propria est membrana subtiliter (non punctato-, sed plicato-) striata, quare huc non est (ut Rabenhorst in Fl. Eur. Alg. Sect. III, pag. 123 fecit) referendum *P. crassiusculum* De Bary, quod membranâ prorsus glabrâ (De Bary ait in Conjugat. pag. 73: "Membran ganz glatt") longe est diversum.

**12. P. Clevei nov. sp. (*P. Thwaitesii* Cleve Bidrag, pag. 492).

P. mediocre, subcylindricum, 2½—3-plo longius quam latius, medio utrimque leviter emarginatum; semicellulæ e cylindraceo subconicæ, apicem utrumque rotundatum versus sensim attenuatæ; e vertice visæ perfecte circulares. Nuclei amylacei magni, elliptici, singuli (raro bini). Membrana in apicibus ipsis cellulæ subgranulato-punctata, cetero subtilissime punctata.

Long. 0,0039–42″ = 99—108 μ; Lat. 0,0014–16″ = 36—40 μ; Lat. isthmi 0,0013–15″ = 33—38 μ. — Tab. V, fig. 11.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Wirestorp, Räppe et Unnaryd.

A cl. Cleve *P.* (Cosmarium) *Thwaitesii* (quod e figura ab illo tradita et ex annotatione de structura massæ chlorophyllaceæ l. c. facta certe scio) apellata est hæc forma, sed fere dimidio major ab illo (quod mihi verum esse *Cosmarium* propter nucleos amylaceos binos transverse, non longitudinaliter collocatos videtur) differt structura massæ chlorophyllaceæ et apicibus paullo magis attenuatis, subconicis, evidenter punctatis et quod e vertice visa perfecte circularis est. A *Cosm. attenuato* Bréb., quo subduplo major est, differt semicellulis apice magis obtusis, non omnino conicis, sed inferne cylindricis, tantum apice subconicis, membranaque nisi in apicibus ipsis cellulæ non evidenter punctata et imprimis structura massæ chlorophyllaceæ, quæ veri *Penii* est. (Cl. Ralfs, quum *Cosm. curtum* Bréb. massa chlorophyllacea in laminas longitudinales ("longitudinal fillets") formata instructum esse (Brit. Desmid. pag. 109) dixisset, hoc de *C. attenuato* et *curto* inter se comparatis paullo infra (sub *C. attenuato*) docuit: — — — "and then these species can only be distinguished by the different arrangement of their endochromes". Quare quod addit: "It is doubtful whether this plant" (*C. attenuatum*) "and *C. turgidum* ought not to be removed to *Penium*", id ob formam *C. attenuati Penio* similem, non de structura massæ chlorophyllaceæ dictum esse, per se patet).

13. P. crassiusculum De Bary (Conjugat. pag. 73, tab. V, fig. 5—7).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia

Ut supra diximus, hæc species membranâ glabrâ a *P. polymorpho* Perty bene distincta est.

14. P. minutum (Ralfs) Cleve (Bidrag pag. 493; *Docidium minutum* Ralfs Brit. Desmid. pag. 158, tab. XXVI, fig. 5; *Penium Ralfsii* De Bary Conjugat. pag. 73, tab. V, fig. 8).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. Ad Unnaryd et Femsjö in Smolandia.

Forma major, quindecies—vicies longior quam latior. (Vide Bulnh. in Hedwigia pag. 51, tab. IX, fig. 4!).

Lat. 0,00047–71″ = 12—18 μ; Long. 0,0067—0,0106″ = 170—270 μ.

Hab. in "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam; ad Noor et Bergsbrunna in Uplandia. Ad Nacka prope Holmiam. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd, Räppe et Wirestorp.

In "Norby skog" forma gracillima adest, quæ a *Docidio Baculo* Bréb., nisi basi semicellularum nec tuberculato-plicata nec tumida, discerni vix potest

XII. DOCIDIUM Bréb.

(in Ralfs Brit. Desmid. pag. 155; mut. char.).

Cellulæ rectæ, valde elongatæ, medio leviter constrictæ, basi ipsa semicellularum inflata, longitudinaliter plicata; a vertice circulares. Massa chlorophyllacea axilis, nucleis amylaceis in seriem unam axilem dispositis, laminis 2—4 inter se laxe connexis, sæpe flexuosis, locello sphærico apicali nullo.

1. D. BACULUM Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 158, tab. XXXIII, fig. 5; ? *Closterium Baculum* Bréb. Alg. Falaise pag. 59, tab. VIII, sec. Ralfs l. c.; nec *Pleurotæn. Baculum* Cleve Bidrag pag. 494).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö et Räppe.

Plicæ semicellularum basales (quæ, hac in specie ab auctoribus non observatæ, in figura a cl. RALFS l. c. data punctis nonnullis basalibus significatæ sine dubio sunt), hujus generis propriæ, speciem tuberculorum (circiter 15) minutissimorum præ se ferentes (vide tab. V, fig. 12!), optimum characterem genericum præbent. Cfr. ea quæ hoc de genere a *Pleurotænio* et *Penio minuto* discernendo supra (pag. 4—6) disputata sunt!

Specimina exsiccata, quæ, sub nomine *D. Baculi* a cl. BRÉBISSON dedita, mecum benevolentissime communicavit cel. Prof. E. FRIES, plicis illis basalibus carent et ab illa specie, quam RALFS l. c. delineavit, longe diversa veri sunt *Pleurotænii*.

2. D. DILATATUM (Cleve) (*Pleurotœnium dilatatum* Cleve Bidrag pag. 494, tab. IV, fig. 6).

Tab. V, fig. 12.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

Obs.! In figura a cl. CLEVE l. c. data plicæ basales desunt, sed in diagnosi sunt diserte commemoratæ.

*3. D. NOBILE (Richter) (*Pleurotœnium nobile* Richter in Hedwigia 1865, pag 129, c. Icone; Rabenh. Alg. Eur. N:o 1570 et 1846!).

Long. 0,0069″ = 175 μ; Lat. 0,00055″ = 14 μ.

Hab. in Smolandia ad Huseby (CLEVE).

A specie priori differt apicibus vix dilatatis, semicellulis regulariter undulato-nodosis et imprimis membrana tota subtiliter et densissime longitudinaliter plicata, qui character, a cl. RABENHORST (Fl. Eur. Alg. pag. 142) in descriptione hujus speciei omissus, fere solus ad has species inter se distinguendas suppetere videtur.

D. undulatum Bailey (Micr. Observ. pag. 36, tab. I, fig. 2), quod ab hac specie tantum apicibus crenatis ("ends crenate" Bailey) et fortasse semicellulis sola basi ipsa (non totis) longitudinaliter plicatis differre videtur, huic generi adnumerandum sine dubio est.

XIII. PLEUROTÆNIUM Näg.

(Gatt. einzell. Alg. pag. 104, tab. VI A).

Semicellulæ basi ipsa non longitudinaliter plicatæ. Locellus sphæricus apicalis distinctus.

1. P. Trabecula (Ehrenb.) Näg. (Gatt. einzell. Alg. pag. 104, non tab. VI A; *Closterium Trabecula* Ehrenb. Abh. d. Berl. Ak. 1831, pag. 68; Infus. pag. 93, tab. VI, fig. 2, ex parte; *Docidium Ehrenbergii* α. Ralfs Brit. Desmid. pag. 157, tab. XXVI, fig. 4).

Hab. in "Lassby backar", "Norby skog" et "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe et Wirestorp.

Quum figuræ a cl. Ehrenberg l. c. datæ non unius speciei nostro quidem judicio sint, forma a cl. Ralfs l. c. delineata hujus speciei propria habenda nobis visa est, quare forma Nägeliana huc non referenda.

*2. P. clavatum (Kütz.) De Bary (Conjugat. pag. 75; *Docidium clavatum* Kütz. in Ralfs Brit. Desmid. pag. 156, tab. XXVI, fig. 3).

Forma margine stricturæ paullum prosiliente, apicibus obsolete dentatis.

Long. 0,0132″ = 330 μ; Lat. 0,00118″ = 30 μ.

Hab. in Smolandia ad Räppe.

3. P. truncatum (Bréb.) Näg. (Gatt. einzell. Alg. pag. 104; *Docidium truncatum* Bréb. in Ralfs Brit. Desmid. pag. 156, tab. XXVI, fig. 2).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna et Noor. Ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd. In Blekingia ad Hoby (Cleve).

*4. P. maximum (Reinsch) (*Docidium maximum* Reinsch Algenflora pag. 184, tab. XII, fig. 4).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam.

Priori maxime est affinis Suecica quidem forma.

*5. P. INDICUM (Grun.) (*Docidium indicum* Grunow in Rabenh. Beitr. pag. 13, tab. II, fig. 18).

Long. 0,0236″ = 600 μ; Lat. 0,00134″ = 34 μ.

Hab. in Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

Cum forma Brasiliensi a cl. NORDSTEDT (Desmid. Brasil pag. 204 (166)) commemorata congruunt specimina a nobis inventa.

6. P. NODULOSUM (Bréb.) De Bary (Conjugat. pag. 75; *Docidium nodulosum* Bréb. in Ralfs Brit. Desmid. pag. 155, tab. XXVI, fig. 1).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna.

*7. P. CORONATUM (Bréb.) (*Docidium coronatum* Bréb. in Ralfs Brit. Desmid. pag. 217, tab. XXXV, fig. 6).

Long. 0,0213″ = 540 μ; Lat. max. 0,0023″ = 58 μ; Lat. apic. 0,00173″ = 44 μ.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Smolandia ad Unnaryd et Femsjö.

A figura citata forma Suecica differt membrana irregulariter punctata, sed cum speciminibus, quæ ab auctore ipso dedita mecum benevolentissime communicavit cel. Prof. E. FRIES, prorsus congruit. Varietas vel forma prioris potius est fortasse habenda, quam propria species.

*8. P. NODOSUM (Bailey) (*Docidium nodosum* Bailey in Ralfs Brit. Desmid. pag. 218, tab. XXXV, fig. 8; Micr. Observ. tab. I, fig. 4).

Apices cellulæ coronula dentium acutorum 12 (a vertice visorum) muniti; margo stricturæ paullum prosiliens.

Long. 0,0118—156″ = 300—395 μ; Lat. max. (ad verticillum basale) 0,00189—213″ = 48—54 μ; Lat. apic. 0,00118—154″ = 30—39 μ.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö.

9. P. GRACILE (Bailey) Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 144; *Triploceras gracile* Bailey Micr. Observ. pag. 38, tab. I, fig. 10; *Docidium gracile* Wittr. Anteckn. pag. 21, fig. 10).

Verticilla processuum dentiformium usque ad 18 in utraque semicellula.

Long. usque ad 0,0197″ = 500 μ.

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö et Räppe.

XIV. SPIROTÆNIA Bréb.

(In Ralfs Brit. Desmid. pag. 178).

1. S. condensata Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 179, tab. XXXIV, fig. 1).

Hab. ad Bolltorp in Ostrogothia. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe.

Zygosporæ, quas in "Lassby backar" plurimas semel inveni, cum figuris a cl. Archer (Conjug. of Spirot. pag. 186, tab. VIII, fig. 5—11) datis prorsus congruunt.

*2. S. parvula Archer (Description 1862, pag. 254, tab. XII, fig. 32—43).

Long. 0,00118″ = 30 μ; Lat. 0,00031″ = 8 μ.

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna.

3. S. minuta Thuret (in Bréb. Liste pag. 157, tab. I, fig. 30).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

4. S. obscura Ralfs (Brit. Desmid. pag. 179, tab. XXXIV, fig. 2).

Forma major:

Long. 0,0063″ = 160 μ; Lat. 0,00118″ = 30 μ.

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia.

Forma minor:

Long. 0,003′ = 76 μ; Lat. 0,00059′ = 15 μ.

Hab. in "Lassby backar" prope Upsaliam. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

XV. SPHÆROZOSMA Corda.

(Almanach de Carlsbad 1835, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 65).

1. S. vertebratum (Bréb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 65, tab. VI, fig. 1; *Desmidium vertebratum* Bréb. Alg. Falaise pag. 65, tab. II, sec. Ralfs l. c).

Hab. in Smolandia ad Räppe. In Ostrogothia ad Mariehof.

*2. S. filiforme (Ehrenb.) Ralfs (Brit. Desmid. pag. 209; *Odontella? filiformis* Ehrenb. Infus. pag. 154; Meteorp. tab. I, fig. 20; *Tessarthra filiformis* Ehrenb. Infus. tab. X, fig. 21).

Long. 0,00043—47″ = 11—12 μ; Lat. = Long.; Lat. isthmi 0,00009″ = 2,3 μ.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

3. S. EXCAVATUM Ralfs (in Annals of Nat. Hist. vol. XVI, pag. 15, tab. III, fig. 8, sec. Ralfs; Brit. Desmid. pag. 67, tab. VI, fig. 2).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd.

Var. β. Wallich (Desmid. pag. 192, tab. VII, fig. 15).

Long. 0,00035″ = 9 μ; Lat. 0,0004″ = 10,2 μ; Lat. isthmi 0,00021″ = 5,5 μ.

Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe, Svenarum.

XVI. SPONDYLOSIUM Bréb.

(In Kütz. Spec. Alg. pag. 189, sec. De By Conjugat., mut. char.; Archer in Pritch. Infus. pag. 724; *Leuronema* Wallich Desmid. pag. 193).

1. S. PULCHELLUM Archer (in Pritch. Infus. pag. 724, tab. III, fig. 10; *Sphærozosma pulchellum* Archer in Proceedings of the Dublin University Association 1858, vol. I, pars 1, pag. 117, tab. XI, fig. 7).

β. BAMBUSINOIDES (*Sphærozosma bambusinoides* Wittr. Anteckn. pag. 25, fig. 12).

Hab. in "Lassby backar" et "Kungsparken" prope Upsaliam. In Smolandia ad Unnaryd.

Hæc forma *Sp. pulchello* Archer propior esse videtur, quam ut propria species habeatur.

**2. S. MONILIFORME nov. sp.

S. magnum, seriebus cellularum longis firmis, leviter (dextrorsum) tortis, tubo mucoso crasso inclusis; cellulæ fere dimidio longiores quam latiores, profunde constrictæ sinu obtuso extrorsum ampliato; a vertice visæ triangulares lateribus levissime retusis, angulis rotundatis; semicellulæ a fronte visæ dimidio longiores quam latiores, isthmo subelongato inter se connexæ, triangulares vel subelliptico-triangulares, utrimque obtuse rotundatæ, in dorsum obtusum subito angustatæ, lateribus rectis vel levissime convexis, ventre leviter convexæ. Membrana glabra. Nuclei amylacei singuli, laminæ chlorophyllaceæ 6.

Long. cell. 0,0015–165″ = 38—42 μ; Lat. 0,001–11″ = 26—28 μ; Lat. isthmi 0,0004–47″ = 10—12 μ. — Tab. V, fig. 16.

Hab. in Smolandia ad Räppe.

Forma semicellulis duplo longioribus quam latioribus, subellipticis, ventre planis vel subplanis, dorso angustato-productis.

Long. 0,0015–157″ = 38—40 μ; Lat. 0,00126–13″ = 32—33 μ; Lat. isthmi 0,0004″ = 10 μ.

Hab. una cum priori, sed rarissime.

Cellulæ hujus speciei usque ad 40 in series longas et, quum apicibus quamvis angustatis inter se quasi connatæ tuboque gelatinoso crasso et spisso cellulæ sint involutæ, firmas conjunctæ sunt.

Cellulæ singulæ speciem *Staurastri* præ se ferunt. Structura quoque massæ chlorophyllaceæ prorsus eadem est ac in subgenere *Staurastro;* quamobrem ad *Desmidium*, cujus terni vel quaterni nuclei amylacei sunt, non est nostra species referenda, sed inter *Spondylosia* collocanda eo potius videtur, quod *Spondyl.* (Leuronema) *nitens* (Wallich) (Desmid. pag. 193, tab. VII, fig. 10—14, tab. VIII, fig. 12 et 13), præter formam compressam, trigonam quoque habere repertum est, quarum formarum ratione habita cl. Archer in definiendo genere *Spondylosio* (in Pritch. Infus. pag. 724) dicit: "Filament compressed or triangular". Formæ autem trigonæ (var. γ. Wallich l. c.), quam diximus, proxima nostra species esse videtur, sed differt quod major est ("Length of joint" (varietatis illius) ".0008″ to.0010″" (= 20,3—25,5 μ); "breadth of ditto .0008″ to.0012″" (= 20,3—30,5 μ), sec. Wallich l. c.) et cellulas dimidio (raro 4:a parte) longiores quam latiores, semicellulas vero a fronte visas triangulares (nec ut var. illa transverse oblongo-ellipticas) habet, quo fit, ut cellulæ area minima (lat. areæ connexivæ 0,00016 2″ = 4—5 μ) inter se contiguæ sint.

*3. S. pulchrum (Bailey) Archer (in Pritch. Infus. pag. 724; *Sphærozosma pulchrum* Bailey in Ralfs Brit. Desmid. pag. 209, tab. XXXV, fig. 2).

Forma cellulis $1^2/_3$-plo latioribus quam longis, utroque fine leviter convexis, isthmo elongato nullo inter se connexis.

Long. 0,00073″ = 18,5 μ; Lat. 0,0011–118″ = 28—30 μ; Crass. 0,00063″ = 16 μ; Lat. isthmi 0,00079–87″ = 20—22 μ; Lat. connex. 0,00043″ = 11 μ.

Tab. V, fig. 17.

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam et ad Bergsbrunna in Uplandia.

** β. triquetrum nov. var.

Var. priori similis, sed cellulis a vertice visis trigonis, lateribus rectis, angulis oblique rotundato-truncatis.

Long. 0,00095″ = 24 μ; Lat. 0,00142″ = 36 μ; Lat. isthmi 0,00095″ = 24 μ; Lat. connex. 0,00063″ = 16 μ.

Hab. una cum priori.

Fila sunt dextrorsum plus minus torta (cellulis 28—40 orbis totus circumagitur).

A figuris, quas cl. BAILEY l. c. dedit, forma compressa a nobis inventa differt incisura mediana minus acuta, cellulis angustioribus et apice utroque leviter convexis, quo fit, ut cellulæ utrimque paullum sint angustatæ; præterea sunt inter se quasi connatæ nec isthmo subelongato conjunctæ.

β. triquetrum cum *Desmidio Swartzii* Ag. tanta est similitudine conjunctum, ut primo quidem visu facile inter se commisceantur, sed qui nostram varietatem accuratius contuitus erit, his rebus differre eam facile inveniet: Semicellulæ utroque polo truncato-rotundatæ sunt; cellulæ a fronte visæ utroque fine (= margine utroque connexivo) sunt paullum convexæ, quo fit, ut tantum medio, non margine toto, inter se contiguæ sint; in cellulis a vertice visis latera recta sunt et anguli oblique truncati. Præterea massa chlorophyllacea centralis esse et nucleo amylaceo uno prædita nobis visa est. Nucleos amylaceos in forma compressa tantum singulos esse pro certo affirmare possumus.

XVII. HYALOTHECA Ehrenb.

(Monatsberichte der K. Preus. Akad. der Wissensch. zu Berlin (Berlin 1840), pag. 212 et 217, sec. Aut.).

1. H. DISSILIENS (Smith) Bréb. (in Ralfs Brit. Desmid. pag. 51, tab. I, fig. 1; *Conferva dissiliens* Smith Engl. Bot. 1812, tab. 2464, sec. Ralfs).

   Hab. in Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe, Huseby (CLEVE).

2. H. MUCOSA (Dillw.?) Ehrenb. (Monatsber. 1840, pag. 212 et 217, sec. Aut.; Ralfs Brit. Desmid. pag. 53, tab. I, fig. 2; *Conferva mucosa* Dillwyn Brit. Conferv. pag. 46, suppl. tab. B?, sec. Nordst. Desmid. Brasil. pag. 206 (168)).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe. In Blekingia ad Lösen (CLEVE).

XVIII. BAMBUSINA Kütz.

(Phycol. germ. 1845, pag. 140, sec. Aut.).

1. B. Brebissonii Kütz. (Phycol. germ. pag. 140, sec. Aut.; *Desmidium bambusinum* Bréb. in Chev. Micr. pag. 271 (1839!), sec. Bréb. Liste pag. 119; *Desmidium Borreri* Ralfs Annals of Nat. Hist. vol. XI, pag. 375, tab. VIII, fig. 4 (1843!), sec. Ralfs Brit. Desmid. pag. 58).

Hab. in Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Unnaryd, Femsjö, Räppe, Huseby (Cleve), Svenarum. In Blekingia ad Lösen (Cleve).

XIX. DESMIDIUM Ag.

(Systema Alg. pag. XV, sec. Aut., mut. char.; De Bary Conjugat. pag. 76).

1. D. cylindricum Greville (Scot. Crypt. Fl., tab. et pag. 293 (1827), sec. Aut.; *Didymoprium Grevillii* Kütz. Phycol. generalis pag. 166 (1843), sec. Ralfs Brit. Desmid. pag. 57).

Hab. in Uplandia ad Bergsbrunna. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö, Svenarum et Huseby (Cleve).

2. D. Swartzii Ag. (Syst. Alg. pag. 9; Ralfs Brit. Desmid. pag. 61, tab. IV).

Hab. ad Nacka prope Holmiam. In Ostrogothia ad Bolltorp. In Smolandia ad Femsjö, Svenarum, Räppe. In Blekingia ad Hoby et Lösen (Cleve).

Zygosporæ in "Kungsparken" prope Upsaliam et ad Nacka prope Holmiam a nobis inventæ cum fig. f (Ralfs l. c.) prorsus congruunt.

3. D. aptogonum Bréb. (Alg. Falaise pag. 65, tab. II, sec. Aut.; *Aptogonum Desmidium* α. Ralfs Brit. Desmid. pag. 64, tab. XXXII, fig. 1 a—d).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Räppe.

β. Ehrenbergii Rabenh. (Fl. Eur. Alg. pag. 154; *Odontella Desmidium* Ehrenb. Infus. pag. 153, tab. XVI, fig. 4; *Aptogonum Desmidium* β. Ralfs l. c. fig. 1 e—h).

Hab. in "Norby skog" prope Upsaliam; ad Nacka prope Holmiam.

XX. GONATOZYGON De Bary.

(in Hedwigia I, 1856, Nr 16, mut. char.; Conjugat. pag. 76).

1. G. RALFSII De Bary (Conjugat. pag. 76, tab. IV, fig. 23—25; *Docidium? asperum* Ralfs Brit. Desmid. pag. 158, ex parte, tab. XXVI, fig. 6 a et b, non c).

Hab. ad Bergsbrunna in Uplandia. In Smolandia ad Huseby (CLEVE), Unnaryd et Räppe. In Gotlandia ad Slite (CLEVE).

2. G. BREBISSONII De Bary (Conjugat. pag. 77, tab. IV, fig. 26 et 27; *Docidium asperum* Bréb. Liste pag. 147, tab. I, fig. 33).

Hab. ad Carlberg prope Holmiam (CLEVE). In Uplandia ad Bergsbrunna. In Smolandia ad Unnaryd et Räppe.

ERRATA.

Pag.	2	lin.	4	*delendum est:*	a me detectæ et		
„	4	„	12	*post* autem	*adde* situ		
„	18	„	14	„ in centro	„ quasi		
„	57	„	19	*pro* *6.	*lege* **6.		
„	63	„	30	„ 34.	„ *34.		
„	67	„	20	„ *β*.	„ **β*.		

EXPLICATIO FIGURARUM.

Obs. Nisi aliter infra indicatum est, omnes figuræ 400-es amplificatæ sunt et *a* = cellula evacuata a fronte visa, *b* = semicellula evacuata a vertice visa, *c* = cellula evacuata a latere visa.

TAB. I.

Fig. 1. Micrasterias Jenneri Ralfs, forma, cujus lobi basales intermediis multo minores sunt. — Cellula chlorophyllosa a fronte visa ($^{350}/_{1}$). Fig. a Cleve data.
„ 2. M. rotata (Grev.) Ralfs. — Zygospora matura.
„ 3. M. „ , forma. — Cellula evacuata a fronte visa ($^{200}/_{1}$).
„ 4. M. brachyptera n. sp. ($^{200}/_{1}$). — *d.* semicellula a basi visa.
„ 5. M. conferta n. sp. ($^{200}/_{1}$). — Obs. In *a.* incisuræ loborum lateralium justo ampliores sunt.
„ 6. M. Mahabuleshwarensis Hobson ($^{300}/_{1}$).
„ 7. M. decemdentata Näg. *β.* Upsaliensis n. var. Cleve. — Cellula chlorophyllosa a fronte visa ($^{300}/_{1}$). Fig. Cleve dedit.
„ 8. Euastrum verrucosum Ehrenb. *β.* rhomboideum n. var.
„ 9. E. pectinatum Bréb., forma ($^{350}/_{1}$). — *a.* cellula chlorophyllosa a fronte visa; *b.* cellula evacuata a latere visa. — Fig. Cleve dedit.
„ 10. E. crassum (Bréb.).

TAB. II.

Fig. 1. Euastrum crassum (Bréb.) *β.* scrobiculatum n. var. — *b.* semicellula a basi visa; *d.* lobus polaris a vertice visus.
„ 2. E. ventricosum n. sp.
„ 3. E. inerme n. sp.
„ 4. E. intermedium Cleve. — Semicellula a vertice visa.
„ 5. E. divaricatum n. sp.
„ 6. E. erosum n. sp.
„ 7. E. binale (Turp.) Ralfs *γ.* elobatum n. var.
„ 8. E. crassicolle n. sp. — *a.* cellula chlorophyllosa a fronte visa.
„ 9. Cosmarium orthostichum n. sp.
„ 10. C. „ *β.* pumilum n. var. — Cellula evacuata a fronte visa.
„ 11. C. Quadrum nov. sp. — Cellula evacuata a fronte visa.
„ 12. C. trachypleurum n. sp.

Fig. 13. COSMARIUM TAXICHONDRUM n. sp.
„ 14. C. QUINARIUM n. sp.
„ 15. C. PACHYDERMUM n. sp.
„ 16. C. PERFORATUM n. sp.
„ 17. C. SMOLANDICUM n. sp.
„ 18. C. PSEUDOPYRAMIDATUM n. sp.
„ 19. C. VARIOLATUM n. sp.
„ 20. C. HOLMIENSE n. sp.
„ 21. C. TETRAGONUM Näg., forma.
„ 22. C. ABRUPTUM n. sp.
„ 23. C. SEXANGULARE n. sp.

TAB. III.

Fig. 1. COSMARIUM NYMANNIANUM Grun. — Cellula evacuata a fronte visa.
„ 2. C. TETRACHONDRUM n. sp.
„ 3. C. RETUSUM (Perty) Rabenh. — Obs. Granuli apicales semicellulæ a fronte visæ orbem illum centralem in *b.* efficiunt.
„ 4. C. ANCEPS n. sp.
„ 5. C. SPECIOSUM n. sp.
„ 6. C. CYCLICUM n. sp. — *a.* et *d.* cellulæ evacuatæ a fronte visæ.
„ 7. C. LATIFRONS n. sp.
„ 8. C. GEMINATUM n. sp. — *c.* semicellula a basi visa; *d.* cellula evacuata a latere visa.
„ 9. C. TURPINII Bréb., forma.
„ 10. C. QUASILLUS n. sp. — *d.* semicellula a basi visa.
„ 11. C. MONOMAZUM n. sp.
„ 12. C. QUADRIFARIUM n. sp. — *c.* zygospora matura cum 3 semicellulis residuis.
„ 13. C. HEXASTICHUM n. sp.
„ 14. C. WITTROCKII n. sp.
„ 15. C. MONILIFORME (Turp.) Ralfs. — Zygospora matura cum 3 semicellulis copulatione evacuatis.
„ 16. C. TUMIDUM n. sp.
„ 17. C. PROTUBERANS n. sp.
„ 18. C. ZONATUM n. sp. — *d.* semicellula a basi visa.
„ 19. C. BINERVE n. sp. — *a.* cellula evacuata a fronte, *d.* a latera visa; *b.* semicellula a vertice ipso, *c.* ab ipsa basi visa.
„ 20. C. ELEGANTISSIMUM n. sp.
„ 21. C. PRÆGRANDE n. sp. — Cellula evacuata a fronte visa.
„ 22. ARTHRODESMUS CONVERGENS Ehrenb. — Zygospora matura cum cellulis copulatis.
„ 23. STAURASTRUM CORNICULATUM n. sp. — *c.* semicellula oblique a vertice visa.
„ 24. S. BACILLARE Bréb., *β.* OBESUM n. var.
„ 25. S. INSIGNE n. sp. — *a. b.* forma pentagona; *a'. b'.* forma tetragona.

Fig. 26. Staurastrum leptodermum n. sp.
„ 27. S. aversum n. sp.
„ 28. S. dejectum Bréb., γ. connatum n. var.
„ 29. S. pterosporum n. sp. — *c.* zygospora matura, cujus lobi in semicellulis residuis, quasi in thecis, singuli conditi.

TAB. IV.

Fig. 1. Staurastrum megacanthum n. sp. — *a. b.* forma trigona; *a'. b'.* forma tetragona.
„ 2. S. bifidum (Ehrenb.) Bréb. ($^{350}/_{1}$).
„ 3. S. setigerum Cleve ($^{365}/_{1}$). — Cellula chlorophyllosa a fronte visa. Fig. Cleve dedit.
„ 4. S. pseudocrenatum n. sp.
„ 5. S. forficulatum n. sp. — Forma trigona.
„ 6. S. Cerastes n. sp. — Forma tetragona: *a.* cellula evacuata a fronte visa, tantum cornibus 2 (non visibil. in figura) nixa, *c.* 4 cornibus (in fig. non visibil.) nixa.
„ 7. S. Ophiura n. sp. — *a.* cellula evacuata (in sectione longitudinali) a fronte visa.
„ 8. S. Arctiscon (Ehrenb.).
„ 9. S. sexangulare (Bulnh.) — *a.* et *b.* forma hexagona; *c.* cellula formæ tetragonæ a vertice visa.
„ 10. S. tumidum Bréb. — Zygospora (matura?).
„ 11. S. grande Bulnh., forma major. — Cellula vegeta formæ trigonæ.

TAB. V.

Fig. 1. Staurastrum longispinum (Bailey) Archer. — *a.* cellula vegeta a fronte visa; *b.* individuum majus aculeis magis evolutis a vertice ipso visum.
„ 2. S. Brasiliense Nordst. — Cellula vegeta formæ pentagonæ a vertice ipso visa.
„ 3. S. mutilatum n. sp.
„ 4. Xanthidium armatum Bréb. — Semicellula vegeta a fronte visa, cujus laminæ chlorophyllaceæ 2 citeriores (superiores), dextra nucleos amylaceos 3, sinistra 4 involventes, conspiciuntur.
„ 5. X. aculeatum Ehrenb. — Zygospora matura.
„ 6. X. antilopæum (Bréb.) Kütz., β. triquetrum n. var. — Cellula vegeta. E nucleis amylaceis, qui in *b.* omnes 6 conspiciuntur, in *a.* tantum terni visibiles sunt.
„ 7. Cylindrocystis diplospora n. sp. — *a.* cellula vegeta a fronte visa; *b.* zygospora duplex submatura.
„ 8. Penium Navicula Bréb. — Zygospora matura cum cellulis copulatis residuis.
„ 9. P. didymocarpum n. sp. — *a.* cellula vegeta a fronte visa; *b.* zygospora matura; *c.* zygospora major (hujus speciei?).
„ 10. P. polymorphum Perty. — *a.* cellula vegeta, *b.* evacuata a fronte visa.

Fig. 11. PENIUM CLEVEI n. sp. — Cellula evacuata a fronte visa. Obs. Puncta granuliformia apicalia justo sunt paullum distinctiora.

„ 12. DOCIDIUM DILATATUM Cleve ($^{340}/_{1}$). — Specimen monstrosum, ex individuis duobus vere inter se coalitis compositum.

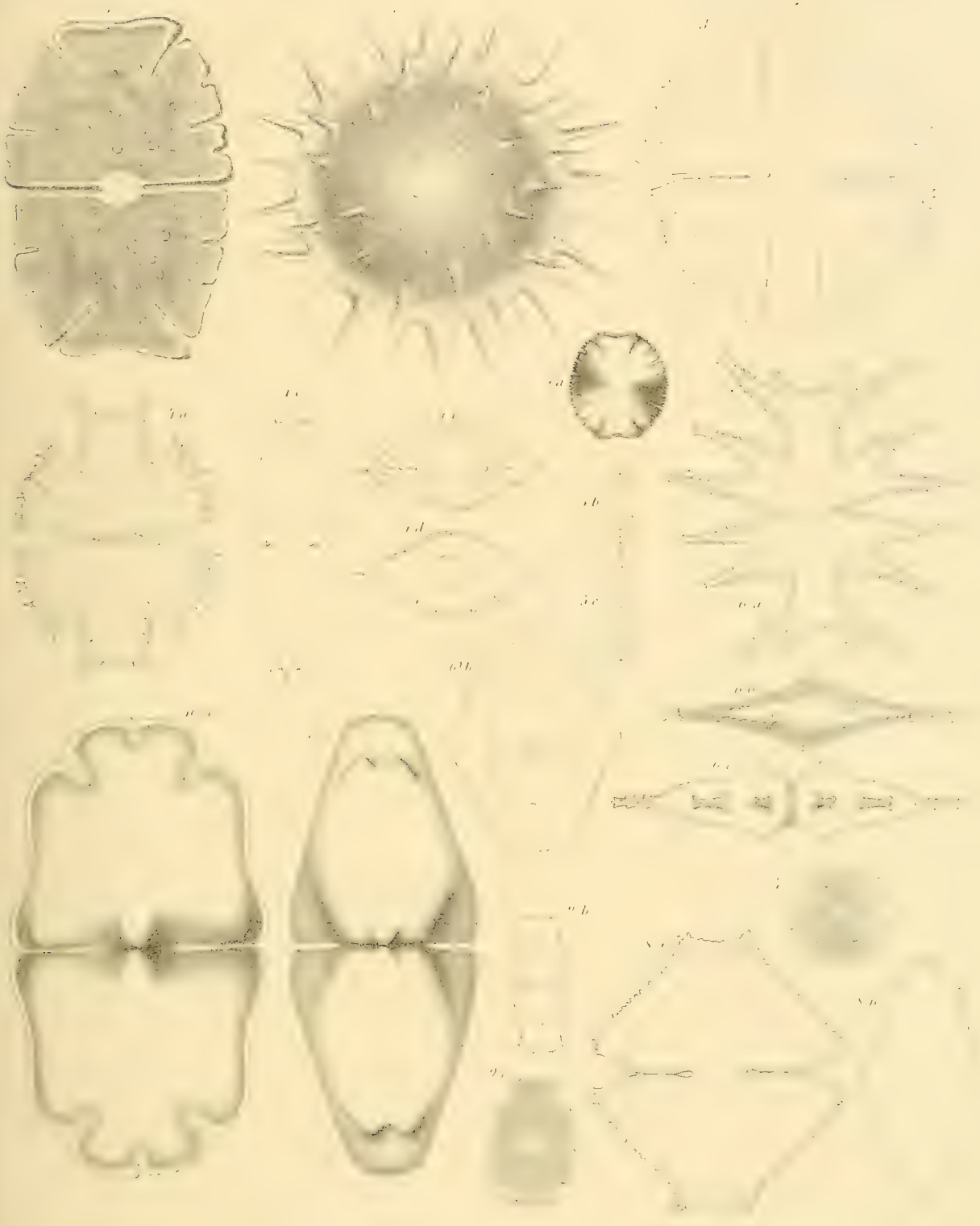
„ 13. CLOSTERIUM ARCHERIANUM n. sp. Cleve. — Cellula evacuata a fronte visa ($^{340}/_{1}$). Fig. CLEVE dedit.

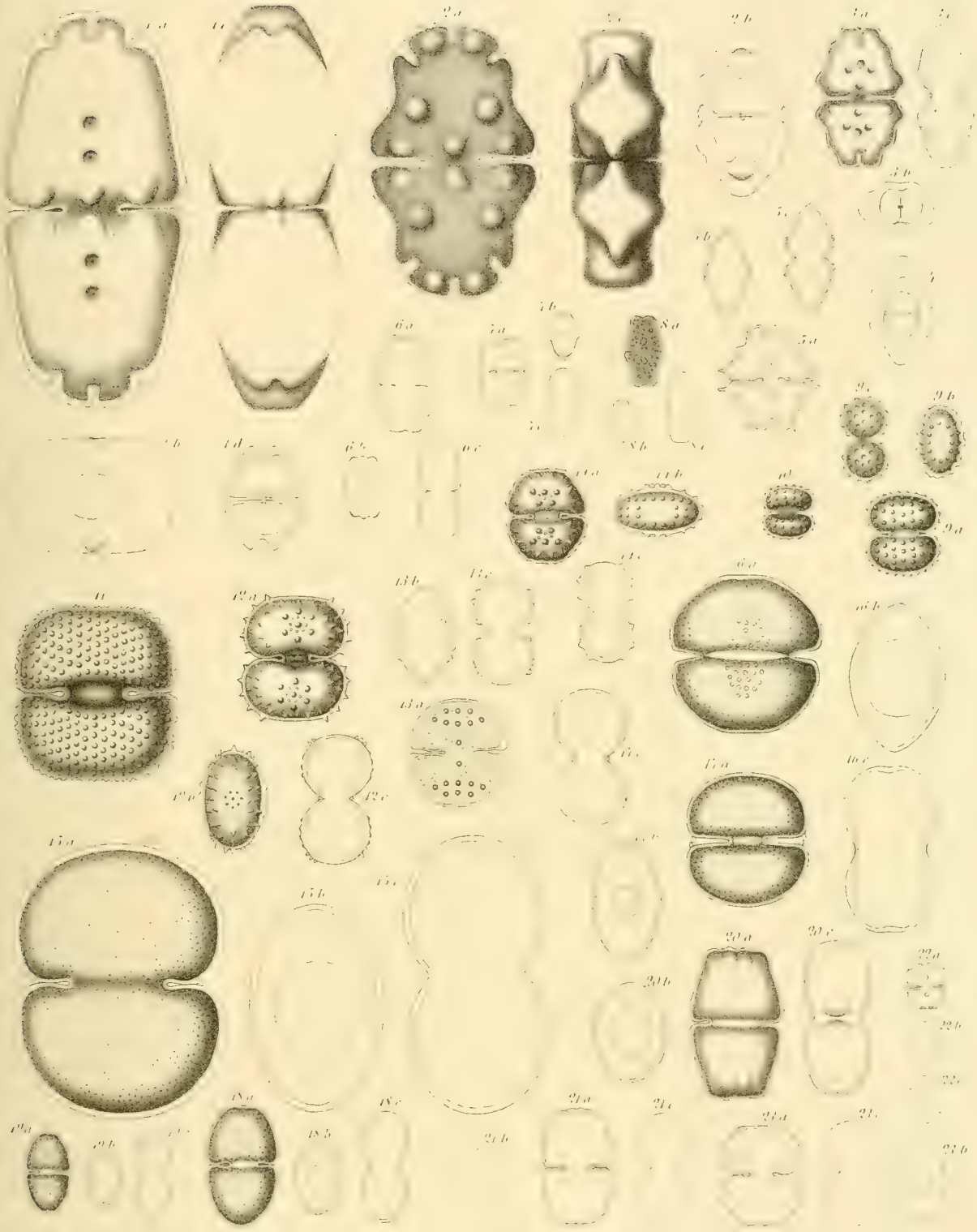
„ 14. C. MONILIFERUM (Bory) Ehrenb. — *a.* zygospora matura massâ mucosâ involuta; *b.* et *c.* zygospora germinans. Cellula germinalis e membrana zygosporæ (in *b.* eruptura) in *c.* erumpit; *d.* et *e.* cellula germinalis libera. Amplificatio figurarum, quas CLEVE dedit, ignota.

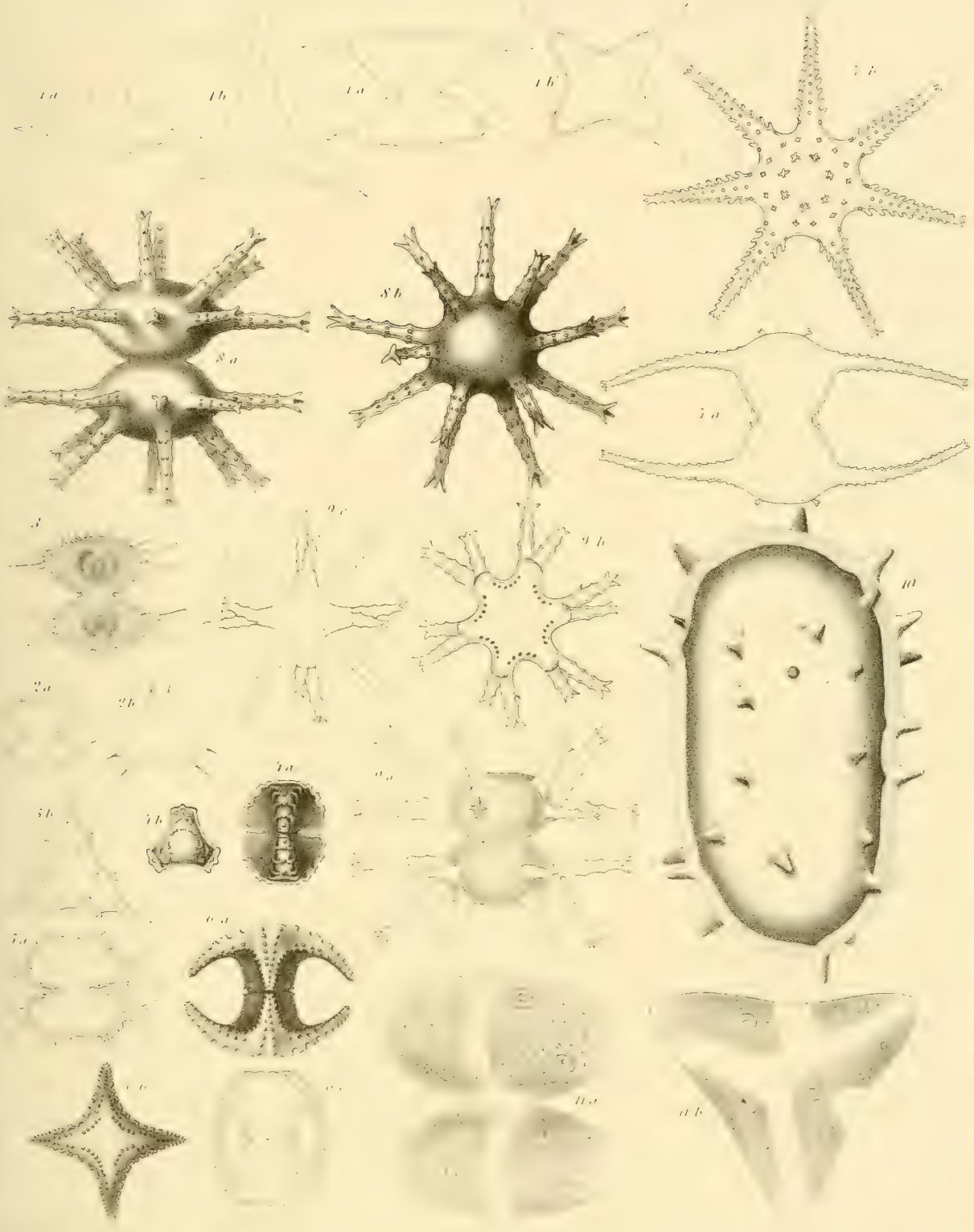
„ 15. C. GRACILE Bréb. — Zygospora matura semicellulis copulatis residuis, processus zygosporæ aculeiformes singulos quasi folliculis vel thecis includentibus.

„ 16. SPONDYLOSIUM MONILIFORME n. sp. — *a.* series cellularum 6 vegetarum a fronte visarum (tubus mucosus in figura deest); *b.* cellula vegeta a vertice visa.

„ 17. S. PULCHRUM (Bailey) Archer, forma *a.* — Pars superior fili torti e cellulis 4 vegetis a fronte visis, inferior e cellulis evacuatis a latere visis composita. Tubus mucosus in figura deest.







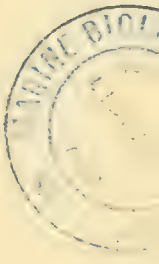
RECHERCHES

SUR LA ROTATION DE LA TERRE.

PAR

H. GYLDÉN.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 5 Avril 1871.)



UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1871.

§ 1.

Une partie des changements que nous apercevons dans la constitution physique de la surface terrestre, trahissent sans nul doute la présence de forces tendantes à modifier la répartition de sa masse intérieure. Si ces forces sont de nature à pouvoir opérer une modification sensible sur la direction des axes des moments principaux d'inertie de la terre ou sur la grandeur de ces moments, la théorie de la rotation des corps solides ne suffit dès-lors plus à expliquer seule la rotation de la terre. Or, comme les observations astronomiques ont atteint un si haut degré d'exactitude, que ces changements, même minimes, doivent pouvoir être mis au jour par leur moyen; comme en outre elles semblent déjà indiquer des variations dans la hauteur polaire de certaines localités, des recherches sur la rotation de la terre, dans lesquelles elle ne serait pas considérée comme un corps parfaitement solide, nous paraissent présenter de l'intérêt à plusieurs égards. Les pages suivantes contiennent un exposé succinct de recherches de cette nature.

Nous restreindrons notre donnée à rechercher simplement la rotation d'un système de coordonnées lié d'une manière déterminée avec le corps en rotation. Nous fixerons à cet égard les points suivants. Nous désignerons par dm la masse d'un point matériel, dont les coordonnées rapportées au système de coordonnées en rotation, sont x_1, y_1 et z_1. Si le corps en rotation était parfaitement solide, ces coordonnées pourraient être considérées invariables, et le système précité de coordonnées pourrait être dès-lors dit immuablement uni avec le corps en rotation. Dans l'exposé suivant, nous ne considérerons pas, il est vrai, les coordonnées x_1, y_1 et z_1 comme constantes, mais nous en regarderons les variations comme très-petites, la répartition de la masse dans le globe terrestre ne pouvant être, à ce que l'on sait, sujette à des variations considérables. Nous déterminerons la direction des axes en rotation, de telle sorte que les équations suivantes soient toujours remplies:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right)dm &= 0\\
\Sigma\left(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right)dm &= 0\\
\Sigma\left(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right)dm &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

§ 2.

Nous pouvons considérer notre donnée comme consistant à trouver les angles que forment les axes en rotation avec d'autres axes de coordonnées qui ne peuvent changer leur position que parallèlement à eux-mêmes. Nous admettons que les points initiaux des deux systèmes de coordonnées sont coïncidents, et nous aurons alors, en désignant par x, y et z les coordonnées du dernier système:

$$\left.\begin{aligned}
x &= ax_1 + by_1 + cz_1\\
y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1\\
z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

où a, b, c, a', etc., sont les cosinus des angles que forment entre eux les deux systèmes de coordonnées. Entre ces neuf cosinus se trouvent six équations conditionnelles, de sorte que trois d'entre elles seulement sont indépendantes. Ces équations sont trop connues pour être données ici; par contre, l'exposé de notre matière gagnera en concision, si nous indiquons les neuf expressions suivantes, connues aussi, pour les neuf cosinus comme fonctions de trois angles indépendants:

$$\left.\begin{aligned}
a &= -\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi\\
b &= -\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi\\
c &= \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}\theta\\
a' &= \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\psi\\
b' &= \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi\\
c' &= -\operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\theta\\
a'' &= \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta\\
b'' &= \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta\\
c'' &= \operatorname{Cos}\theta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Si l'on différentie ces équations et que l'on y mette

$$\left.\begin{aligned} p &= c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} \\ &= -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} \\ q &= a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} \\ &= -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} \\ r &= b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} \\ &= -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

on trouve:

$$p = \operatorname{Cos}\varphi\frac{d\theta}{dt} + \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\theta\frac{d\psi}{dt},$$

$$q = -\operatorname{Sin}\varphi\frac{d\theta}{dt} + \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\theta\frac{d\psi}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \operatorname{Cos}\theta\frac{d\psi}{dt};$$

ou en renversant les équations:

$$\operatorname{Sin}\theta\frac{d\psi}{dt} = p\operatorname{Sin}\varphi + q\operatorname{Cos}\varphi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = p\operatorname{Cos}\varphi - q\operatorname{Sin}\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - (p\operatorname{Sin}\varphi + q\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Cotang}\theta.$$

Admettons maintenant que p, q et r sont déjà connus, et que les deux premières de ces quantités sont assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits; admettons de plus que r ne diffère d'une constante n que d'une quantité minime du même ordre que p et q. Nous posons donc

$$r = n + \nu,$$

et nous recevons avec l'exactitude désirée:

$$\varphi = n(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \nu\, dt - \operatorname{Cotang}\theta_0 \int_{t_0}^{t} [p \operatorname{Sin} n(t-t_0) + q \operatorname{Cos} n(t-t_0)]\, dt,$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} [p \operatorname{Cos} n(t-t_0) - q \operatorname{Sin} n(t-t_0)]\, dt,$$

$$\psi = \psi_0 \frac{1}{\operatorname{Sin}\theta_0} \int_{t_0}^{t} [p \operatorname{Sin} n(t-t_0) + \varphi \operatorname{Cos} n(t-t_0)]\, dt.$$

Rien ne nous empêche de prendre comme égale à zéro la dernière des trois constantes nt_0, θ_0 et ψ_0 introduites par l'intégration. Nous sommes, par contre, forcés d'admettre pour θ_0 une valeur finie, car sans cela les développements en séries dont les formules ci-dessus constituent les premiers termes, ne convergeraient pas. En posant

$$\left.\begin{aligned} k &= \int_{t_0}^{t} \nu\, dt \\ l &= \int_{t_0}^{t} [p \operatorname{Sin} n(t-t_0) + q \operatorname{Cos} n(t-t_0)]\, dt \\ m &= \int_{t_0}^{t} [p \operatorname{Cos} n(t-t_0) - q \operatorname{Sin} n(t-t_0)]\, dt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

on obtient, tout en continuant à n'avoir égard qu'aux quantités du premier ordre, et, par conséquent, en ne conservant que les premières puissances de k, l et m:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin} n(t-t_0) + (k - l \operatorname{Cotang}\theta_0) \operatorname{Cos} n(t-t_0), \\ \operatorname{Cos}\varphi &= \operatorname{Cos} n(t-t_0) - (k - l \operatorname{Cotang}\theta_0) \operatorname{Cos} n(t-t_0), \\ \operatorname{Sin}\theta &= \operatorname{Sin}\theta_0 + m \operatorname{Cos}\theta_0, \\ \operatorname{Cos}\theta &= \operatorname{Cos}\theta_0 - m \operatorname{Sin}\theta_0, \\ \operatorname{Sin}\psi &= \frac{l}{\operatorname{Sin}\theta_0}, \\ \operatorname{Cos}\psi &= 1. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans les formules (3), il en résulte les expressions suivantes, où de même les premières puissances de k, l et m sont seules conservées:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \operatorname{Cos} n(t-t_0) - k \operatorname{Sin} n(t-t_0)\\
b &= -\operatorname{Sin} n(t-t_0) - k \operatorname{Cos} n(t-t_0)\\
c &= l\\
a' &= \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Sin} n(t-t_0) - m \operatorname{Sin}\theta_0 \operatorname{Sin} n(t-t_0) + k \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Cos} n(t-t_0)\\
b' &= \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Cos} n(t-t_0) - m \operatorname{Sin}\theta_0 \operatorname{Cos} n(t-t_0) - k \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Sin} n(t-t_0)\\
c' &= \operatorname{Sin}\theta_0 - m \operatorname{Cos}\theta_0\\
a'' &= \operatorname{Sin}\theta_0 \operatorname{Sin} n(t-t_0) + m \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Sin} n(t-t_0) + (k \operatorname{Sin}\theta_0 - l \operatorname{Cos}\theta_0) \operatorname{Cos} n(t-t_0)\\
b'' &= \operatorname{Sin}\theta_0 \operatorname{Cos} n(t-t_0) + m \operatorname{Cos}\theta_0 \operatorname{Cos} n(t-t_0) - (k \operatorname{Sin}\theta_0 - l \operatorname{Cos}\theta_0) \operatorname{Sin} n(t-t_0)\\
c'' &= \operatorname{Cos}\theta_0 - m \operatorname{Sin}\theta_0
\end{aligned}\right\} \quad (6).$$

§ 3.

En négligeant la progression du point de gravité dans l'espace, chaque point materiel du corps en rotation présente une double vitesse. Ainsi, les coordonnées x_1, y_1 et z_1 n'ayant pas été considérées comme constantes, le point dm a un mouvement dont la vitesse est donnée par les projections des axes coordonnés en rotation, savoir $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ et $\frac{dz_1}{dt}$. En second lieu, par suite de la rotation du corps, le même point a une vitesse dont nous désignerons par u, v et w les projections sur les mêmes axes. Les sommes de projection de ces deux vitesses donnent à leur tour:

$$u + \frac{dx_1}{dt} = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt},$$

$$v + \frac{dy_1}{dt} = b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt},$$

$$w + \frac{dz_1}{dt} = c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}.$$

En différentiant les équations (2), on obtient:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt} + x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt}\\
\frac{dy}{dt} &= a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt} + x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt}\\
\frac{dz}{dt} &= a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt} + x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7);$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions pour $n + \frac{dx_1}{dt}$, etc., on trouve, relativement aux équations (4):

$$u = qz_1 - ry_1,$$
$$v = rx_1 - pz_1,$$
$$w = py_1 - qx_1.$$

Si l'on pose ici $u = v = w = 0$, on obtient les équations de l'axe instantané de rotation; il forme avec les directions de x_1, y_1 et z_1 des angles dont les cosinus sont donnés par les formules suivantes:

$$\mathrm{Cos}\,(RX_1) = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,(RY_1) = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,(RZ_1) = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

A l'égard des cosinus des angles formés par l'axe instantané de rotation avec les directions fixes pour x, y et z, on trouve ensuite:

$$\mathrm{Cos}\,(RX) = \frac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,(RY) = \frac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\,(RZ) = \frac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Nous introduirons dans ces formules les valeurs de a, b, c, a' etc., trouvées dans le § précédent, tout en continuant à considérer p et q comme étant, à l'instar de k, l et m, des quantités minimes dont les carrés et les produits peuvent être négligés. Nous obtenons de la sorte:

$$\left.\begin{aligned}
n\,\mathrm{Cos}\,(RX) &= \mathrm{Cos}\,n(t-t_0) - q\,\mathrm{Sin}\,n(t-t_0) + ln\\
n\,\mathrm{Cos}\,(RY) &= p\,\mathrm{Cos}\,\theta_0\,\mathrm{Sin}\,n(t-t_0) + q\,\mathrm{Cos}\,\theta_0\,\mathrm{Cos}\,n(t-t_0) - n\,\mathrm{Sin}\,\theta_0 - nm\,\mathrm{Cos}\,\theta_0\\
n\,\mathrm{Cos}\,(RZ) &= p\,\mathrm{Sin}\,\theta_0\,\mathrm{Sin}\,n(t-t_0) + q\,\mathrm{Sin}\,\theta_0\,\mathrm{Cos}\,n(t-t_0) + n\,\mathrm{Cos}\,\theta_0 - nm\,\mathrm{Sin}\,\theta_0
\end{aligned}\right\} (8).$$

Transformons maintenant les expressions trouvées, de manière qu'elles deviennent des fonctions de p et de q seulement, en introduisant les valeurs de l et de m d'après les équations (5). Nous ferons usage pour cela des formules

$$\int_{t_0}^{t} p \operatorname{Sin} n(t-t_0)\,dt = \frac{p}{n}\operatorname{Cos} n(t-t_0) + \frac{p_0}{n} + \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\frac{dp}{dt}\operatorname{Cos} n(t-t_0)\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t} p \operatorname{Cos} n(t-t_0)\,dt = \frac{p}{n}\operatorname{Sin} n(t-t_0) - \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\frac{dp}{dt}\operatorname{Sin} n(t-t_0)\,dt,$$

et de formules identiques quand q entre à la place de p. Par p_0 et q_0 sont désignées les valeurs de p et q valables pour le temps t_0. Nous recevons de la sorte les expressions suivantes pour l et m:

$$nl = p_0 - p\operatorname{Cos} n(t-t_0) + q\operatorname{Sin} n(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{dp}{dt}\operatorname{Cos} n(t-t_0) - \frac{dq}{dt}\operatorname{Sin} n(t-t_0)\right\}dt,$$

$$ml = -q_0 + p\operatorname{Sin}(t-t_0) + q\operatorname{Cos} n(t-t_0) - \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{dp}{dt}\operatorname{Sin} n(t-t_0) + \frac{dq}{dt}\operatorname{Cos} n(t-t_0)\right\}dt.$$

Au lieu des angles RX, RY et RZ, nous introduirons leurs différences de certains angles constants, en posant

$$RX = \frac{\pi}{2} + \Delta RX,$$

$$RY = \frac{\pi}{2} + \theta_0 + \Delta RY,$$

$$RZ = \theta_0 + \Delta RZ,$$

et en considérant ΔRX, ΔRY et ΔRZ comme des quantités minimes dont les carrés peuvent être négligés; nous obtenons alors:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta RX &= \frac{p_0}{n} + \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{dp}{dt}\operatorname{Cos} n(t-t_0) - \frac{dq}{dt}\operatorname{Sin} n(t-t_0)\right\}dt \\ -\Delta RY &= \frac{q_0}{n} + \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{dp}{dt}\operatorname{Sin} n(t-t_0) + \frac{dq}{dt}\operatorname{Cos} n(t-t_0)\right\}dt \\ -\Delta RZ &= \Delta RZ. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

§ 4.

Nous allons maintenant déduire les équations différentielles des quantités p, q et r, en conformité de la supposition exprimée analytiquement par les équations (1).

Nous obtenons premièrement, des équations (2):

$$x_1 = ax + a'y + a''z\,,$$
$$y_1 = bx + b'y + b''z\,,$$
$$z_1 = cx + c'y + c''z\,,$$

d'ou suivent:

$$\frac{dx_1}{dt} = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt}\,,\quad \text{etc.}$$

On trouve, relativement à ces expressions:

$$x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = (ax + a'y + a''z)\Big(b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}\Big)$$
$$- (bx + b'y + b''z)\Big(a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}\Big)$$
$$+ x_1\Big\{(ax_1 + by_1 + cz_1)\frac{db}{dt} + (a'x_1 + b'y_1 + c'z_1)\frac{db'}{dt} + (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)\frac{db''}{dt}\Big\}$$
$$- y_1\Big\{(ax_1 + by_1 + cz_1)\frac{da}{dt} + (a'x_1 + b'y_1 + c'z_1)\frac{da'}{dt} + (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)\frac{da''}{dt}\Big\}\ \text{etc.},$$

équations qui, par suite de relations connues entre a, b, etc., et en considérant les équations (4), prennent, après quelques réductions, la forme suivante:

$$x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = -r(x_1^2 + y_1^2) + px_1z_1 + qy_1z_1$$
$$+ c''\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big) + c'\Big(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\Big) + c\Big(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\Big),\ \text{etc.}$$

En y ayant égard pour les équations (1), nous obtenons immédiatement:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= c\Sigma\Big(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\Big)dm + c'\Sigma\Big(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\Big)dm + c''\Sigma\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dm\\
&\quad + p\Sigma x_1z_1\,dm + q\Sigma y_1z_1\,dm - r\Sigma(x_1^2 + y_1^2)\,dm\,,\\
0 &= b\Sigma\Big(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\Big)dm + b'\Sigma\Big(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\Big)dm + b''\Sigma\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dm\\
&\quad + p\Sigma x_1y_1\,dm + r\Sigma y_1z_1\,dm - q\Sigma(x_1^2 + z_1^2)\,dm\,,\\
0 &= a\Sigma\Big(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\Big)dm + a'\Sigma\Big(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\Big)dm + a''\Sigma\Big(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\Big)dm\\
&\quad + q\Sigma x_1y_1\,dm + r\Sigma x_1z_1\,dm - p\Sigma(y_1^2 + z_1^2)\,dm
\end{aligned}\right\}\quad (10);$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{ou} \qquad \Sigma\Big(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\Big)dm = \\
&-(pc+ra)\Sigma x_1 z_1\,dm-(qc+rb)\Sigma y_1 z_1\,dm-(pb+qa)\Sigma x_1 y_1\,dm \\
&+rc\Sigma(x_1^2+y_1^2)\,dm+qb\Sigma(x_1^2+z_1^2)\,dm+pa\Sigma(y_1^2+z_1^2)\,dm, \\
&\Sigma\Big(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\Big)dm = \\
&-pc'+ra')\Sigma x_1 z_1\,dm-(qc'+rb')\Sigma y_1 z_1\,dm-(pb'+qa')\Sigma x_1 y_1\,dm \\
&+rc'\Sigma(x_1^2+y_1^2\,dm+qb'\Sigma(x_1^2+z_1^2)\,dm+pa'\Sigma(y_1^2+z_1^2)\,dm, \\
&\Sigma\Big(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\Big)dm = \\
&-(pc''+ra'')\Sigma x_1 z_1\,dm-(qc''+rb'')\Sigma y_1 z_1\,dm-(pb''+qa'')\Sigma x_1 y_1\,dm \\
&+rc''\Sigma(x_1^2+y_1^2)\,dm+qb''\Sigma(x_1^2+z_1^2)\,dm+pa''\Sigma(y_1^2+z_1^2)\,dm
\end{aligned}\right\}\ (11).
$$

Désignant par X, Y et Z les forces agissant sur le point dm parallèlement à la direction de x, y et z, nous obtenons les relations suivantes bien connues:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\Big(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\Big)dm &= \Sigma(yZ-zY), \\
\Sigma\Big(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\Big)dm &= \Sigma(zX-xZ), \\
\Sigma\Big(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\Big)dm &= \Sigma(xY-yX).
\end{aligned}
$$

Désignant ensuite par X_1, Y_1 et Z_1 les composants de force dans les directions de x_1, y_1 et z_1 nous obtenons, des équations ci-dessus:

$$
\left.\begin{aligned}
&c\,\Sigma\Big(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\Big)dm+c'\Sigma\Big(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\Big)dm+c''\Sigma\Big(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\Big)dm \\
&\qquad = \Sigma(x_1Y_1-y_1X_1) = N \\
&b\,\Sigma\Big(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\Big)dm+b'\Sigma\Big(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\Big)dm+b''\Sigma\Big(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\Big)dm \\
&\qquad = \Sigma(x_1X_1-x_1Z) = M \\
&a\,\Sigma\Big(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\Big)dm+a'\Sigma\Big(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\Big)dm+a''\Sigma\Big(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\Big)dm \\
&\qquad = \Sigma(y_1Z_1-z_1Y_1) = L
\end{aligned}\right\}\ (12).
$$

En dernier lieu, nous introduirons les termes ci-dessous:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(y_1^2+z_1^2)dm &= A+A_1\\ \Sigma(x_1^2+y_1^2)dm &= B+B_1\\ \Sigma(x_1^2+y_1^2)dm &= C+C_1\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (13)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma y_1 z_1 dm &= A'\\ \Sigma x_1 z_1 dm &= B'\\ \Sigma x_1 y_1 dm &= C'\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (14),$$

dans lesquels nous considérons A, B et C comme constantes, mais A_1, A', B_1, etc., comme des quantités minimes variables avec le temps.

Si, maintenant, l'on différentie les équations (10), on obtient, en ayant dûment égard aux expressions (11), (12), (13) et (14) et aux propriétés connues des quantités a, b, etc.:

$$\left.\begin{aligned}0 &= N-qrB'+prA'+(pq-qq)C'-pq(B+B_1)+pq(A+A_1)\\ &\quad+\frac{d[pB'+qA'-r(C+C_1)]}{dt},\\ 0 &= M-pqA'+qrC'+(rr-pp)B'+pr(C+C_1)-pr(A+A_1)\\ &\quad+\frac{d[pC'+rA'-q(B+B_1)]}{dt},\\ 0 &= L+pqB'-prC'-(rr-qq)A'-qr(C+C_1)+qr(B+B_1)\\ &\quad+\frac{d[qC'+rB'-p(A+A_1)]}{dt}\end{aligned}\right\}\ (15).$$

Ces équations peuvent facilement être rendues sous une forme plus élégante. En posant

$$\begin{aligned}\zeta &= r(C+C_1)-pB'-qA',\\ \eta &= q(B+B_1)-pC'-rA',\\ \xi &= p(A+A_1)-qC'-rB',\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= q\xi-p\eta+N,\\ \frac{d\eta}{dt} &= p\zeta-r\xi+M,\\ \frac{d\xi}{dt} &= r\eta-q\zeta+L.\end{aligned}$$

Si l'on regarde ici $N = M = L = 0$, on trouve immédiatement une équation intégrale, savoir

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 = \text{Constante.}$$

Nous ne poursuivrons pas plus loin l'intégration rigoureure des équations differentielles (15) et (15 a), le besoin pratique du moment étant rempli par une solution même peu complète. Car, si la rotation de la terre n'est pas rigoureusement conforme à celle d'un corps parfaitement solide, les differences qui peuvent exister sont toutefois sans nul doute très-petites. Nous savons de plus que, si l'axe de rotation de la terre ne passe pas continuellement par les mêmes points de sa surface, c'est toutefois au plus près le cas. Les variations dans la position de certaines localités relativement à l'axe de rotation, énoncées, il est vrai, ne sont encore nullement prouvées. Si donc nous admettons que l'axe de z coïncide au plus près avec l'axe de rotation de la terre, p et q seront, relativement à r, de trèspetites quantités du même ordre que A_1, B_1, etc. Nous allons donc intégrer ces équations différentielles, en supposant que les termes seuls qui ne sont pas d'un ordre supérieur seront sensibles.

§ 5.

En abrégeant les équations (15) conformément á la supposition signalée à la fin du § précédent, et en posant en outre $A = B$, ce qui peut se faire sans restreindre l'étendue de nos recherches, ces équations se transforment dans les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} C\frac{dr}{dt} + r\frac{dC}{dt} &= N \\ A\frac{dq}{dt} - pr(C-A) - rrB^2 - r\frac{dA^2}{dt} &= M \\ A\frac{dp}{dt} + qr(C-A) + rrA^2 - r\frac{dB^2}{dt} &= L \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16).$$

La première de ces équations nous donne immédiatement:

$$r = e^{-\frac{1}{C}\int \frac{dC}{dt}dt}\left\{\text{Const} + \int N e^{\frac{1}{C}\int \frac{dC}{dt}dt}\,dt\right\}.$$

L'exactitude de ce résultat ne peut toutefois s'étendre plus loin qu'aux termes du premier ordre. Si nous considérons de même N comme appar-

tenant au même ordre, et si nous désignons par n la constante d'intégration, nous pouvons écrire l'équation ci-dessus de la manière suivante:

$$r = n - \frac{n}{C}\int \frac{dC_1}{dt}dt + \int N dt = n\left(1 - \frac{C_1}{C}\right) + \int N dt \ldots (17).$$

Nous pouvons de même, avec l'exactitude désirable pour notre but, intégrer les deux dernières des équations (16) en substituant à r sa partie constante ou n. En outre, au lieu de p et q, nous introduirons deux nouvelles variables f et g, dont les relations aux précédentes sont exprimées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} p &= -f \operatorname{Sin} \mu n t + g \operatorname{Cos} \mu n t \\ q &= f \operatorname{Cos} \mu n t + g \operatorname{Sin} \mu n t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18),$$

où

$$\mu = \frac{C - A}{A}.$$

Les deux dernières des équations (16) passent dès-lors dans les suivantes:

$$\operatorname{Cos} \mu n t \frac{df}{dt} + \operatorname{Sin} \mu n t \frac{dg}{dt} - \frac{n}{A}\left(nB' + \frac{dA'}{dt}\right) = \frac{1}{A}M,$$

$$\operatorname{Sin} \mu n t \frac{df}{dt} + \operatorname{Cos} \mu n t \frac{dg}{dt} + \frac{n}{A}\left(nA' - \frac{dB'}{dt}\right) = \frac{1}{A}L,$$

d'où l'on obtient en dernier lieu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= n\left\{\left(n\frac{B'}{A} + \frac{1}{A}\frac{dA'}{dt}\right)\operatorname{Cos} \mu n t + \left(n\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\frac{dB'}{dt}\right)\operatorname{Sin} \mu n t\right\} \\ &\quad + \frac{1}{A}(M \operatorname{Cos} \mu n t - L \operatorname{Sin} \mu n t) \\ \frac{dg}{dt} &= n\left\{\left(n\frac{B'}{A} + \frac{1}{A}\frac{dA'}{dt}\right)\operatorname{Sin} \mu n t - \left(n\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\frac{dB'}{dt}\right)\operatorname{Cos} \mu n t\right\} \\ &\quad + \frac{1}{A}(M \operatorname{Sin} \mu n t + L \operatorname{Cos} \mu n t) \end{aligned}\right\} \ldots (19).$$

Les quantités à droite des signes d'égalité doivent être considérées comme connues, f et g s'obtenant par des quadratures.

Si, d'un autre côté, p et q étaient connues, on trouve les valeurs correspondantes à A' et B' des équations (16), en posant:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \mu \operatorname{Cos} nt \,.\, F - \mu \operatorname{Sin} nt \,.\, G \\ \frac{B'}{B} &= \mu \operatorname{Sin} nt \,.\, F + \mu \operatorname{Cos} nt \,.\, G \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Nous obtenons de la sorte

$$-\operatorname{Cos} nt \frac{dF}{dt} + \operatorname{Sin} nt \frac{dG}{dt} - p + \frac{1}{\mu n}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\mu n A} M,$$

$$-\operatorname{Sin} nt \frac{dF}{dt} - \operatorname{Cos} nt \frac{dG}{dt} + q - \frac{1}{\mu n}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\mu n A} L,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= -\left\{p - \frac{1}{\mu n}\frac{dq}{dt}\right\} \operatorname{Cos} nt + \left\{q + \frac{1}{\mu n}\frac{dp}{dt}\right\} \operatorname{Sin} nt \\ &\quad - \frac{1}{\mu n A}(M \operatorname{Cos} nt + L \operatorname{Sin} nt), \\ \frac{dG}{dt} &= -\left\{p - \frac{1}{\mu n}\frac{dq}{dt}\right\} \operatorname{Sin} nt + \left\{q + \frac{1}{\mu n}\frac{dp}{dt}\right\} \operatorname{Cos} nt \\ &\quad - \frac{1}{\mu n A}(M \operatorname{Sin} nt - L \operatorname{Cos} nt) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21).$$

§ 6.

Les quantités A_1, B_1 et C_1 représentent les variations de grandeur des moments d'inertie principale; A', B' et C', par contre, les modifications de leurs directions. Nous exprimerons ces dernières par les angles que les directions instantanées des moments d'inertie forment avec les directions de x_1, y_1 et z_1. Nous désignerons par x', y' et z', les coordonnées rapportées aux directions signalées en premier lieu, en supposant que les axes des deux systèmes de coordonnées forment entre eux des angles dont les cosinus sont α, β, γ, α', etc.; nous recevons alors:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y_1 &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z_1 &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22),$$

La propriété caractéristique de ce nouveau système de coordonnées est indiquée par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x'y'dm &= 0 \\ \Sigma x'z'dm &= 0 \\ \Sigma y'z'dm &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

lesqulles expriment, comme on le sait, que les axes de x', y' et z' coïncident avec les directions des moments d'inertie principales du corps en rotation.

Dans ce qui suit, nous admettrons que l'angle formé par les directions de z_1 et de z', est très-petit, de sorte que le carré en peut être négligé. Si donc nous désignons cet angle par ι, et les deux autres angles par η et λ, nous pouvons écrire les expressions suivantes pour les neuf cosinus α, β, etc.:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \quad \mathrm{Cos}\,(\eta + \lambda)\,, \\
\beta &= -\mathrm{Sin}\,(\eta + \lambda)\,, \\
\gamma &= \quad \iota\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,, \\
\alpha' &= \quad \mathrm{Sin}\,(\eta + \lambda)\,, \\
\beta' &= \quad \mathrm{Cos}\,(\eta + \lambda)\,, \\
\gamma' &= -\iota\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,, \\
\alpha'' &= \quad \iota\,\mathrm{Sin}\,\eta\,, \\
\beta'' &= \quad \iota\,\mathrm{Cos}\,\eta\,, \\
\gamma'' &= \quad 1\,.
\end{aligned}$$

En substituant ensuite les valeurs de x_1, y_1 et z_1 exprimées comme fonctions de ι, η et λ, et de x', y' et z', dans les équations (13) et (14), on obtient, relativement aux équations (23):

$$\begin{aligned}
C + C_1 &= \Sigma(x'^2 - y'^2)\,dm\,, \\
B + B_1 &= \mathrm{Cos}\,(\eta + \lambda)^2 \Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm + \mathrm{Sin}\,(\eta + \lambda)^2 \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\,, \\
A + A_1 &= \mathrm{Sin}\,(\eta + \lambda)^2 \Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm + \mathrm{Cos}\,(\eta + \lambda)^2 \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\,, \\
C' &= \mathrm{Sin}\,(\eta + \lambda)\,\mathrm{Cos}\,(\eta + \lambda)\{\Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\}\,, \\
B' &= \iota\,\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\lambda\{\Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\} \\
&\quad + \iota\,\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\{\Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\} \\
&\quad - \iota\,\mathrm{Sin}\,\lambda\{\Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(x'^2 + y'^2)\,dm\}\,, \\
A' &= \iota\,\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Sin}\,\lambda\{\Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\} \\
&\quad - \iota\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\lambda\{\Sigma(x'^2 + z'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\} \\
&\quad + \iota\,\mathrm{Cos}\,\lambda\{\Sigma(x'^2 + y'^2)\,dm - \Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm\}\,.
\end{aligned}$$

Nous allons introduire quelques abréviations ultérieures dans ces expressions, où nous avons déjà négligé tous les termes dépendant de puissances de ι supérieures à la première. Nous poserons premièrement:

$$\Sigma(x'^2 + y'^2)\,dm = C + \delta C,$$
$$\Sigma(x'^2 + y'^2)\,dm = B + \delta B,$$
$$\Sigma(y'^2 + z'^2)\,dm = A + \delta A,$$

donnant à A, B et C la signification qu'avaient déjà plus haut ces quantités. Comme, en outre, la forme et la composition de la terre sont telles, qu'au plus près

$$A = B,$$

nous supposerons, comme dans le § précédent, que cette ressemblance est strictement vraie, d'où δA ou δB peut obtenir une signification légèrement modifiée. En négligeant les produits de δA, δB et δC avec ι, nous trouvons:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \mathrm{Sin}\,(\eta+\lambda)^2\delta B + \mathrm{Cos}\,(\eta+\lambda)^2\delta A\\
B_1 &= \mathrm{Cos}\,(\eta+\lambda)^2\delta B + \mathrm{Sin}\,(\eta+\lambda)^2\delta A\\
C_1 &= \delta C\\
A' &= \iota\,\mathrm{Cos}\,\lambda(C-A)\\
B' &= \iota\,\mathrm{Sin}\,\lambda(C-A)\\
C' &= \mathrm{Sin}\,(\eta+\lambda)(\mathrm{Cos}\,\eta+\lambda)(\delta B-\delta A)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

§ 7.

Au lieu des six quantités A_1, B_1, . . . C', nous avons, dans le § précédent, six nouvelles fonctions dépendant du temps, savoir δA, δB, δC, ι, λ et η. Nous ne les pouvons toutefois ultérieurement déterminer, dépendantes qu'elles sont de circonstances géologiques dont la plus grande partie nous sont inconnues. Si donc nous voulons pousser plus loin nos recherches, il nous faudra prendre pour ces fonctions la forme la plus générale possible. A cette forme appartient une série dont les termes dépendent du temps de diverses façons, une partie en étant périodiques et une autre partie séculaires, ou d'une nature tant périodique que séculaire; nous pouvons en dernier lieu considérer une troisième partie comme dépendante du temps d'une manière discontinue.

Il résulte des équations (16) que r ne dépend que de C_1, c.-à-d. de δC; p et q, par contre, de A' et de B', c.-à-d. de λ et de ι. La forme approximative dont nous avons revêtu notre problème, fait disparaître, par conséquent, l'influence de A_1, B_1 et C', ou de δA, δB et η. Ces fonc-

tions ne seront employées que lorsque nous considérerons les grandeurs du second ordre relativement à p et à q.

L'application de la théorie développée dans les pages précédentes ressortira le mieux en présentant quelques exemples. Nous considérerons toujours $M = L = 0$. Dans un premier exemple, nous supposerons que $\lambda = 0$ et que l'angle ι se modifie proportionnellement au temps, de sorte que si β désigne une constante, ι sera exprimé par la formule suivante:

$$\iota = \beta t .$$

Nous obtenons alors:

$$\frac{A'}{A} = \mu\beta t , \qquad B' = 0 ,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dA'}{dt} = \mu\beta , \qquad \frac{dB'}{dt} = 0 .$$

Si, maintenant, nous plaçons ces valeurs dans les équations (19), nous obtenons, après leur intégration, les constantes d'intégration étant désignées par f_0 et g_0:

$$f = f_0 + \beta \operatorname{Sin} \mu nt - n\beta t \operatorname{Cos} \mu nt + \frac{\beta}{\mu} \operatorname{Sin} \mu nt ,$$

$$g = g_0 - \beta \operatorname{Cos} \mu nt - n\beta t \operatorname{Sin} \mu nt - \frac{\beta}{\mu} \operatorname{Cos} \mu nt .$$

Les équations (18) nous donnent ensuite:

$$p = -f_0 \operatorname{Sin} \mu nt + g_0 \operatorname{Cos} \mu nt - \beta\left(\frac{1}{\mu} + 1\right),$$

$$q = \quad f_0 \operatorname{Cos} \mu nt + g_0 \operatorname{Sin} \mu nt - n\beta t .$$

En supposant que p et q disparaissent quand $t = 0$, les constantes se déterminent comme suit:

$$f_0 = 0 ,$$

$$g_0 = \beta\left(\frac{1}{\mu} + 1\right).$$

D'où l'on obtient en dernier lieu:

$$p = -\beta\left(\frac{1}{\mu} + 1\right)(1 \operatorname{Cos} \mu nt),$$

$$q = \quad \beta\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \operatorname{Sin} \mu nt - n\beta t .$$

La terre étant censée le corps en rotation, on a $\mu = 0{,}00322$; si l'on prend ensuite un an pour l'unité de temps, on aura $n\mu = 432''{,}7$, ou, exprimé en parties du rayon, $= 7{,}56$. Si, maintenant, p. ex., $\beta = 0'{,}01$, les altitudes polaires d'un méridien donné se modifieraient d'une seconde pendant l'espace de cent ans. Il en résulterait en outre une variation périodique des altitudes polaires, variation qui, toutefois, vu sa petitesse, ne pourrait être aperçue avec nos moyens actuels d'observation. Les termes périodiques sont, en négligeant 1 auprès de $\frac{1}{\mu}$:

$$\frac{p}{n} = 0''{,}0013 \operatorname{Cos} \mu n t ,$$

$$\frac{q}{n} = 0''{,}0013 \operatorname{Sin} \mu n t .$$

Si l'on introduit dans les équations (9) les expressions données ci-dessus pour p et pour q, on trouve que de même ΔRX, ΔRY et ΔRZ deviennent inappréciables. Les ascensions et les déclinaisons droites des étoiles ne changent donc pas d'un degré sensible, si les directions des moments principaux d'inertie de la terre subissent des variations d'une lenteur considérable.

Nous allons rechercher dans un autre exemple les cas où $\lambda = 0$, et

$$\iota \quad \varepsilon(1 - e^{-set}),$$

dans laquelle formule ε et se désignent des grandeurs invariables, dont nous supposons que se a une grande valeur numérique, 1000, p. ex., tandis que nous conservons à l'unité de t sa précédente valeur.

La présence d'un tel terme indique que la direction des axes des moments d'inertie, subit, pendant un très-court espace de temps, une variation dont ε donne la valeur. On peut supposer qu'un phénomène de ce genre est, p. ex., le produit d'un tremblement de terre.

Dans l'exemple actuel, nous avons

$$\frac{A'}{dt} = \varepsilon\mu(1 - e^{-set}), \quad B' = 0 ,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dA'}{dt} = se\varepsilon\mu\varepsilon^{-nt}, \qquad \frac{dB'}{dt} = 0 ;$$

et en faisant entrer ces expressions dans les équations (19), nous trouvons:

$$f = f_0 - n\varepsilon \operatorname{Cos} \mu n t + se\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Sin} \mu n t - se \operatorname{Cos} \mu n t}{(\mu n)^2 + se^2} e^{-set}$$

$$+ n\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Cos} \mu n t + se \operatorname{Sin} \mu n t}{(\mu n)^2 + se^2} e^{-set},$$

$$g = g_0 - n\varepsilon \operatorname{Sin} \mu n t - se\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Cos} \mu n t + se \operatorname{Sin} \mu n t}{(\mu n)^2 + se^2} e^{-set}$$

$$+ n\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Sin} \mu n t - se \operatorname{Cos} \mu n t}{(\mu n)^2 + se^2} e^{-set}.$$

Nous pouvons négliger dans ces expressions les termes multipliés par μ, ces termes étant d'un côté infiniment plus petits en eux-mêmes que les précédents, et de l'autre, leur valeur subissant une diminution très-rapide par suite du facteur e^{-set}. Si nous déterminons en dernier lieu les constantes f_0 et g_0 de telle sorte que f et g ou p et q disparaissent pour $t = 0$, nous aurons:

$$p = -n\varepsilon \operatorname{Sin} \mu n t,$$

$$q = n\varepsilon \operatorname{Cos} \mu n t - n\varepsilon.$$

Notre troisième exemple traitera le cas où la même supposition a lieu que dans le précédent, mais en y ajoutant que les axes des moments d'inertie principale reprennent après quelque temps leur position primitive. Un terme correspondant à un phénomène naturel de ce genre, peut être représenté par l'expression

$$\iota = \varepsilon e^{-\delta t}(1 - e^{-set}).$$

Si nous posons en outre $\lambda = 0$, nous avons

$$\frac{A'}{A} = \varepsilon\mu e^{-\delta t}(1 - e^{-set}), \qquad B' = 0,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dA'}{dt} = \delta\varepsilon\mu e^{-\delta t} + (se + \delta)\varepsilon\mu e^{-(\delta + se)t}, \qquad \frac{dB'}{dt} = 0.$$

Donnant, comme plus haut, une grande valeur à se, et négligeant après l'intégration les termes qui auront e^{-set}, nous trouvons:

$$f = f_0 - n\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Cos} \mu n t + \delta \operatorname{Sin} \mu n t}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t}$$

$$- d\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Sin} \mu n t - \delta \operatorname{Cos} \mu n t}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t},$$

$$g = g_0 - n\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Sin} \mu n t - \delta \operatorname{Cos} \mu n t}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t}$$

$$+ n\varepsilon\mu n \frac{\mu n \operatorname{Cos} \mu n t + \delta \operatorname{Sin} \mu n t}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t}.$$

Déterminant les constantes f_0 et g_0 d'après les mêmes principes que ci-dessus, et abrégeant le facteur $1 + \mu$ à 1, nous obtenons:

$$f_0 = \varepsilon n \frac{(\mu n)^2 - \mu\delta^2}{(\mu n)^2 + \delta^2},$$

$$g_0 = -\varepsilon n \frac{\mu n \delta}{(\mu n)^2 + \delta^2}.$$

D'où nous trouvons enfin:

$$p = -\varepsilon n \frac{(\mu n)^2 - \mu\delta^2}{(\mu n)^2 + \delta^2} \operatorname{Sin} \mu n t - \varepsilon n \frac{\mu n \delta}{(\mu n)^2 + \delta^2} \operatorname{Cos} \mu n t$$

$$+ \varepsilon n \frac{\mu n \delta}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t} + \varepsilon\delta \frac{(\mu n)^2}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t},$$

$$q = \varepsilon n \frac{(\mu n)^2 - \mu\delta^2}{(\mu n)^2 + \delta^2} \operatorname{Cos} \mu n t - \varepsilon n \frac{\mu n \delta}{(\mu n)^2 + \delta^2} \operatorname{Sin} \mu n t$$

$$- \varepsilon n \frac{(\mu n)^2}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t} + \varepsilon\mu n \frac{\delta^2}{(\mu n)^2 + \delta^2} e^{-\delta t}.$$

En introduisant $\delta = 0$ dans ces formules, nous obtenons le même résultat que dans l'exemple précédent.

Si nous supposons δ si petit que cette quantité peut être négligée partout, à l'exception des termes où elle est multipliée avec le temps, l'expression ci-dessus se simplifie et donne:

$$p = \varepsilon n \operatorname{Sin} \mu n t,$$

$$q = \varepsilon n \operatorname{Cos} \mu n t - \varepsilon n e^{-\delta t}.$$

Si, par contre, δ a une grande valeur numérique, p et q seront donnés quelque temps après l'époque initiale par les expressions suivantes:

$$p = \varepsilon n \mu \operatorname{Sin} \mu n t,$$

$$q = \varepsilon n \mu \operatorname{Cos} \mu n t.$$

Comme ces valeurs contiennent le facteur minime μ, nous en concluons que p et q ne peuvent être appréciables, en continuant à nous fon-

der sur la prémisse posée à l'égard de k et de δ, savoir que ces deux quantités ont une grande valeur numérique.

Les expressions de p et de q que nous avons déduites plus haut, ne donnent pas cause à un changement sensible de la position de l'axe de rotation dans l'espace, si même l'on pouvait apercevoir des changements dans la situation géographique d'une localité quelconque. Nous obtenons ce résultat immédiatement des équations (9). L'hypothèse que nous allons examiner dans l'exemple suivant est d'une nature opposée. Nous nous y figurons A' et B' donnés au moyen des expressions suivantes:

$$\frac{A'}{A} = \varepsilon \operatorname{Cos} ht, \qquad \frac{B'}{A} = -\varepsilon \operatorname{Sin} ht,$$

h désignant une quantité coïncidant au plus près avec n. Ces expressions présupposent les valeurs suivantes pour ι et pour λ:

$$\iota = \frac{2}{\mu},$$

$$\lambda = \pi - ht.$$

Après un calcul en tout conforme à ceux donnés dans l'exemple précédent, nous trouvons:

$$p = \varepsilon(n-h) \operatorname{Sin} \mu nt + \varepsilon(n-h) \operatorname{Sin} ht,$$
$$q = \varepsilon(n-h) \operatorname{Cos} \mu nt + \varepsilon(n-h) \operatorname{Cos} ht,$$

où toutefois quelques termes numériquement inappréciables ont été négligés.

Si, maintenant, ε est en soi-même une petite quantité, nous pouvons considérer p et q comme d'une excessive petitesse, du moment où la différence $n-h$ est supposée minime en comparaison de n. Les angles ΔRX et ΔRY peuvent par contre devenir sensibles maintenant, car ils sont du même ordre de grandeur que ε. En introduisant dans les équations (9) les valeurs de p et de q, on obtient, si l'on ne conserve que les termes les plus essentiels,

$$\Delta RX = -\varepsilon \operatorname{Sin} (n-h)t,$$
$$\Delta RY = \varepsilon \operatorname{Cos} (n-h)t.$$

Nous arrivons à un résultat analogue, en prenant pour A' et B' les expressions suivantes:

$$\frac{A'}{A} = -\varepsilon \operatorname{Sin} (n-h)t \operatorname{Cos} ht,$$
$$\frac{B'}{B} = -\varepsilon \operatorname{Sin} (n-h)t \operatorname{Sin} ht,$$

ou

$$\iota = \frac{\varepsilon}{\mu} \operatorname{Sin}(n - h)t,$$

$$\lambda = \pi - ht.$$

Nous trouvons maintenant:

$$p = -\varepsilon(n - h) \operatorname{Cos} \mu n t + \varepsilon(n - h) \operatorname{Cos}(2h - n)t,$$

$$q = \varepsilon(n - h) \operatorname{Sin} \mu n t - \varepsilon(n - h) \operatorname{Sin}(2h - n)t,$$

et

$$\Delta RX = \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Sin} 2(n - h)t,$$

$$\Delta RY = \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Cos} 2(n - h)t.$$

Les causes physiques aptes à faire naître de pareils termes ne peuvent manquer totalement. Nous pouvons, p. ex., en voir une dans le phénomène du flux et du reflux, surtout si des phénomènes analogues se font sentir dans l'intérieur de la terre. On a, sans doute, considéré des phénomènes de cette nature, du moins quand ils ont lieu à la surface de la terre, comme n'exerçant aucune influence sur la direction de l'axe de rotation; mais les preuves ne s'étendent pas à la circonstance que nous avons examinée dans les pages précédentes, savoir la modification des moments d'inertie et de la direction de leurs axes. C'est ce que concède aussi Laplace, quand il dit dans sa Mécanique céleste (Tome II, p. 399): "*Le déplacement de ses parties (de la terre) peut seul altérer ce mouvement; si, par exemple, un corps placé au pôle était transporté à l'équateur, la somme des aires devant toujours rester la même, le mouvement de rotation de la terre en serait un peu diminué; mais, pour que cela fût sensible, il faudrait supposer de grands changements dans la constitution de la terre.*" Or, la question est précisément celle-ci: les changements dans la répartition de la masse dans l'intérieur du corps terrestre, lesquels ont indubitablement lieu, sont-ils ou ne sont-ils pas assez considérables pour exercer une influence sensible sur la rotation de la terre. La possibilité d'un essai de solution de cette question par la voie astronomique dépendait en premier lieu de l'étude de sa nature théorique.

Corrigenda:

Page	5	l.	11	*au lieu de*	point	*lisez*	centre
„	7	„	16 et 17	„	$\frac{\pi}{z}$	„	$\frac{\pi}{\Omega}$
„	„	„	23	„	$= \Delta\, RZ$	„	$= -\Delta\, RY$
„	9	„	5	„	$-pc' + ra')\Sigma x_1 z_1\, dm$	„	$-(pc' + ra')\Sigma x_1 z_1\, dm$
„	„	„	6	„	$+ rc'\,\Sigma(x_1^2 + y_1^2\, dm$	„	$+ rc'\,\Sigma(x_1^2 + y_1^2) dm$
„	11	„	23	„	$r'\frac{dC}{dt}$	„	$r\frac{dC_1}{dt}$
„	„	„	24	„	$- rrB^2 - r\frac{dA^2}{dt}$	„	$- rrB' - r\frac{dA'}{dt}$
„	„	„	25	„	$+ rrA^2 - r\frac{dB^2}{dt}$	„	$+ rrA' - r\frac{dB'}{dt}$
„	14	„	21	„	$\Sigma(x'^2 - y'^2)\, dm$	„	$\Sigma(x'^2 + y'^2)\, dm$
„	16	„	25	„	$(1\ \mathrm{Cos}\ \mu n t)$	„	$(1 - \mathrm{Cos}\ \mu n t)$
„	17	„	2	„	$432''$	„	432^0
„	„	„	13	„	ascensions et les déclinaisons droites	„	ascensions droites et les déclinaisons
„	„	„	18	„	$\iota = \varepsilon(1 - e^{-set})$	„	$\iota = \varepsilon(1 - e^{-\varkappa t})$ *)
„	„	„	27	„	$\frac{A'}{dt}$	„	$\frac{A'}{A}$
„	„	„	28	„	$se\varepsilon\mu\varepsilon^{-nt}$	„	$\varkappa\varepsilon\mu e^{-\lambda t}$
„	18	„	1	„	se^e	„	$\varkappa^2$
„	„	„	25	„	$d\varepsilon\mu n$	„	$\delta\varepsilon\mu n$
„	19	„	2	„	$n\varepsilon\mu n$	„	$\delta\varepsilon\mu n$
„	20	„	13	„	$\iota = \frac{2}{\mu}$	„	$\iota = \frac{\varepsilon}{\mu}$

*) La même faute d'impression *se*, au lieu de $\varkappa$, se trouve aussi dans quelques endroits dans la même page et dans la suivante.

SYSTÈMES

DE LIGNES ET DE SURFACES ÉGALES,

TERMINÉES PAR DES RAYONS COMMUNS.

PAR

R. HOPPE.

(Présentée à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 2 Juin 1871.)

UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1871.

Imaginons qu'un système de rayons partant d'un centre fixe est traversé par un système de courbes planes. Nous nous proposons de déterminer le système des courbes tel, que leurs arcs contenus entre deux rayons quelconques soient de même longueur. Un pareil problème existe relatif aux surfaces, dont je traiterai plus bas. Bien qu'il ne soit possible d'assigner en termes primitifs les équations des courbes et des surfaces que pour quelques cas particuliers, pourtant se présentent quelques propriétés, il me semble, dignes de remarque, qui distinguent les systémes en question.

1. *Équation différentielles des courbes planes.*

Prenons le centre des rayons pour origine des coordonnées rectangulaires x, y et des coordonnées polaires r, v; et désignons par s l'arc d'une courbe, qui joint le rayon fixe $v = o$, axe des x, avec le rayon mobil $v = v$. Faisons varier cette courbe, ses bouts glissant le long des deux rayons, pendant que v reste constant. Si elle est une courbe du système dont il s'agit, s restera aussi constant; par conséquent, lorsque v varie en même temps, s sera fonction de v seul, et par la fonction

$$s = f v$$

que nous considérerons comme donnée, le système des courbes sera complètement déterminé.

Si ϑ désigne l'angle entre le rayon et la normale, on a:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = f'v \sin \vartheta \ , \quad r = f'v \cos \vartheta . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

En éliminant ϑ ou r on obtient deux formes de l'équation différentielle:

$$r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 = (f' v)^2, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\partial \log f' v = \operatorname{tg} \vartheta \, \partial (v + \vartheta). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

2. *Enveloppe du système de courbes.*

La seconde équation (1) fait voir, qu'il y a, pour toute valeur de v, qui peut entrer dans la fonction, et pour toute valeur de $r < f' v$, une seule valeur de $\cos \vartheta$, et, par cette raison, deux valeurs de ϑ. Pour $r = f' v$ ces deux valeurs coïncident en s'évanouissant, et pour $r > f' v$ elles cessent d'être réelles. Donc tous les rayons, dans l'étendue du système, sont traversés par une courbe

$$r = f' v,$$

ligne de démarcation du système totale. Supposé que la fonction $f' v$ soit continue dès $v = o$ jusqu'à $v = 2\pi$, cette courbe entoure le système et renferme le centre. Je prendrai la liberté de l'appeler *enveloppe* du système, quoiqu'en général elle ne soit pas en contact avec les courbes.

Dans chaque point de l'aire entourée deux courbes se rencontrent sous un angle $= 2\vartheta$, l'une s'éloignant, l'autre se rapprochant du centre; c'est pourquoi le système total se décompose en deux systèmes distingués par leurs inclinaisons contraires au rayon. Chaque point de l'enveloppe est le point de contact de deux courbes, qui y aboutissent, ou, si nous préférons de le regarder d'une autre manière, le point de rebroussement, dans lequelle une courbe est réfléchie au rayon, et passe de l'un système à l'autre. En général l'enveloppe fait des angles finis avec toutes les courbes. Pour qu'elle soit en contact avec toutes-elles, il faut, qu'elle soit normale à tous les rayons, c'est à dire, qu'elle soit un cercle. Outre cela il est possible, qu'elle a quelques points de contact, ce qui aura lieu, si $f'' v$ s'évanouit pour quelques valeurs de v.

3. *Deux solutions particulières.*

Si l'enveloppe est un cercle

$$r = f' v = c,$$

elle satisfait en même temps l'équation (2). La solution générale est obtenue de l'équation (3), qui donne:

$$v + \vartheta = t = \text{const.}$$

et on a d'après (1):

$$r = c \cos (t - v) .$$

Donc le système cherché consiste de cercles aux rayons $= \frac{1}{2} c$, qui passent par le centre, et du cercle enveloppant comme courbe singulière.

Le second cas d'intégrabilité a lieu, si une ligne droite quelconque

$$x = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

fait partie du système. L'enveloppe est une courbe du quatrième dégré, réprésentée par l'équation polaire

$$r \cos^2 v = c .$$

Elle consiste de deux branches séparées, au dehors des deux parallèles $x = \pm c$, qui sont leurs tangentes dans l'arc des x, et elle a quatre points d'inflexion

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} c \; ; \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} c .$$

Relativement à la droite donnée (4) on a:

$$f v = s = y = x \operatorname{tg} v = c \operatorname{tg} v .$$

Donc l'équation d'une courbe du système quelconque peut être écrite:

$$s x = c y . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En la différentiant deux fois et en posant

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \tau \; , \; \frac{\partial y}{\partial s} = \sin \tau ,$$

on trouve les équations suivantes:

$$x + s \cos \tau = c \sin \tau , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$2 \cos \tau \, \partial s - s \sin \tau \, \partial \tau = c \cos \tau \, \partial \tau ,$$

dont la dernière a l'intégrale:

$$2 s \sqrt{\cos \tau} = c \int_0 \partial \tau \sqrt{\cos \tau} + t , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

et l'équation cherchée en x, y est le résultat de l'élimination de s et τ entre les équations (5) (6) (7).

L'arc s se trouve exprimé par deux intégrales elliptiques pour le module $\sqrt{\frac{1}{2}}$; car on a:

$$\int_0 \partial \tau \sqrt{\cos \tau} = \sqrt{2} (2 E - F) , \cos^2 am F = \cos \tau ,$$

où E désigne l'intégrale de seconde espèce pour la même amplitude.

4. *Équation différentielle des surfaces.*

Imaginons maintenant une suite continuelle de surfaces coupées par un rayon, qui en se mouvant trace sur toutes-elles les contours d'aires correspondantes. Il s'agira de déterminer le système des surfaces tel, que ces aires deviennent égales entre-elles pour une voie du rayon quelconque, qui le réconduit à son point d'issue. Pour fixer les idées, faisons naître l'aire σ par la variation de deux paramétres m, n, qui dépendent seulement des rapports des coordonnées x, y, z, et que nous posons de la plus simple manière

$$m = \frac{x}{z} \; ; \quad n = \frac{y}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

La condition à remplir sera

$$\sigma = \varphi(m, n) .$$

Soient α, β, γ et ω les cosinus des angles, que la normale de la surface σ fait avec les axes des x, y, z et avec le rayon r, et posons pour abréger:

$$x_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial z}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial n} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} \; ; \; y_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial n} & \frac{\partial x}{\partial n} \end{vmatrix} \; ; \; z_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial x}{\partial n} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

nous aurons:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial m \partial n} = \frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta} = \frac{z_1}{\gamma} = \frac{\partial^2 \varphi(m_1 n)}{\partial m \partial n} = \varphi',$$

$$r\omega = \alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{\varphi'} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Des équations (8) on obtient pour les trois déterminantes (9) les valeurs suivantes:

$$x_1 = -\frac{z \partial z}{\partial m} \; ; \; y_1 = -\frac{z \partial z}{\partial n} \; ; \; z_1 = z \left(m \frac{\partial z}{\partial m} + n \frac{\partial z}{\partial n} + z\right) ;$$

donc l'équation (10) se réduit à

$$r\omega = \frac{z^3}{\varphi'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

En portant ces valeurs dans l'équation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, qui peut aussi s'écrire

$$x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} = \varphi'^2,$$

on trouve:

$$z^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2 + \left(m\frac{\partial z}{\partial m} + n\frac{\partial z}{\partial n} + z\right)^2\right\} = \varphi'^2.$$

Les valeurs de z, de $x = mz$ et de $y = nz$, déterminées seulement par cette équation, contiennent une fonction arbitraire d'une variable. Il n'existe donc pas une simple suite de surfaces, mais un système, qui rempli l'espace une infinité de fois.

On peut cependant donner au problème de l'intégration aussi quelques autres formes. En effet, en éliminant ω entre les équations (10) (11), on trouve:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{z^3}{\varphi'} = k$$

et, pour toute variation le long de la surface:

$$x\partial\alpha + y\partial\beta + z\partial\gamma = \partial k.$$

Posons

$$\alpha = \cos\lambda\cos\mu \;;\quad \beta = \sin\lambda\cos\mu \;;\quad \gamma = \sin\mu.$$

En faisant varier successivement λ et μ nous obtiendrons:

$$(x\cos\lambda + y\sin\lambda)\cos\mu + z\sin\mu = k, \quad \ldots\ldots (12)$$

$$(-x\sin\lambda + y\cos\lambda)\cos\mu = \frac{\partial k}{\partial\lambda}, \quad \ldots\ldots (13)$$

$$-(x\cos\lambda + y\sin\lambda)\sin\mu + z\cos\mu = \frac{\partial k}{\partial\mu}; \quad \ldots\ldots (14)$$

équations desquelles on peut tirer les valeurs:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(k\cos\mu - \frac{\partial k}{\partial\mu}\sin\mu\right)\cos\lambda - \frac{\partial k}{\partial\lambda}\frac{\sin\lambda}{\cos\mu} \\ y &= \left(k\cos\mu - \frac{\partial k}{\partial\mu}\sin\mu\right)\sin\lambda + \frac{\partial k}{\partial\lambda}\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

$$z = k\sin\mu + \frac{\partial k}{\partial\mu}\cos\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

En les substituant dans l'équation

$$\varphi'\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \frac{z^3}{k},$$

on obtient une équation du premier ordre aux dérivées partielles, qui détermine k et λ, μ.

En second lieu posons

$$x = r\cos u\cos v\ ;\quad y = r\cos u\sin v\ ;\quad z = r\sin u\ ;$$

l'équation générale

$$\alpha\partial x + \beta\partial y + \gamma\partial z = 0$$

se présentera comme il suit:

$$L\frac{\partial r}{r} - M\partial u - N\cos u\,\partial v, \quad \ldots\ldots\ (17)$$

où il a été posé

$$L = \cos u\cos\mu\cos(v-\lambda) + \sin u\sin\mu\ ,$$
$$M = \sin u\cos\mu\cos(v-\gamma) - \cos u\sin\mu\ ,$$
$$N = \cos\mu\sin(v-\lambda)\ .$$

Comme on a

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1\ ,$$

il convient de poser

$$L = \cos\vartheta\ ,$$
$$M = \sin\vartheta\cos\eta\ ,$$
$$N = \sin\vartheta\sin\eta\ .$$

L'équation (17) deviendra:

$$\frac{\partial r}{r} = \operatorname{tg}\vartheta\,(\cos\eta\,\partial u + \sin\eta\cos u\,\partial v)\ .$$

En appliquant cette valeur, qui a lieu pour une surface quelconque, à l'équation (11), qui peut s'écrire

$$r^2 = w\cos\vartheta\ ,\quad w = \left(\frac{r}{z}\right)^3\varphi' = \frac{\varphi'}{\sin^3 u}\ ,$$

on obtient:

$$\partial\log(w\cos\vartheta) = 2\operatorname{tg}\vartheta\,(\cos\eta\,\partial u + \sin\eta\cos u\,\partial v)\ ;$$

équation dont l'intégration revient à un système de 3 équations simultanées de la forme

$$\frac{\partial u}{U} = \frac{\partial v}{V} = \frac{\partial\vartheta}{\Theta} = \frac{\partial\eta}{H}\ ,$$

d'après la méthode exposé par M. Pfaff (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften, Berlin 1814, p. 82.)

5. *Enveloppe du système des surfaces.*

Il appert de l'équation (11), que ω est une quantité déterminée pour chaque point. Comme il n'y a pas d'autres déterminations, tout point est le point intersection d'une suite continuelle de surfaces, dont les normales forment un cône droit

$$\omega = \text{const.}$$

autour de rayon. Quand on fait glisser le point le long du rayon en direction positive, le cône s'étrécit et tombe finalement dans le rayon pour

$$r^2 = \left(\frac{r}{z}\right)^3 \varphi' , \quad \omega = 1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Aussitôt que r^2 surpasse cette valeur, il ne peut lui répondre aucun point d'une surface. Donc l'équation (18) exprime une surface de démarcation pour le système de surfaces en question. Supposé que la fonction φ' aie des valeurs finies pour toutes les directions du rayon, cette surface renfermera le système de tous les côtés, et sera ici appelée son enveloppe.

Toute ligne commune à une des surfaces et à l'enveloppe est une courbe sphérique, parcequ'elle est normale à tous les rayons qu'elle rencontre. Outre de telles lignes il peut exister encore des points communs. Si (xyz) est un point d'une surface placé dans l'enveloppe, on a:

$$x = r\cos\lambda\cos\mu ; \; y = r\sin\lambda\cos\mu ; \; z = r\sin\mu .$$

En substituant ces valeurs dans (12) (13) (14), on trouve les trois équations

$$z^2\sin\mu = \varphi' , \quad \frac{\partial k}{\partial\lambda} = 0 , \frac{\partial k}{\partial\mu} = 0 ,$$

qui, pourvu qu'elles soient compatibles entre elles, déterminent en général un point. Il suit de-là, que le cas d'une ligne commune ne peut être que la propriété de certaines surfaces distinguées. De l'autre part on peut observer, que toute ligne d'intersection de l'enveloppe avec une sphère concentrique appartient à une surface. Donc il existe toujours, parmis les surfaces du système, une classe spéciale, caractérisée par la dite propriété, dont l'ensemble est parcouru, lorsqu'on fait varier un seul paramètre, savoir le rayon de la sphère.

Quant aux points communs, ils peuvent être points de contact ou sommets de ressauts pointus, dans lesquels la surface aboutit. Le premier cas a lieu, si l'enveloppe est en contact avec une sphère autour le centre des rayons. Pour que tous ces points soient points de contact, il faut, que l'enveloppe soit une sphère elle-même, ce qui a lieu pour

$$\varphi' = c^2(1 + m^2 + n^2)^{-\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Il suit d'une simple intuition, qu'une surface, qui coupe tous les rayons, et dont la normale varie continûment, a du moins un point de contact avec une sphère concentrique, savoir dans son rayon vecteur le plus grand. Ce point se trouve toujours dans l'enveloppe, qui est en contact avec la même sphère dans la même point. Or ce ne sont que des lignes ou des points singuliers, dans lesquels l'enveloppe non-sphérique peut toucher des sphères concentriques. Par conséquent, si nous mettons à part les surfaces particulières, qui passent par ces lignes ou par ces points, tout le reste ne saurait pas couper tous les rayons, pas même s'étendre jusque là, où le rayon vecteur devint un maximum. Donc, en général les surfaces seront limitées à de certaines enceintes de rayons, dans lesquelles leurs plans tangents demeurent partout obliques. Des lignes, dans lesquelles elles éprouvent une limitation soudaine, pendant que la normale continue à varier en même sens, ne peuvent être que des arêtes de rebroussement. Il faut remarquer, que nous sommes obligés d'admettre la variation continue de la normale, parcequ'il n'y a pas d'autre point de vue pour la conjonction des éléments des surfaces.

Voilà le résultat des considérations précédentes. Les surfaces dont il s'agit sont en général ceintes d'arêtes de rebroussement. Il existe d'entre-elles une suite continuelle de celles, dont les arêtes tombent dans l'enveloppe en forme de courbes sphériques.

Les ressauts pointus, par lesquels de certaines surfaces touchent à l'enveloppe, seront plus bas, eu égard à leur forme remarquable, l'objet d'une considération spéciale.

6. *Arêtes de rebroussement.*

La condition analytique d'une arête de rebroussement consiste en ce que ∂x, ∂y, ∂z s'évanouissent et changent de signe, pendant que λ, μ continuent à varier en même sens. On peut l'écrire:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} : \frac{\partial z}{\partial \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

La rélation entre $\partial\lambda$ et $\partial\mu$, sous laquelle ∂x, ∂y, ∂z s'évanouissent, répond à une direction normale à l'arête.

En regardant k comme déterminé en λ, μ, nous pouvons prendre les équations (15) (16) pour expression de la surface. Soit pour abréger

$$L = \frac{\partial k}{\partial \lambda} \sin\mu + \frac{\partial^2 k}{\partial\lambda\partial\mu} \cos\mu = \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$M = k\cos\mu - \frac{\partial k}{\partial \mu}\sin\mu + \frac{\partial^2 k}{\partial \lambda^2}\frac{1}{\cos\mu},$$

$$N = \left(k + \frac{\partial^2 k}{\partial \mu^2}\right)\cos\mu - \frac{\partial z}{\partial \mu},$$

on trouvera en différentiant:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -L\,\mathrm{tg}\,\mu\cos\lambda - M\sin\mu, \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = -N\,\mathrm{tg}\,\mu\cos\lambda - L\frac{\sin\lambda}{\cos^2\mu},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -L\,\mathrm{tg}\,\mu\sin\lambda + M\cos\lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = -N\,\mathrm{tg}\,\mu\sin\lambda + L\frac{\cos\lambda}{\cos^2\mu},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = L, \frac{\partial z}{\partial \mu} = N,$$

valeurs qui vérifient les proportions (20) sous la seule condition

$$L^2 = MN\cos^2\mu. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Donc nos surfaces jouissent de la propriété, que les deux conditions générales d'une arête de rebroussement se confondent dans une, ce qui explique la raison de la circonstance, que toutes les surfaces ont en général, comme nous venons d'observer, des arêtes de rebroussement.

Pour déterminer les directions de la tangente, de la normale principale et de l'arc de courbure de l'arête par les cosinus des angles, qu'elles font avec les axes des x, y, z, posons

$$\mathrm{tg}^2 Y = \frac{M}{N}, \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\partial Y - \partial\lambda\sin\mu}{\partial\mu\cos Y + \partial\lambda\sin Y\cos\mu}.$$

Ces cosinus relatifs à la tangente sont connus par les rapports des quantités $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$, identiques à ceux des ∂x, ∂y, ∂z pour une relation quelconque entre $\partial\lambda$, $\partial\mu$. En les divisant par la racine de la somme de leurs carrés

$$\sqrt{M(M+N)} = \frac{M}{\sin Y},$$

on trouve les valeurs suivantes:

$$-\cos Y\sin\mu\cos\lambda - \sin Y\sin\lambda,$$

$$-\cos Y\sin\mu\sin\lambda + \sin Y\cos\lambda,$$

$$\cos Y\cos\mu;$$

puis les valeurs analogues relatives à la normale principale:

$$(\sin\phi \sin Y \sin\mu - \cos\phi \cos\mu)\cos\lambda - \sin\phi \cos Y \sin\lambda,$$
$$(\sin\phi \sin Y \sin\mu - \cos\phi \cos\mu)\sin\lambda + \sin\phi \cos Y \cos\lambda,$$
$$-\sin\phi \sin Y \cos\mu - \cos\phi \sin\mu;$$

enfin les valeurs relatives à l'axe de courbure:

$$-(\cos\phi \sin Y \sin\mu + \sin\phi \cos\mu)\cos\lambda + \cos\phi \cos Y \sin\lambda,$$
$$-(\cos\phi \sin Y \sin\mu + \sin\phi \cos\mu)\sin\lambda - \cos\phi \cos Y \cos\lambda,$$
$$\cos\phi \sin Y \cos\mu - \sin\phi \sin\mu.$$

Le rayon de courbure est

$$= \frac{N\cos\phi}{\cos^2 Y \cos\mu},$$

l'angle de contingence des plans osculateurs

$$= \partial\mu \sin Y + \partial\lambda \cos Y \cos\mu - \partial\phi.$$

7. *Deux solutions particulières.*

J'ai déjà fait mention du cas, où l'enveloppe est une sphère, et qui d'après (19) a lieu pour

$$\varphi' = c^2\left(\frac{z}{r}\right)^3.$$

L'équation (11) se réduit ici à

$$c^2\omega = r^2.$$

Or la quantité $\frac{I\omega}{r^2}$ exprime l'intensité de l'illumination qu'un élément de la surface reçoit par des rayons jetés du centre avec l'intensité $= I$ en toutes directions. Donc les surfaces cherchées sont aussi déterminées par la propriété, que cette intensité d'illumination est constante $= \frac{I}{c^2}$. Dans un mémoire antérieur (Tome VI. N. VIII.) j'ai déduit l'équation de ces surfaces. Elle est le résultat de l'élimination de ζ entre les deux équations

$$\tfrac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{c^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} u}{\cos\zeta} + \sin\zeta\cos u\,\Psi'(\sin\zeta\cos u) - \Psi(\sin\zeta\cos u),$$
$$v = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\zeta\sin u) + \Psi'(\sin\zeta\cos u),$$

où Ψ désigne une fonction arbitraire, et où

$$\cos\zeta = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\,,\quad \cos\vartheta = \omega\,,\quad \sin u = \frac{z}{r}\,,\quad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}\,.$$

Une des surfaces est la sphère elle-même.

Le second cas d'intégrabilité est celui, où une des surfaces est un plan $z = c$. Il lui répond la valeur

$$\varphi' = c^2\,.$$

Pour un φ' constant, l'équation (16) peut s'intégrer séparément. Si l'on l'écrit

$$\frac{3z\,\partial z}{\partial\mu}\cos\mu + z^2\sin\mu = c^2\,,$$

elle est linéaire en z^2, et on trouve sans difficulté:

$$z_2 = \tfrac{2}{3}c^2\cos^{\frac{2}{3}}\mu\,(\psi\lambda + \chi\mu)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

où $\psi\lambda$ est une fonction arbitraire, et où

$$\chi\mu = \int\cos^{-\frac{3}{5}}\mu\,\partial\mu\,.$$

Les x et les y sont d'après (12) (13) déterminés par

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda = \frac{z}{c^2\cos\mu}\,(z^2 - c^2\sin\mu)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$-x\sin\lambda + y\cos\lambda = \frac{z}{\cos^{\frac{1}{3}}\mu}\,\psi'\lambda\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

L'enveloppe du système est une surface de rotation

$$z^2\sin\mu = c^2\,,$$

ou bien en coordonnées rectangulaires

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{z^6}{c^4}\,.$$

Elle consiste de deux nappes symétriques par rapport au plan des xy et placées au dehors des deux plans parallèles $z = \pm c$, qu'elles touchent dans l'axe des z. Tous les rayons la rencontrent excepté ceux, qui se trouvent dans le plan des xy. La courbe génératrice a un point d'inflexion pour

$$z = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}} c\,.$$

Chacun de ses cercles parallèles est l'arête de rebroussement d'une des surfaces du système; et chaque ligne, dans laquelle une surface touche

à l'enveloppe, est un de ses cercles parallèles. Or, comme le long de ces cercles z et μ sont constants pendant que x, y, λ varient, l'équation (22) ne saurait subsister à moins que $\psi\lambda$ soit indépendant de λ. Par conséquent, la classe des surfaces, qui sont en jonction avec l'enveloppe le long d'une ligne, est défini par

$$\psi\lambda = \text{const.}$$

Tout le reste des surfaces ont des arêtes rebroussement séparées de l'enveloppe. La rélation entre λ et μ, qui détermine leurs arêtes, est obtenue de (21) ou des proportions (20), dont on tire identiquement:

$$\left\{\frac{2}{3}(\chi\mu+\psi\lambda)\sin\mu-\frac{1}{\cos^{\frac{2}{3}}\mu}\right\}\left\{\frac{2}{3}(\chi\mu+\psi\lambda)+\psi''\lambda-\frac{\sin\mu}{\cos^{\frac{2}{3}}\mu}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{3}(\psi'\lambda)^2\sin\mu=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

8. *Forme des ressauts pointus, que présentent de certaines surfaces.*

Si une des surfaces, pour laquelle $\psi\lambda$ varie actuellement avec λ, a un point C commun avec l'enveloppe, ce point ne peut être que le sommet d'un ressaut pointu, contenu entre plusieurs arêtes de rebroussement, qui y concourent. Comme la détermination générale de ces figures causerait trop de calcul, je me contente de l'exécuter pour la solution particulière, que nous venons de considérer.

Prenons le point C, dont les coordonnées sont

$$x = a\cos b\ ,\quad y = 0\ ,\quad z = a\sin b$$

pour origine des nouvelles coordonnées rectangulaires p, y, q en donnant aux q la direction du rayon ou de la normale en C; nous aurons pour un point P quelconque:

$$x = (a+q)\cos b + p\sin b\,,$$
$$z = (a+q)\sin b - p\cos b\,.$$

Si P est infiniment voisin de C ou de l'enveloppe, p, y, q, λ et $\mu - b = \varepsilon$ sont infiniment petits. Nous supposons, que λ et ε soient de même ordre de petitesse. En appliquant les équations (22)(23)(24) au point C, on trouve:

$$c^2 = a^2\sin^3 b\ ,\quad \chi b + \psi 0 = \frac{3}{2\sin b\cos^{\frac{2}{3}} b}\ ,\quad \psi' 0 = 0\,,$$

et l'équation dérivée de (24) donne pour le même point:

$$\partial y = a\left(\psi'' 0\,\frac{\sin b}{\cos^{\frac{1}{3}} b} + \cos b\right)\partial\lambda\,.$$

Cette équation devant encore subsister pour $\partial y = 0$, il faut que le coefficient de $\partial\lambda$ soit $= 0$; on a donc:

$$\psi'0 = -\frac{\cos^{\frac{4}{3}}b}{\sin b},$$

et la forme de la fonction $\psi\lambda$, qui répond au cas dont il s'agit, sera:

$$\psi\lambda = \psi 0 - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\cos^{\frac{4}{3}}b}{\sin b}(1 + A\lambda + \ldots).$$

On verra, que le reste des coefficients du développement ont des valeurs quelconques.

Ayant fixé cette expression on peut développer les coordonnées suivant les puissances de ε et de λ. Je remarque seulement, qu'il facilite la calcul d'écrire comme il suit l'équation (22):

$$\left(\frac{z}{a\sin b}\right) = E + \tfrac{2}{3}(\psi\lambda - \psi 0)\sin b\cos^{\frac{2}{3}}\mu,$$

et de se servir de la formule:

$$E = \{\tfrac{2}{3}(\chi\mu - \chi b)\sin b + \cos^{-\frac{2}{3}}b\}\cos^{\frac{2}{3}}\mu = 1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2\,7}\varepsilon^3\operatorname{tg}b - \tfrac{7}{3\,2\,4}\varepsilon^4\operatorname{tg}^2 b - \ldots$$

On trouvera jusqu'au deuxième ordre:

$$p = \tfrac{1}{6}a\operatorname{tg}b(\varepsilon^2 + \lambda^2\cos^2 b),\quad q = 0,$$
$$y = -\tfrac{1}{6}a(2\varepsilon\sin b + 9A\lambda\cos b)\lambda;$$

valeurs que l'on peut, en posant

$$A = \tfrac{2}{9}\sin b\cot 2\beta,$$

joindre comme il suit:

$$p - y\cot\beta = \tfrac{1}{6}a\operatorname{tg}b(\varepsilon + \lambda\cos b\cot\beta)^2;$$
$$p + y\operatorname{tg}\beta = \tfrac{1}{6}a\operatorname{tg}b(\varepsilon - \lambda\cos b\operatorname{tg}\beta)^2.$$

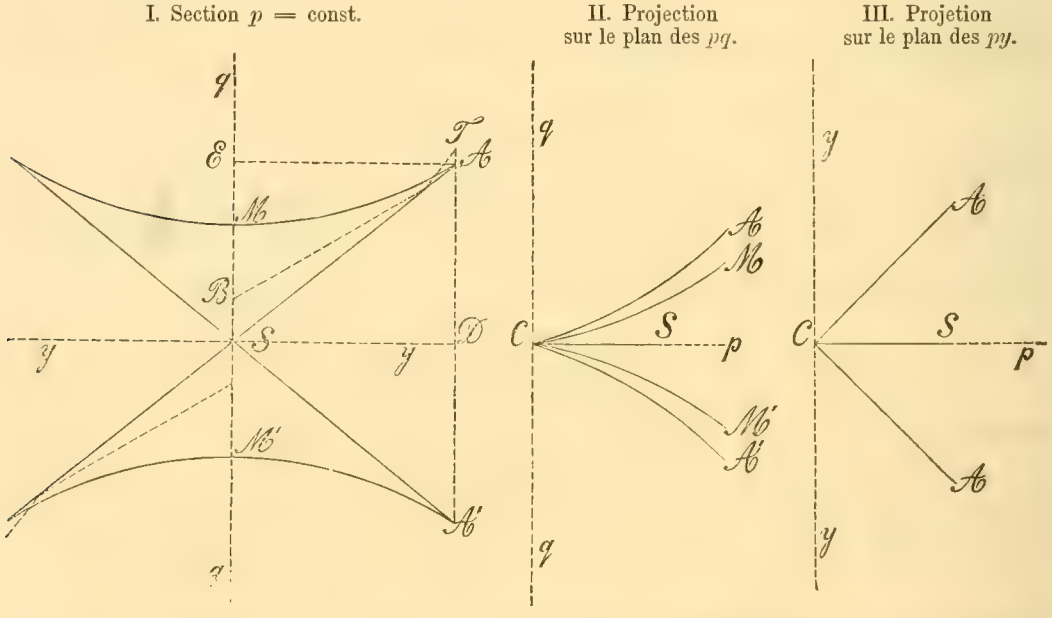
Il appèrt de-là, que $\frac{y}{p}$ peut seulement varier entre les deux valeurs de $\operatorname{tg}\beta$, qui répondent au même A, que par conséquent le ressaut est inscrit entre deux tangentes, qui font un angle droit l'un avec l'autre et les angles β et $\beta - \frac{1}{2}\pi$ avec l'axe des p.

Le coefficient A est susceptible de toute valeur; sa variation — abstraction faite des termes d'ordres supérieurs — a le seul effet de tourner le ressaut dans le plan des py autour du point C.

De plus nous observons, que chaque système de (p, y) répond à un système de valeurs des quantités

$$\varepsilon + \lambda \cos b \cot\beta\,,\ \varepsilon - \lambda \cos b \operatorname{tg}\beta \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (26)$$

avec doubles signes et, pour cette raison, à quatre systèmes de (λ, ε), c'est à dire à quatre normales différentes. Il suit de-là, que la surface en voisinage de l'enveloppe consiste de quatre nappes, dont les projections sur le plan des py se couvrent. Chaque fois que y égale une des valeurs extrêmes, une des quantités (26) s'évanouit, c'est à dire que deux nappes y sont contigues suivant une courbe, qui, parceque la normale varie continuement dans un intervalle infiniment petit, peut seulement être une arête de rebroussement. D'après cela la section du ressaut parallèle au plan des yq a la forme de fig. I.



où MA, SA, SA', $M'A'$ réprésentent les moitiés des quatre nappes, AB et ST les tangentes en A et en S, enfin D et E les projections de A sur les axes des y, q.

Prenons désormais le cas le plus simple $\beta = \frac{1}{4}\pi$, où la surface est symétrique au plan des pq, et poussons le développement encore jusqu'au quatrième ordre. Il viendra:

$$p = \frac{1}{6} a \operatorname{tg} b \Big\{ \varepsilon^2 \Big[1 + \frac{7}{9}\varepsilon \operatorname{tg} b + \frac{\varepsilon^2}{12}(1 + \frac{70}{9} \operatorname{tg}^2 b)\Big] \qquad (27)$$

$$+ \lambda^2 \cos^2 b \Big[1 + \frac{4}{3}\varepsilon \operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{6}(1 - \frac{7}{3}\operatorname{tg}^2 b)\Big] + \frac{\lambda^4}{12}\cos^4 b\,(1 + 3\operatorname{tg}^2 b)\Big\}\,,$$

$$y = -\frac{1}{3} a \lambda\varepsilon \sin b \left\{1 + \frac{\varepsilon}{6}\operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{18}(1 - \frac{7}{3}\operatorname{tg}^2 b) + \frac{\lambda^2}{6}\cos^2 b\,(1 + 2\operatorname{tg}^2 b)\right\},$$

$$q = \frac{1}{9} a \operatorname{tg} b \left\{\varepsilon^3(1 + \frac{7}{8}\varepsilon \operatorname{tg} b) + 3\lambda^2\varepsilon\cos^2 b\,(1 + \frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg} b) + \frac{3}{8}\lambda^4 \cos^4 b \operatorname{tg} b\right\}.$$

L'équation (25), qui détermine les arêtes, donne:

$$\varepsilon^2\left\{1 - \frac{5}{3}\varepsilon \operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{18}(7 - \frac{67}{6}\operatorname{tg}^2 b)\right\} =$$

$$\lambda^2 \cos^2 b \left\{1 - 2\varepsilon \operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{3}\operatorname{tg}^2 b\right)\right\} + \frac{\lambda^4}{3}\cos^2 b.$$

En la résolvant on trouve:

$$\lambda \cos b = \pm\varepsilon \left\{1 + \frac{\varepsilon}{6}\operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{18}(5 + \frac{8}{3}\operatorname{tg}^2 b)\right\}.$$

Substituons cette valeur dans (27), les équations des arêtes seront:

$$p = \frac{1}{3} a \varepsilon^2 \operatorname{tg} b \left\{1 + \frac{11}{9}\varepsilon \operatorname{tg} b - \frac{\varepsilon^2}{18}(5 - \frac{79}{6}\operatorname{tg}^2 b)\right\},$$

$$y = \mp\frac{1}{3} a \varepsilon^2 \operatorname{tg} b \left\{1 + \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{tg} b + \frac{\varepsilon^2}{6}(1 + \frac{1}{18}\operatorname{tg}^2 b)\right\},$$

$$q = \frac{4}{9}\varepsilon^3 \operatorname{tg} b\,(1 + \frac{21}{32}\varepsilon \operatorname{tg} b).$$

Les équations (27) font voir, que les deux parties de la surface, aux côtés du plan des pq, répondent aux valeurs de λ positives et négatives; de plus, que y s'évanouit avec λ et avec ε, et que, pour $\lambda = 0$, q a, en général, deux valeurs en égard au double signe de ε, mais qu'il n'en a, pour $\varepsilon = 0$, qu'une seule, qui répond à deux valeurs de λ. Or deux normales appartenant aux mêmes coordonnées constituent une ligne double. Par conséquent la section mutuelle des deux nappes intérieures CS (fig. II et III.) est déterminée par $\varepsilon = 0$ ou par les équations

$$p = \frac{1}{6} a \operatorname{tg} b \left\{\lambda^2 \cos^2 b + \frac{\lambda^4}{12}\cos^4 b\,(1 + 3\operatorname{tg}^2 b)\right\},$$

$$y = 0,\ q = \frac{1}{24} a \lambda^4 \cos^4 b \operatorname{tg}^2 b.$$

Les courbes moyennes des deux nappes extérieures CM, CM' (fig. II.), c'est à dire leurs sections avec le plan des pq, répondent à $\lambda = 0$; elles ont les équations:

$$p = \frac{1}{6} a \varepsilon^2 \operatorname{tg} b \left\{1 + \frac{7}{9}\varepsilon \operatorname{tg} b + \frac{\varepsilon^2}{12}(1 + \frac{70}{9}\operatorname{tg}^2 b)\right\},$$

$$y = 0\,,\quad q = \frac{1}{9}\,a\,\varepsilon^3\,\mathrm{tg}\,b\,(1 + \frac{7}{8}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,b)\,.$$

Pour comparer les dimensions principales de la section $p = \text{const.}$, posons

$$\varkappa^2 = \frac{6p}{a}\,\mathrm{tg}\,b\,,$$

liant à $\varkappa$ le signe de ε. Il résultera pour A, A' (fig. I.):

$$\varepsilon = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,b}\left(1 - \frac{11\varkappa}{18\sqrt{2}}\right),\quad \lambda = \pm\,\frac{\varkappa}{\sqrt{2}\sin b}\left(1 - \frac{4\varkappa}{9\sqrt{2}}\right),$$

$$y = \mp\,\frac{a\varkappa^2}{6\,\mathrm{tg}\,b}\left(1 - \frac{5\varkappa}{18\sqrt{2}}\right),\quad q = \frac{\sqrt{2}}{9}\,\frac{a\varkappa^3}{\mathrm{tg}^2 b}\left(1 - \frac{113\varkappa}{96\sqrt{2}}\right);\qquad (28)$$

pour M, M':

$$\varepsilon = \frac{\varkappa}{\mathrm{tg}\,b}\left(1 - \frac{7\varkappa}{18}\right),\quad \lambda = 0\,,$$

$$y = 0\,,\quad q = \frac{a\varkappa^3}{9\,\mathrm{tg}^2 b}\left(1 - \frac{7\varkappa}{24}\right);$$

pour S:

$$\varepsilon = 0\,,\quad \lambda = \pm\,\frac{\varkappa}{\sin b}\left(1 \mp \frac{1 + 3\,\mathrm{tg}^2 b}{24\,\mathrm{tg}^4 b}\,\varkappa\right),$$

$$y = 0\,,\quad q = \frac{a\varkappa^4}{24\,\mathrm{tg}^2 b}\,.$$

Quant à la tangente de la section, il faut remarquer que les équations (27) ne peuvent pas déterminer approximativement sa direction en A. Si l'on construit la courbe réprésentée par elles, il s'y trouve un arc infiniment petit interpolé entre MA et AS, qui, quelque diminution qu'il éprouve par les termes des séries successivement ajoutés, rend illusoire toute détermination. Car la normale, au lieu de garder à peu près la même direction, fait toujours un demi-tour en parcourant toutes les positions possibles. Nous pouvons cependant déduire sa vraie direction de la seule définition des quantités λ, μ.

En effet la tangente de la courbe dont il s'agit est la section du plan $p = \text{const.}$ avec le plan tangent

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.}$$

ou, exprimé en p, y, q,

$$(\alpha\cos b + \gamma\sin b)\,q + (\alpha\sin b - \gamma\cos b)\,p + \beta y = \text{const.}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\beta}{\alpha\cos b + \gamma\sin b} = -\frac{\sin\lambda\cos\mu}{\cos\varepsilon - (1-\cos\lambda)\cos b\cos\mu},$$

ou, en développant jusqu'au second ordre:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = -\lambda\cos b\,(1-\varepsilon\,\mathrm{tg}\,b)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

c'est pour A, A'

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \mp\frac{\varkappa}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,b}\left(1-\frac{13\varkappa}{q\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\left(1-\frac{157\varkappa}{288\sqrt{2}}\right)\frac{q}{y}\,;$$

pour S

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \mp\frac{\varkappa}{\mathrm{tg}\,b}\left(1\mp\frac{1+3\,\mathrm{tg}^2 b}{24\,\mathrm{tg}^4 b}\right).$$

Donc si les dimensions de la section (fig. I.) sont construites selon les proportions finales en chaque direction, on a:

$$DA : DT : SB : SM = 1 : \frac{3}{2\sqrt{2}} : \frac{1}{4} : \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

où la distance de S à l'axe des p, quantité du quatrième ordre, a été comptée comme zéro.

Ce qui concerne la courbure $\frac{1}{\varrho}$, on sait, qu'elle est $= 0$ en S, et que $\varrho = 0$ en A. Quant au point M, on trouve en différentiant (29) et (27), et en posant ensuite $\lambda = 0$:

$$\partial\frac{\partial q}{\partial y} = -\cos b\,(1-\varepsilon\,\mathrm{tg}\,b)\,\partial\lambda,$$
$$\partial y = -\tfrac{1}{3}\,a\varepsilon\sin b\,(1+\tfrac{2}{6}\,\mathrm{tg}\,b)\,\partial\lambda\,,\ \partial p = 0\,;$$

puis en divisant:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{3}{a\varepsilon\,\mathrm{tg}\,b}\left(1-\frac{7}{6}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,b\right) = \frac{3}{a\varkappa}\left(1-\frac{14}{9}\,\varkappa\right). \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Pour expliquer ce résultat, il faut prendre en considération que nous ne pouvons dessiner ou imaginer la figure qu'en prenant deux unités de ligne différentes y_0, q_0, l'une pour les y, l'autre pour les q, et que par cet arrangement le cercle de courbure se deforme dans une ellipse aux demi-axes $= \varrho y_0$, ϱq_0. Le rayon de courbure de cette ellipse au bout du premier axe

$$\varrho' = \varrho\frac{{y_0}^2}{q_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

répondra à la courbe dessinée pour M. En posant

$$AD = m\ ,\quad AE = n\ ,$$

nous avons d'après (28):

$$y_0 = \frac{6\,\mathrm{tg}\,b}{\varkappa^2}\,\frac{m}{a}\ ,\quad q_0 = \frac{9}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{tg}^2 b}{\varkappa^3}\,\frac{n}{a}\ ,$$

ce qui donne d'après (32) et (31):

$$\varrho' = \frac{4\sqrt{2}}{\varkappa}\,\frac{m^2}{n}\,\frac{\varrho}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{m^2}{n}\ .$$

Ainsi ce rayon de courbure se range au côté des lignes (30), qui, après la fixation à volonté de m, n, sont réprésentées par des nombres definis.

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ.

VOL. VIII.

FASC. II.

1873.

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ VOL. VIII.

FASCICULUS POSTERIOR.

UPSALIÆ
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCLXXIII.

PRINTED IN SWEDEN

INDEX

HUJUS FASCICULI:

I. M. Falk: On the Integration of partial differential Equations of the nth order . . . . . pagg. 1 — 40.

II. L.-A. Forssman: Des relations de l'aurore boréale et des perturbations magnétiques avec les phénomènes météorologiques . . . „ 1 — 58. Tab. I.

III. C. J. Sundevall: Om Rudbecks fogelbok „ 1 — 20.

IV. S. Henschen: Études sur le genre Peperomia . . . . . „ 1 — 53. „ I—VII.

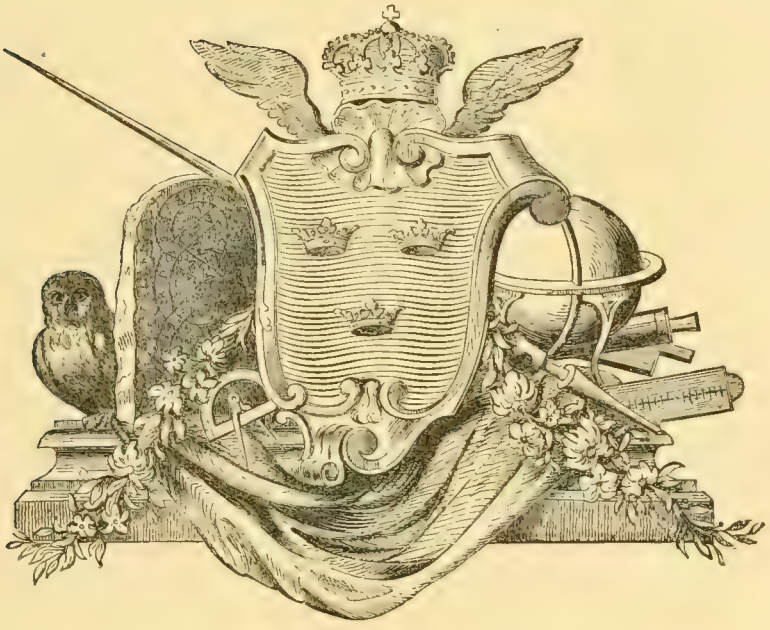
V. G. Dillner: Traité de calcul géométrique supérieur, I . . . . . „ 1—136.

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.



SERIEI TERTIÆ VOL. VIII.

UPSALIÆ
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.

MDCCCLXXIII.

INDEX ACTORUM.

INTRODUCTIO . . . . . pagg. I—XV.

I. C.-A. WESTERLUND: Exposé critique des Mollusques de terre et d'eau douce . . . . . „ 1—202.

II. P.-M. LUNDELL: De Desmidiaceis, quæ in Suecia inventæ sunt . . . „ 1—100. Tab. I—V.

III. H. GYLDÉN: Recherches sur la rotation de la terre . . . . . „ 1 — 21.

IV. R. HOPPE: Systèmes de lignes et de surfaces égales . . . . . „ 1 — 18.

V. M. FALK: On the Integration of partial differential Equations of the nth order . . . . . „ 1 — 40.

VI. L.-A. FORSSMAN: Des relations de l'aurore boréale et des perturbations magnétiques avec les phénomènes météorologiques . . . „ 1 — 58. „ I.

VII. C. J. SUNDEVALL: Om Rudbecks fogelbok „ 1 — 20.

VIII. S. HENSCHEN: Études sur le genre Peperomia . . . . . „ 1 — 53. „ I—VII.

IX. G. DILLNER: Traité de calcul géométrique supérieur. I . . . . . „ 1—136.

61194

INTRODUCTIO.

I.

Proximo triennio, quod post Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis (Ser. III. Vol. VII) anno 1870 mense Novembri edita præteriit,

mortuus est

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

NICOLAUS AUGUSTUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS HEREDITARIUS
DALECARLIÆ DUX

MEMBRUM SOCIETATIS HONORARIUM PRIMARIUM.

Præterea hi **Socii mortui** sunt

Honorarii:

	Adscriptus.	Mortuus.
TROLLE WACHTMEISTER, Hans Gabriel, Justitiæ quondam Cancellarius	1831	1871.
HANSTEEN, Christophorus, Astronomiæ Professor Christianiensis emeritus	1856	1873.
MANDERSTRÖM, R. Ludovicus, Rerum externarum a. h. Minister supremus	1854	1873.

Ordinarius Svecanus:

	Adscriptus	Mortuus.
BJÖRLING, Immanuel Gabriel, ad Scholam Arosiensem Mathesis Lector	1845	1872.

Ordinarii Exteri:

WERLAUFF, Ericus Christianus, Histor. Professor Hauniensis, Bibl. Reg. Præfectus.	1836	1871.
BISCHOF, Carolus Gustavus, Chemiæ Professor Bonnensis . .	1866	1871.
MOHL, Hugo von, Botanices Professor Tubingensis	1860	1872.
DELAUNAY, Carolus Eug., Director Observatorii Astronomici Parisiensis	1865	1872.
MAURY, M. F., a. h. Director Observatorii Astronomici Washingtonensis	1855	1872.

Litterarum commercio juncti:

KRÖIJER, Henricus Nicolaus, Zoologiæ et Physiologiæ Prof. Hauniensis	1844	1870.
RUPRECHT, Fredericus, Imp. Academiæ Scient. Petropolitanæ Membrum	1856	1870.
SOMMER, Andreas, Medicinæ Professor Hauniensis	1844	1871.
LAGGER, Fredericus, Medicinæ Doctor Freyburgensis	1862	1871.
ALLEN, Carolus Fredericus, Historiarum Professor Hauniensis	1865	1872.
GRUNERT, Joannes Augustus, Mathesis Professor Gryphisvaldensis	1849	1872.

Novi Socii adscripti sunt

Honorarii:

	Adscriptus.
ERICSSON, Joannes, in exercitu Svecano a. h. Centurio	1870.
SUNDBERG, Antonius Nicolaus, Ecclesiæ Sviogothicæ Archiepiscopus	1871.
ARGELANDER, Fredericus Vilelmus Augustus, Astronomiæ Professor Bonnensis	1872.

Ordinarii Svecani:

	Adscriptus.
HOLMGREN, Hjalmar, Mathesis Professor Holmiensis	1870.
GYLDÉN, Joannes Augustus Hugo, Director Observatorii Astronomici Holmiensis	1872.
LINDMAN, Christianus Fredericus, ad Scholam Strengnesiensem Mathesis Lector	1873.
WALMSTEDT, Laurentius Eduardus, Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis	1873.
SCHULTZ, Hermannus, Astronomiæ Observator Upsaliensis	1873.
DILLNER, Georgius, Mathesis Adjunctus Upsaliensis	1873.
HEDENIUS, Petrus, Anatomiæ Pathologicæ Professor Upsaliensis . . .	1873.
HOLMGREN, Alaricus Frithiof, Physiologiæ Professor Upsaliensis . .	1873.
FRISTEDT, Robertus Fredericus, Historiæ Naturalis et Chemiæ medicinalis Adjunctus Upsaliensis	1873.
RYDQUIST, Joannes Ericus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir . . .	1873.
CLASON, Eduardus Claudius Hermannus, Anatomiæ Adjunctus Upsaliensis	1873.

Ordinarii Exteri:

FIZEAU, Hippol. Ludovicus, Physices Professor Parisiensis	1870.
HOFMEISTER, Vilelmus, Botanices Professor Heidelbergensis	1872.
HELMHOLTZ, Hermannus L. F., Physices Professor Berolinensis . .	1872.
REICHERT, Carolus Bogislaus, Anatomiæ Professor Berolinensis . .	1872.
BUGGE, Elseus Sophus, L.L. Indo-Europ. Professor Christianiensis . .	1872.
d'ARREST, Henricus Ludovicus, Astronomiæ Professor Hauniensis .	1873.
HOLMBOE, Christophorus Andreas, LL. OO. Professor Christianiensis	1873.
TORTOLINI, Barnab., Mathematum Professor Romanus	1873.
JAMIN, Julius, Physices Professor Parisiensis	1873.
PAINE, Martius, Medicinæ Professor Neo-Eboracensis	1873.
BOECK, Carolus Vilelmus, a. h. Medicinæ Professor Christianiensis .	1873.
DANIELSSEN, Daniel Cornelius, Medicinæ Doctor Bergensis . . .	1873.
SECCHI, Angel., Speculæ Collegii Romani Director	1873.
KIRCHHOFF, Gustavus Robertus, Physices Professor Heidelbergensis	1873.
DE NOTARIS, Josephus, Botanices Professor Romanus	1873.
GÜNTHER, Albertus, Zoologus Londinensis	1873.
RECKLINGHAUSEN, Fredericus von, Medicinæ Professor Vireeburgensis	1873.

Litterarum commercio junctus:

HOPPE, Ernestus Reinholdus Eduardus, Mathesis Professor Berolinensis	1871.

II.

AUGUSTISSIMUS HUJUS SOCIETATIS

PATRONUS

OSCAR II

SVECORUM NORVEGORUM GOTHORUM

VANDALORUMQUE

REX.

A. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum electionis ordinem

Honorarii:

IHRE, Albertus Elavus, Lib. Baro, ex Primoribus Regni unus, Rerum externarum a. h. Minister supremus, Regg. Ordd. adscriptus præfectus et Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator, etc.

FÅHRÆUS, Olavus Immanuel, Regis a. h. Consiliarius, Regg. Ordd. adscriptus præfectus et Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator.

SPARRE, Gustavus Adolphus, Comes, Jur. Utr. Dr, ex Primoribus Regni unus, Summæ Rei Judiciariæ quondam Minister supremus, a. h. Universitatum Ups. et Lund. Cancellarius, Regg. Ordd. adscriptus præfectus, Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator, etc.

KRÆMER, Robertus Fredericus von, Lib. Baro, a. h. Gubernator Uplandiarum, Ordd. St. Pol. et Was. c. m. Cr. Commendator, Ensiferorum Ord. adscriptus.

PLATEN, Baltzar von, Comes, Dr, Regis a. h. Consiliarius, Regg. Ordd. adscriptus præfectus, Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator, etc.

ANJOU, Laurentius Antonius, Th. et Ph. Dr, Episcopus Diœcesis Wisbyensis, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

HAMILTON, Henning. Ludovicus Hugo, Comes, Ph. Dr, Regis a. h. Consiliarius, Universitatum Upsaliæ et Lund. Cancellarius, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Regg. Ordd. adscriptus præfectus, etc.

WREDE, Fabian Jacobus, Lib. Baro, Rei Tormentariæ a. h. Præfectus Generalis, Regg. Ordd. adscriptus præfectus, Ordd. S. Ol. et Danebrog. c. m. Cr. Commendator, etc.

REGNELL, Andreas Fredericus, Med. Dr, St. Pol. Ord. adscriptus.

FRIES, Elias, Ph. et Med. Dr, Botanices Professor Upsaliensis emeritus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Reg. Soc. Scient. Ups. a. h. Secretarius, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et Danebrog. Commendator.

ERICSSON, Joannes, Ph. Dr, in exercitu Svecano a. h. Centurio, Ordd. St. Pol. c. m. Cr., S. Ol. et Danebrog. Commendator.

SUNDBERG, Antonius Nicolaus, Th. et Ph. Dr, Ecclesiæ Sviogothicæ Archiepiscopus, Acad. Upsaliensis Procancellarius, Regg. Ordd. adscriptus præfectus.

ARGELANDER, Fredericus Vilelmus Augustus, Ph. Dr, Astronomiæ Professor Bonnensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

Ordinarii Svecani:

NILSSON, Sveno, Ph. Dr, Hist. Nat. Professor Lundensis emeritus, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

TORNBERG, Carolus Joannes, Ph. Dr, Linguarum Orientalium Professor Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

SVANBERG, Gustavus, Ph. Dr, Astronomiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

MALMSTEN, Carolus Joannes, Ph. Dr, Regis a. h. Consiliarius, Gubernator Vestrogothiæ septemtrionalis, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

SUNDEWALL, Fredericus Aemilius, Med. Dr, Anatomiæ Professor Upsaliensis, *Reg. Societatis Scient. Ups. Quæstor*, St. Pol. Ord. adscriptus.

GLAS, Olavus, Med. Dr, Medicinæ Theoreticæ et Practicæ Professor Upsaliensis, Ord. Was. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus.

WAHLBERG, Petrus Fredericus, Med. et Ph. Dr, a. h. Reg. Academiæ Scient. Holm. Secretarius, Ord. St. Pol. Commendator.

ARESCHOUG, Joannes Erhardus, Ph. Dr, Botanices et Oeconomiæ Practicæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

NORDSTRÖM, Joannes Jacobus, Jur. Utr. et Ph. Dr, Professor, Archivarius Regni Svecani, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

LIBRARY

CARLSON, Fredericus Ferdinandus, Ph. Dr, Historiarum Professor Upsaliensis, a. h. Consiliarius Regis, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ordd. St. Pol. et S. Ol. c. m. Cr. Commendator, etc.

SVANBERG, Laurentius Fredericus, Ph. Dr, Chemiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HUSS, Magnus, Med. et Ph. Dr, a. h. Collegii Med. Præses, Nosocomiorum Sveciæ Director generalis, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et S. Ol. Commendator, etc.

HILL, Carolus Joannes, Ph. Dr, Mathesis Professor Lundensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator.

ÅNGSTRÖM, Andreas Jonas, Ph. Dr, Physices Professor Upsaliensis, *Reg. Societatis Scient. Upsal. Secretarius*, Ord. Was. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus.

SUNDEWALL, Carolus Jacobus, Med. Dr, Professor Zoologiæ Holmiensis emeritus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

BÖTTIGER, Carolus Vilelmus, Ph. Dr, Linguarum Litterarumque Recent. Professor Upsaliensis emeritus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator et S. Ol. Ord. adscriptus, etc.

HILDEBRAND, Bror Aemilius, Ph. Dr, Antiquarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator, etc.

EDLUND, Ericus, Ph. Dr, Physices Professor Holmiensis, Ord. St. Pol. Commendator.

WACKERBARTH, Athanasius Franciscus Dietericus, Ph. Dr, Professor, St. Pol. Ord. adscriptus.

LILLJEBORG, Vilelmus, Ph. Dr, Zoologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

ARRHENIUS, Joannes Petrus, Ph. Dr, Professor, Reg. Academiæ Agric. Secretarius, St. Pol. et Was. Ordd. adscriptus, etc.

BERGFALK, Petrus Ericus, Jur. Utr. et Ph. Dr, Juris Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator.

BERLIN, Nicolaus Joannes, Med. et Ph. Dr, Medicinæ Professor Lundensis, Collegii Med. Præses, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator, etc.

LINDHAGEN, Daniel Georgius, Ph. Dr, Reg. Academiæ Scient. Holm. Secretarius, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus, etc.

MESTERTON, Carolus Benedictus, Med. Dr, Chirurgiæ et Artis Obstetriciæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

DAUG, Hermannus Theodorus, Ph. Dr, Mathesis Professor Upsaliensis.

STYFFE, Carolus Gustavus, Ph. Dr, ad Reg. Academiam Upsaliensem Bibliothecarius, St. Pol. Ord. adscriptus.

THALÉN, Tobias Robertus, Ph. Dr, Physices Adjunctus Upsaliensis, *Reg. Societatis Scient. Ups. Bibliothecarius.*

SÄVE, Carolus, Ph. Dr, Linguarum Septentrionalium Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

AGARDH, Jacobus Georgius, Ph. Dr, Botanices Professor Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

FRIES, Theodorus Magnus, Ph. Dr, Botanices Adjunctus Upsaliensis.

THORELL, Tamerlan, Ph. Dr, Zoologiæ Adjunctus Upsaliensis.

LOVÉN, Sveno, Ph. et Med. Dr, Professor et Musei Zoologici Holmiensis Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

ALMÉN, Augustus, Med. Dr, Chemiæ medicinalis et physiologicæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HOLMGREN, Hjalmar, Ph. Dr, Mathesis Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

GYLDÉN, Joannes Augustus Hugo, Ph. Dr, Professor et Observatorii Astronomici Director Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

LINDMAN, Christianus Fredericus, Ph. Dr, ad Scholam Strengnesiensem Mathesis Lector, St. Pol. Ord. adscriptus.

WALMSTEDT, Laurentius Eduardus, Ph. Dr, Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

SCHULTZ, Hermannus, Ph. Dr, Astronomiæ Observator Upsaliensis.

DILLNER, Georgius, Ph. Dr, Mathesis Adjunctus Upsaliensis.

HEDENIUS, Petrus, Med. Dr, Anatomiæ Pathologicæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HOLMGREN, Alaricus Frithiof, Med. Dr, Physiologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol Ord. adscriptus.

FRISTEDT, Robertus Fredericus, Ph. et Med. Dr, Historiæ Naturalis et Chemiæ medicinalis Adjunctus Upsaliensis.

RYDQVIST, Joannes Ericus, Ph. Dr, Reg. Bibliothecæ Holm. a. h. Præfectus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

CLASON, Eduardus Claudius Hermannus, Med. Dr, Anatomiæ Adjunctus Upsaliensis.

Ordinarii Exteri:

ANDRAL, Gabriel, Medicinæ Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.

POGGENDORFF, Joannes Christianus, Physices Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

WEBER, Vilelmus, Physices Professor Gottingensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HÆSER, Henricus, Medicinæ Professor Gryphisvaldensis.

HANSEN, Petrus Andreas, Observatorii Astronomici Gothani Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus.

LASSEN, Christianus, LL. OO. Professor Bonnensis, S. Ol. Ord. adscriptus.

GRAY, Asa, Botanices Professor Bostoniensis, Societatis Scientiar. Americanæ Secretarius.

AIRY, Georgius Biddle, Astronomus Regius Angliæ, Director Observatorii Astronomici Grenovicensis, Ord. St. Pol. Commendator.

REGNAULT, Henricus Victor, Physices Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.

OWEN, Richardus, Med. Doctor, Musei Britannici Historiæ Naturalis Director.

THOMSON, Vilelmus, Physices Professor Glascovensis.

ROKITANSKY, Carolus, Anatomiæ Pathol. Professor Vindobonensis.

RANKE, Leopold., Histor. Professor Berolinensis

LYELL, Carolus, Reg. Societatis Scientiar. Londinensis Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.

BONSDORFF, Evert., Anatomiæ et Physiologiæ Professor Helsingforsiensis emeritus.

DECAISNE, Josephus, Botan. Professor, Horti Paris. Director, Instituti Paris. Membrum.

LAMONT, Joannes, Astronomiæ Professor Monacensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

BUNSEN, Robertus Vilelmus, Chemiæ Professor Heidelbergensis, Ord. St. Pol. Commendator.

STEENSTRUP, Joannes Japetus Smith, Zoologiæ Professor Hauniensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

TISCHENDORFF, Car., Theologiæ Professor Lipsiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

WEGENER, Casp. Freder., Regi Dan. a Consiliis intimis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. c. m. Cr. Commendator.

LE VERRIER, Urb. Joannes Josephus, Director Observatorii Astronomici Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.

TASSY, Josephus Heliod. Garcin de, LL. OO. Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.

DIEZ, Fredericus, LL. Romanic. Professor Bonnensis.

DOVE, Henricus Vilelmus, Physices Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

LATHAM, Robertus Gordon., Medicinæ Doctor Anglus.

DECANDOLLE, Alphons., a. h. Botanices Professor Genevensis, St Pol. Ord. adscriptus.

DARWIN, Carolus, Reg. Societatis Scientiar. Londinensis Membrum.

MILNE EDWARDS, Henricus, Zoologiæ Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.

ANDERSON, Thomas, Chemiæ Professor Glascovensis.

BRAUN, Alexander, Botanices Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

STOKES, Georgius Gabriel, Mathesis Professor Cantabrigiensis.

BOECK, Christianus Petrus Bianco, Medicinæ Professor Christianiensis, St. Pol. Ord. adscriptus et Ord. S. Ol. Commendator.

GRAY, Joannes Eduardus, Musei Zool. Londin. Præfectus.

HOOKER, Josephus Dalton, Horti Botanici Kewensis Director, St. Pol. Ord. adscriptus.

UNGER, Carolus Richardus, Linguarum Litterarumque Recent. Professor Christianiensis, S. Ol. Ord. adscriptus.

STEPHENS, Georgius, Linguarum Anglicar. Professor Hauniensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

ADAMS, Joannes C., Observatorii Astronomici Cantabrigiensis Director.

ARPPE, Adolphus Eduardus, Chemiæ Professor emeritus Helsingforsiensis.

SCHULTZE, Max, Anatomiæ Professor Bonnensis.

VIRCHOW, Rudolphus, Anatomiæ Pathologicæ Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

TYNDALL, Joannes, Physices Professor Londinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

STRUVE, Otto Vilelmus, Observatorii Astronomici Director Pulkovensis, Ord. St. Pol. Commendator.

RAWLINSON, Henricus, Generalis Excubiarum Præfectus Anglus.

MADVIG, Joannes Nicolaus, Philologiæ Professor Hauniensis, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.
MÜLLER, Max, Professor Taylorianus Oxoniensis.
FIZEAU, Hippol. Ludovicus, Physices Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.
HOFMEISTER, Vilelmus, Botanices Professor Heidelbergensis.
HELMHOLTZ, Hermannus Ludovicus Ferdinandus, Physices Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
REICHERT, Carolus Bogislaus, Anatomiæ Professor Berolinensis.
BUGGE, Elseus Sophus, Linguarum Indo-Europear. Professor Christianiensis.
d'ARREST, Henricus Ludovicus, Astronomiæ Professor Hauniensis.
HOLMBOE, Christophorus Andreas, LL. OO. Professor Christianiensis, Numophylacii Præfectus, Ordd. St. Pol. et S. Ol. c. m. Cr. Commendator.
TORTOLINI, Barnab., Mathematum Professor Romanus.
JAMIN, Julius, Physices Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.
PAINE, Martius, Medicinæ Professor Neo-Eboracensis.
BOECK, Carolus Vilelmus, a. h. Medicinæ Professor Christianiensis, ad Nosocomium Christianiense Medicus primarius, Ord. S. Ol. Commendator.
DANIELSSEN, Daniel Cornelius, Medicinæ Doctor Bergensis, S. Ol. Ord. adscriptus.
SECCHI, Angel., Speculæ Collegii Romani Director.
KIRCHHOFF, Gustavus Robertus, Physices Professor Heidelbergensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
DE NOTARIS, Josephus, Botanices Professor Romanus.
GÜNTHER, Albertus, Zoologus Londinensis.
RECKLINGHAUSEN, Fredericus von, Medicinæ Professor Virceburgensis.

Litterarum commercio juncti:

MAINARDI, Caspar., Mathesis Professor Universitatis Ticin.
LITTROW, Carolus Ludovicus, Astronomiæ Professor Vindobonensis.
HOLBROOK, Joannes, Hist. Nat. Professor Charlestowniensis.
SCHEERER, Carolus Joannes Augustus Theodorus, Metallurgiæ Professor Fribergensis, S. Ol. Ord. adscriptus.
BERKELEY, Miles Josephus, Botanicus Anglus.
PERTZ, Georgius Henricus, Bibliothecæ Regiæ Berolinensis Præfectus.
WILDE, Vilelmus Robertus, Medicinæ Doctor Dublinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
KOREN, Joannes, Medicinæ Doctor Bergensis.
MÜLLER, Ferdinandus, Horti Botanici Melbournensis Director.
CARRINGTON, Richardus Christophorus, Reg. Soc. Astron. Londinensis Secretarius.
STEINTHAL, Henricus, Philologiæ Professor Berolinensis.

LASSEL, Vilelmus, Astronomus Anglus.
DE LA RUE, Warren, Astronomus Londinensis.
KJERULF, Theodorus, Mineralogiæ Professor Christianiensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.
MARIGNAC, Joannes Carolus, Chemiæ Professor Genevensis.
TUCKERMAN, Eduardus, Botanices Professor Amherst.
ANGER, Joannes, Medicinæ Doctor Carlsbadensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
HOPPE, Ernestus Reinholdus Eduardus, Mathesis Professor Berolinensis.

B. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum disciplinas

Ordinarii Svecani

I. In Classe *Physico-Mathematica:*		II. In Classe *Medica et Historiæ Naturalis:*		III. In Classe *Historico-Archæologica:*	
Svanberg, G.	1843.	Nilsson, S.	1836.	Tornberg, C. J.	1841.
Malmsten, C. J.	1843.	Sundevall, F. E.	1847.	Nordström, J. J.	1848.
Svanberg, L. F.	1850.	Glas. O.	1847.	Carlsson, F. F.	1849.
Hill, C. J.	1850.	Wahlberg, P. F.	1848.	Böttiger, C. V.	1853.
Ångström, A. *Secret.*	1851.	Areschoug, J. E.	1848.	Hildebrand, B. E.	1856.
Edlund, E.	1858.	Huss, M.	1850.	Bergfalk, P. E.	1858.
Wackerbarth, A. F.	1858.	Sundevall, C. J.	1851.	Styffe, C. G.	1863.
Berlin, N. J.	1859.	Lilljeborg, V.	1858.	Säve, C.	1865.
Lindhagen, D. G.	1859.	Arrhenius, J. P.	1858.	Rydqvist, J. E.	1873.
Daug, H. T.	1862.	Mesterton, C. B.	1860.		
Thalén, T. R.	1863.	Agardh, J. G.	1865.		
Almén, A.	1870.	Fries, T. M.	1866.		
Holmgren, H.	1870.	Thorell, T.	1866.		
Gyldén, J. A. H.	1872.	Lovén, S.	1869.		
Lindman, C. F.	1873.	Hedenius, P.	1873.		
Walmstedt, E.	1873.	Holmgren, A. F.	1873.		
Schultz, H.	1873.	Fristedt, R. F.	1873.		
Dillner, G.	1873.	Clason, E. C. H.	1873.		

Ordinarii Exteri

I. In Classe, *Physico-Mathematica:*		II. In Classe *Medica et Historiæ Naturalis:*		III. In Classe *Historico-Archæologica:*	
Poggendorff, C. J.	1844.	Andral, G.	1843.	Lassen, C.	1845.
Weber, V.	1844.	Hæser, H.	1844.	Ranke, L.	1852.
Hansen, P. A.	1845.	Gray, A.	1850.	Tischendorff, C. E.	1856.
Airy, G. B.	1851.	Owen, R.	1851.	Wegener, C. F.	1857.
Regnault, H. V.	1851.	Rokitansky, C.	1852.	Tassy, I. H. G. de	1858.
Thomson, V.	1852.	Bonsdorff, E.	1856.	Diez, F.	1858.
Lyell, C.	1853.	Decaisne, J.	1856.	Unger, C. R.	1865.
Lamont, J.	1856.	Steenstrup, J. J. S.	1856.	Stephens, G.	1865.
Bunsen, R. V.	1856.	Latham, R. G.	1859.	Rawlinson, H.	1868.
Le Verrier, U. J. J.	1858.	Decandolle, A.	1860.	Madvig, J. N.	1868.
Dove, H. V.	1859.	Darwin, C.	1860.	Müller, Max.	1869.
Anderson, T.	1861.	Milne Edvards, H.	1860.	Bugge, E. S.	1872.
Stokes, G. G.	1865.	Braun, A.	1861.	Holmboe, C. A.	1873.
Adams, J. C.	1866.	Boeck, C. P. B.	1865.		
Arppe, A. E.	1866.	Gray, J. E.	1865.		
Tyndall, J.	1868.	Hooker, J. D.	1865.		
Struve, O. V.	1868.	Schultze, M.	1866.		
Fizeau, H. L.	1872.	Virchow, R.	1867.		
Helmholtz, H. L. F.	1872.	Hofmeister, V.	1872.		
d'Arrest, H. L.,	1873.	Reichert, C. B.	1872.		
Tortolini, B.	1873.	Paine, M.	1873.		
Jamin, J.	1873.	Boeck, C. V.	1873.		
Secchi, A.	1873.	Danielssen, D. C.	1873.		
Kirchhoff, G. R.	1873.	De Notaris, J.	1873.		
		Günther, A.	1873.		
		Recklinghausen, F.	1873.		

Litterarum commercio juncti

I. In Classe *Physico-Mathematica:*		II. In Classe *Medica et Historiæ Naturalis:*		III. In Classe *Historico-Archæologica:*	
Mainardi, C.	1844.	Holbrook, J.	1850.	Pertz, G. H.	1852.
Littrow, C. L.	1844.	Berkeley, M. J.	1852.	Steinthal, H.	1865.
Scheerer, C. J. A. T.	1852.	Koren, J.	1859.	Wilde, V. R.	1859.
Carrington, R. C.	1865.	Müller, F.	1862.		
Lassel, V.	1866.	Tuckerman, E.	1867.		
De la Rue, W.	1866.	Anger, J.	1867.		
Kjerulf, T.	1866.				
Marignac, J. C.	1866.				
Hoppe, E. R. E.	1871.				

III.

His **Academiis vel Societatibus Scientiarum** Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis dimittuntur.

In America:

Boston, ... American Academy of Arts and Sciences.
Society of Natural History.
Chicago, ... Academy of Sciences.
Columbus, . . Ohio State Board of Agriculture.
Madison, . . . Wiconsin State Agricult. Society.
New-Haven, . Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-Orleans, . Academy of Sciences.
New-York, . . Lyceum of Natural History.
American Geogr. a. Statistical Society.
Philadelphia, . Academy of Natural Sciences.
American Philosophical Society.
Entomological Society.
Saint-Louis, . Academy of Science.
Salem, ... Essex Institute.
Peabody Academy.
San-Fransisco, California Academy of Natural Sciences.
Washington, . Department of Agriculture.
National Academy.
Naval Observatory.
Smithsonian Institution.
Surgeon General's Office.
U. S. Patent Office.

In Asia:

Batavia, . . . Magnetical and Meteorological Observatory.

In Australia:

Melbourne, . . Roy. Society of Victoria.

In Europa:

Cambridge, . . Observatory.
Philosophical Society.
Dublin, ... Natural History Society.
Roy. Dublin Society.
Roy. Irish Academy.
Edinburgh, . . Geological Society.
Physical Society.
Roy. Observatory.
Roy. Society.
Greenwich, . . Roy. Observatory.
London, ... Linnean Society.
Roy. Astronomical Society.
Roy. Institution of Great Britain.
Roy. Society.
Zoological Society.
Manchester, . . Literary and Philosophical Society.
Oxford, ... Radcliffe Observatory.

Amsterdam, . Kon. Akademie van Wetenschappen.
Kon. Zoologisch Genootschap, Natura Artis Magistra.

Harlem, . . . Société Teyler.
Société Hollandaise des Sciences.

Bruxelles, . . Académie Roy. des Sciences, des Lettres etc.
Observatoire Royal.
Société Entomologique.
Société Malacologique de Belgique.

Caën, ... Société des Sciences physiques et naturelles.
Bordeaux, . . Société Linnéenne de Normandie.
Cherbourg, . . Société des Sciences naturelles.
Dijon, ... Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Lyon, ... Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
Société d'Agriculture, d'Histoire naturelle etc.
Société Linnéenne.
Montpellier, . . Académie des Sciences et Lettres.
Paris, ... Académie des Sciences.
Ministère de l'Instruction publique et des Cultes.
Observatoire Astronomique.
Société Mathématique de France.
Société Philomatique
Strasbourg, . . Société des Sciences naturelles.

Bern, ... Naturforschende Gesellschaft.
Société Helvétique des Sciences naturelles.
Genève, ... Société de Physique et d'Hist. naturelle.
Lausanne, . . . Société Vaudoise des Sciences naturelles.

Milano, ... Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Napoli, ... R. Accademia delle Scienze.
Palermo, . . . R. Istituto Tecnico.
Roma, ... R. Accademia de' Nuovi Lincei.
Torino, ... R. Accademia delle Scienze.

Dorpat, ... Observatoire impérial.
Helsingfors, . Finska Vetenskaps Societeten.
Societas Pro Fauna et Flora Fennica.
Moscou, ... Société des Naturalistes.
Pulkowa, . . . Observatoire impérial.
S:t Pétersbourg, Académie imp. des Sciences.
Commission archæologique.
Observatoire physique central de Russie.

Berlin, ... K. Preuss. Akademie der Wissenschaften.
K. Sternwarte.
Physikalische Gesellschaft.
Bremen, . . . Naturwissenschaftl. Verein.
Breslau, . . . Schlesische Gesellschaft f. Vaterländische Cultur.
Brünn, ... Naturforschende Verein.
Dresden, . . . K. Leopold. Carol. Akademie der Naturforscher.
Dürkheim, . . Pollichia.
Frankfurt am Main: Redaktion der Zeitschrift: Zoologische Garten.
Senckenbergische Naturforsch. Gesellschaft.
Giessen, ... Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Greifswald, . . Naturwissenschaftliche Verein von Neu-Vorpommern u. Rügen.
Redaktion des Archiv der Mathematik und Physik.
Göttingen, . . . K. Gesellschaft der Wissenschaften.
Halle, ... Naturforschende Gesellschaft.

Innsbruck, . . . Naturwissenschaftlisch-medizin. Verein.
Königsberg, . Physikalische und Oekonomische Gesellschaft.
Leipzig, ... Astronomische Gesellschaft.
Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.
K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
München, . . . K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.
K. Hof- und Staats-Bibliothek.
Prag, ... K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Presburg, . . . Verein für Naturkunde
Regensburg, . K. Bayerische Botanische Gesellschaft.
Ulm, ... Verein für Kunst und Alterthum.
Wien, ... K. K. Akademie der Wissenschaften.
K. K. Geologische Reichsanstalt.
K. K. Sternwarte.
K. K. Zoolog.-Botan. Gesellschaft.
Verein zur Verbreitung naturwiss. Kentnisse.
Wiesbaden, . . Verein f. Naturkunde in Nassau.

Kjöbenhavn, . K. Danske Videnskabernes Selskab.
K. Nordiske Oldskrift-Selskab.
Naturhistoriske Forening.
Universitets Bibliotheket.
Reykjavik, . . Islands Stifts-Bibliothek.

Bergen, ... Museum.
Observatorium.
Christiania, . . Observatorium.
Universitets Bibliotheket.
Videnskabs Selskabet.
Trondhjem, . . Videnskabs Selskabet.

Göteborg, . . . K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhället.
Lund, ... K. Fysiografiska Sällskapet.
Stockholm, . . . Geologiska Byrån.
K. Vetenskaps-Akademien.
K. Vitterhets-, Historie- och Antiqvitets-Akademien.

ON THE INTEGRATION

OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

OF THE N^{TH} ORDER WITH ONE DEPENDENT AND TWO INDEPENDENT VARIABLES.

BY

M. FALK.

(Presented to the Royal Society of Upsala, the 12 April 1871).

UPSALA.
PRINTED BY ED. BERLING.
1872.

§ 1.

Genesis of the differential equation from its primitive.

We will examine the differential equation arising from

$$F(\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_r, x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

where F is a definite function and φ_1, φ_2 . ... φ_r arbitrary functions respectively of u_1, u_2, ..., u_r, which also are definite functions of x, y, z; thus $\varphi_1 = \varphi_1(u_1)$, $\varphi_2 = \varphi_2(u_2)$ etc.

If equ. (1) be differentiated partially with respect to x and y, we obtain two equations containing the partial differential coëfficients of z of the first order together with the first derived functions of φ_1, φ_2, ... φ_r. Differentiating again, we get three equations with the three partial differential coëfficients of z of the second order and the second derived functions of φ_1, ..., φ_r, and so on. Proceeding thus, we get a system of equations, finishing with those, which contain the partial differential coëfficients of z of the nth order and the nth derived functions of φ_1, φ_2 .. φ_r, n being any whole number. These, joined with (1), are $1 + 2 + .. + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equations, containing the r arbitrary functions φ and their n first derived functions; in all $(n+1)r$ functions φ, φ', ... $\varphi^{(n)}$. That we may be able to get by elimination an equation fully freed from those functions, n must generally satisfy the condition $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geqq (n+1)r+1$, whence $n \geqq 2r - 1$.

The least value, we can in ordinary cases give to n, is therefore $n=2r-1$.

Thus

A primitive (1), containing r arbitrary functions of the form, considered above, will generally give rise to a partial differential equation of the $(2r-1)^{st}$ order.

But in special cases (1) may give a differential equation of an order lower than the $(2r-1)^{st}$; for instance, when the equations, where the highest differential coëfficients of z are those of the rth order, do not contain the functions φ, φ', ... $\varphi^{(r-1)}$, but only $\varphi_1^{(r)}$, $\varphi_2^{(r)}$, ... $\varphi_r^{(r)}$. These equations are $(r+1)$ in number and will in general give by elimination of the functions $\varphi^{(r)}$ a partial differential equation of the rth order. If now r be ≥ 2, n will be $> r$; because $n-r=r-1$. If $r=1$, then $n=1$, and the special will coincide with the general case.

Without further reasoning we call (1) the *general* solution or primitive to the differential equation, if (1) contains r arbitrary functions, the order of the differential equation being r, that is: if $n=r$. This will, in fact, agree with the statement of Lagrange respecting partial differential equations of the first and second order. It may be observed, that for $r=2$ the special case $n=2$ (in the general one, $n=3$) coincides with the statement just cited.

Some examples will throw light on the above theory. We will, however, first make a few remarks as to some points in it. A solution of a partial differential equation *ought* to be called general, when it contains as many distinct arbitrary functions, as possible, and satisfies the differential equation. Now it may perhaps happen, that a given partial differential equation of the rth order cannot be satisfied by *any* relation containing x, y, z and r distinct arbitrary functions; the solution which in this case would be called general, *is* then according to the definition above given, not really so. Thus there may perhaps be partial differential equations, deprived of any general solution in the usual sense of this term. — As to the form of (1), it is not the most general possible, because each of the functions φ contains only one definite function u, although it might have contained any number of such functions; it is, still, enough for our purpose, because, as will be seen afterwards, in this memoir we only obtain general solutions of the form (1).

Ex. 1. $z = \varphi(y+x)\,\psi(y-x)$ (φ and ψ arbitrary).

If $p = \frac{\partial z}{dx}$, $q = \frac{\partial z}{dy}$, $r = \frac{\partial^2 z}{dx^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{dx dy}$, $t = \frac{\partial^2 z}{dy^2}$,

then $p = \phi'\,\psi - \phi\,\psi'$, $q = \phi'\psi + \phi\psi'$,

whence $r = \phi''\,\psi - 2\phi'\,\psi' + \phi\,\psi''$,

$s = \phi''\,\psi - \phi\psi''$,

$t = \phi''\,\psi + 2\phi'\,\psi' + \phi\,\psi''$.

Thus $t - r = 4\,\phi'\,\psi'$, $p + q = 2\phi'\psi$, $q - p = 2\psi'\phi$.

Therefore $q^2 - p^2 = 4\,\phi\,\psi\,\phi'\,\psi'$ and finally $q^2 - p^2 = z\,(t-r)$;

the given primitive is therefore general solution to this diff. equ.

Ex. 2. $z = y\,\phi(x) + x\,\psi(y) + \phi(x)\,\psi(y)$.

Hence $p = y\,\phi' + \psi + \psi\,\phi'$, $q = x\,\psi' + \phi + \phi\,\psi'$, $s = \phi' + \psi' + \phi'\psi'$.

From the equations $r = (y+\psi)\,\phi''$, $t = (x+\phi)\,\psi''$ we cannot eliminate ϕ'' and ψ'' in order to obtain one more equation between x, y, z, ϕ, ψ, ϕ', ψ'.

From the expressions for p and q we get $\phi' = \frac{p-\psi}{y+\psi}$, $\psi' = \frac{q-\varphi}{x+\varphi}$;

therefore $s = \frac{p-\psi}{y+\psi} + \frac{q-\varphi}{x+\varphi} + \frac{(p-\psi)(q-\varphi)}{(y+\psi)(x+\varphi)}$

or $s\,(xy + y\phi + x\psi + \phi\psi) = px + qy + pq - (y\phi + x\psi + \phi\psi)$

or finally $s\,(xy + z) = px + qy - z$,

a partial diff. equ. of the second order.

Ex. 3. $z = F(\phi, \psi)$,

where $\phi = \phi(u)$, $\psi = \psi(v)$ and u and v are given functions of x and y.

Here we have

$$p = \frac{\partial F}{d\varphi}\,\varphi'\,\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial F}{d\psi}\,\psi'\,\frac{\partial v}{dx},\quad q = \frac{\partial F}{d\varphi}\,\varphi'\,\frac{\partial u}{dy} + \frac{\partial F}{d\psi}\,\psi'\,\frac{\partial v}{dy}.$$

Deriving from these by differentiation r, s and t and eliminating φ'' and ψ'', we get

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{\partial u}{dy}\,\frac{\partial v}{dy} - s\left(\frac{\partial u}{dx}\frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial u}{dy}\,\frac{\partial v}{dx}\right) + t\,\frac{\partial u}{dx}\,\frac{\partial v}{dx} &= \\ = A\,\frac{\partial F}{d\varphi}\,\varphi' + B\,\frac{\partial F}{d\psi}\,\psi' + C\,\frac{\partial^2 F}{d\varphi\, d\psi}\,\varphi'\,\psi' & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (a),$$

where $A = \frac{\partial v}{dy}\left(\frac{\partial^2 u}{dx^2}\ \frac{\partial u}{dy} - \frac{\partial^2 u}{dxdy}\ \frac{\partial u}{dx}\right) + \frac{\partial v}{dx}\left(\frac{\partial^2 u}{dy^2}\ \frac{\partial u}{dx} - \frac{\partial^2 u}{dxdy}\ \frac{\partial u}{dy}\right)$,

whence B is obtained by interchanging u and v,

and $$C = \frac{\partial u}{dy}\ \frac{\partial v}{dx} - \frac{\partial u}{dx}\ \frac{\partial v}{dy}.$$

Thus A, B and C do not involve φ, ψ, φ', ψ'.

From the expressions for p and q it follows, that

$$C\ \frac{\partial F}{d\varphi}\ \varphi' = q\ \frac{\partial v}{dx} - p\ \frac{\partial v}{dy},\quad C\ \frac{\partial F}{d\psi}\ \psi' = p\ \frac{\partial u}{dy} - q\ \frac{\partial u}{dx}.$$

Substituting from these the expressions for φ' and ψ' in (a), it is easy to see, that also φ and ψ will disappear entirely, if $\dfrac{\dfrac{\partial^2 F}{d\varphi d\psi}}{\dfrac{\partial F}{d\varphi}\ \dfrac{\partial F}{d\psi}}$ is independent of them, or can by means of the given primitive be freed from them. This has been the case in the foregoing examples. In the next following this expression cannot be made independent of φ and ψ, and the differential equation will therefore be of the third order.

Ex. 4. $$z = \varphi^2\psi - \psi^2\varphi,$$

where for the sake of simplicity we suppose $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$.

Here we have $\frac{\partial F}{d\varphi} = \psi\ (2\varphi - \psi)$, $\frac{\partial F}{d\psi} = \varphi(\varphi - 2\psi)$, $\frac{\partial^2 F}{d\varphi d\psi} = 2(\varphi - \psi)$,

whence $$\frac{\dfrac{\partial^2 F}{d\varphi d\psi}}{\dfrac{\partial F}{d\varphi}\ \dfrac{\partial F}{d\psi}} = \frac{2(\varphi - \psi)}{\varphi\psi(\varphi - 2\psi)(2\varphi - \psi)}$$

and cannot be freed from φ and ψ by means of the given primitive.

Ex. 5. We return to ex. 3, but now we suppose its differential equation of the third order. Substituting in (a) the expressions for φ' and ψ' from (b), we arrive at an equation of the form

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = \zeta + \eta F_1(\varphi, \psi) \quad \ldots\ldots\ (c),$$

where α, β, γ are the coëfficients in (a) and, therefore, definite functions of x and y; ζ and η are in the same manner definite functions of x, y, p and q. As to $F_1(\varphi, \psi)$, it neither is, nor can, by the aid of the given primitive, be freed from φ and ψ.

Differentiating (c) with respect to x, we get

$$\alpha \frac{\partial r}{dx} + \beta \frac{\partial s}{dx} + \gamma \frac{\partial t}{dx} + r \frac{\partial \alpha}{dx} + s \frac{\partial \beta}{dx} + t \frac{\partial \gamma}{dx} =$$

$$= \left(\frac{\partial \zeta}{dx}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{dx}\right) F_1 + \eta \left(\frac{\partial F_1}{d\varphi} \varphi' \frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial F_1}{d\psi} \psi' \frac{\partial v}{dx}\right),$$

$\left(\frac{\partial \zeta}{dx}\right)$ and $\left(\frac{\partial \eta}{dx}\right)$ being the differential coëfficients of ζ and η with respect to x, as far as they involve x both explicitely and implicitely.

If $\varrho = \alpha \frac{\partial r}{dx} + \beta \frac{\partial s}{dx} + \gamma \frac{\partial t}{dx}$, and φ' and ψ' be eliminated by means of (b), this equation will take the form

$$F_2 (x, y, p, q, r, s, t, \varrho, \varphi, \psi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d);$$

and if between (c), (d) and the given primitive φ and ψ be eliminated, we shall get

$$F_3 (\varrho, x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

or, solving with respect to ϱ and restoring its value

$$\alpha \frac{\partial r}{dx} + \beta \frac{\partial s}{dx} + \gamma \frac{\partial t}{dx} = f (x, y, z, p, q, r, s, t) \quad . \quad . \quad (e).$$

Thus we have the following remarkable result, viz.: that the primitive $z = F(\varphi, \psi)$, φ and ψ being defined as above, gives always rise to a differential equation, which is *linear* with respect to its highest partial differential coëfficients of z, whether this diff. equ. be of the second or third order. When the differential equation is of the second order, it will, of course, be the equ. (c), cleared of φ and ψ.

Another remarkable circumstance, when the diff. equ. is of the third order, is, that we may get more than one diff. equ. from the same primitive $z = F(\varphi, \psi)$. This is easy to see, because we might have differentiated (c) with respect to y instead of to x, whence we should have obtained in the place of (e) a diff. equ. of the form

$$\alpha \frac{\partial r}{dy} + \beta \frac{\partial s}{dy} + \gamma \frac{\partial t}{dy} = f_1 (x, y, z, p, q, r, s, t).$$

Ex. 6. $\qquad z = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r),$

where, as in ex. 3, every one of the functions φ contains only one of the definite functions u of x and y. We will here examine two cases, viz. 1^{stly} when the differential equation is of the $(2r-1)^{st}$ and 2dly when it is of the rth order.

In the *first* case we have for $n = 2r-1$ a system of $\frac{n(n+1)}{2} = r(2r-1)$ equations, containing φ, φ', ... $\varphi^{(n-1)}$. There is, therefore, only one more equation wanted, in order to be able to eliminate the $r\,n=r(2r-1)$ functions φ, φ', ..., $\varphi^{(n-1)}$. This desired equation will in general be obtained by eliminating the r functions $\varphi^{(n)}$ between $r+1$ of the $n+1=2r$ equations, which involve $\varphi^{(n)}$. We see, that there are several ways to construct this equation, wherefore also we may get more than one differential equation from the given primitive. The equation required will be of the form

$$\chi\,(\Delta,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_r,\ \varphi_1',\ \varphi_2',\ \ldots\ \varphi_r',\ \ldots\ \varphi_1^{(n-1)},\ \varphi_2^{(n-1)},\ \ldots\ \varphi_r^{(n-1)}) = 0\ldots(f),$$

where Δ is a determinant, which is linear with respect to the differential coëfficients of z of the nth order. Now eliminating φ, φ', ... $\varphi^{(n-1)}$ between (f) and the before obtained equations, we get an equation of the form

$$\Delta = f\,(x,\ y,\ z,\ z_{1,0},\ z_{0,1},\ z_{2,0},\ z_{1,1},\ z_{0,2},\ \ldots z_{n-1,0},\ z_{n-2,1},\ \ldots\ z_{0,n-1})\ldots(g),$$

where $z_{p\,q} = \frac{\partial^{p+q} z}{dx^p dy^q}$.

Thus we see, that, when the differential equation is of the $(2r-1)^{st}$ order, it also becomes linear with respect to the differential coëfficients of z of the $(2r-1)^{st}$ order. We may, moreover, get more than one such diff. equ. from a single primitive.

Secondly suppose $n=r$. Then we have $(n+1)$ equations involving $\varphi_1^{\,n}$, $\varphi_2^{\,n}$, ..., $\varphi_n^{\,n}$. As these functions occur in a linear form, elimination between them ordinarely leads to a single equation, which is linear with respect to the differential coëfficients of z of the nth order, that is: involves a linear function Δ of these quantities. This equation, then, will be of the form (f), where n is to be put for r or vice versa. Now elimination between this equation and the equations involving φ, φ', ..., $\varphi^{(n-1)}$ must remove all these functions and give a single differential equation of the r^{st} order, which is linear in the differential coëfficients of z of the rth order.

There is also another mode of genesis of a partial differential equation from a primitive. Suppose

$$z = f\,(x,\ y,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (h),$$

a_1, a_2, ... a_r being r arbitrary constants. Such an equation Lagrange has termed a *complete* primitive. Thence we get by differentiation $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

equations involving z and its partial differential coëfficients up to the nth order. n being the order of the differential equation, arising from the elimination of the arbitrary constants, we must determine it from the conditions

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geqq r+1 \ , \quad r \geqq \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Thus when $1 \leqq r \leqq 2$, $n = 1$,

„ $3 \leqq r \leqq 5$, $n = 2$,

„ $6 \leqq r \leqq 9$, $n = 3$,

„ $10 \leqq r \leqq 14$, $n = 4$ etc.

For the sake of the utmost generality it seems best to call (h) a complete primitive, only when $r = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$, n being the order of the differential equation; this also agrees with Lagrange's view, for he supposes $r = 2$ when $n = 1$.

Finally, as our resources for the integration of given partial differential equations by obtaining their *general* solutions are restricted, we sometimes get solutions involving both arbitrary functions and arbitrary constants; such solutions we will term *mixed.* Supposing

$$z = f(x \ , \ y \ , \ a_1 \ , \ a_2 \ , \ \ldots \ a_p \ , \ \varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \ldots \ \varphi_q)$$

a mixed primitive, then in general the order n of the resulting differential equation will be determined from the conditions

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geqq p + (n+1)\, q + 1 \ , \quad p + nq \geqq \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

We consider in the same way the mixed solution as particular, when the condition

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} > p + (n+1)\, q + 1$$

is satisfied.

A) PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, WHICH ARE LINEAR WITH RESPECT TO THE PARTIAL DIFFERENTIAL COËFFICIENTS OF z OF THE HIGHEST (n^{th}) ORDER.

§. 2.

Derivation of the partial differential equation from a first integral of given form.

In all the following we use the notation

$$z_{p,q} = \frac{\partial^{p+q} z}{dx^p dy^q} .$$

Now let φ and ψ denote definite functions of x, y, z, $z_{1,0}$, $z_{0,1}$, $z_{2,0}$, $z_{1,1}$, $z_{0,2}$, $\ldots$ $z_{n-1,0}$, $z_{n-2,1}$, $\ldots$ $z_{0,n-1}$; the first derived function of φ with respect to x, as far as x is involved in φ both explicitely and in z and in its differential coëfficients up to the $(n-2)^{a}$ order, we denote by X and by Y the analogous derived function of φ with respect to y; that is

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial \varphi}{dx} + \sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{i=0}^{i=r} Z_{r-i,i}\; z_{r-i+1,i} \\ Y &= \frac{\partial \varphi}{dy} + \sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{i=0}^{i=r} Z_{r-i\,i}\; z_{r-i,i+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2),$$

$Z_{m,n}$ representing $\frac{\partial \varphi}{dz_{m,n}}$. Substituting ψ, X', Y', Z' for φ, X, Y, Z in (2) we have the corresponding expressions with respect to ψ.

Denoting by f an arbitrary function, we now seek, what is required, in order that

$$\varphi = f(\psi) \quad \ldots \quad (3)$$

may by differentiation and elimination of $f'(\psi)$ lead to a partial differential equation, which is linear in the above sense and of the nth order.

If (3) be differentiated partially, we get

$$\left.\begin{aligned} X + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i} &= f'(\psi)\ \Big[X' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\ z_{n-i,i}\Big] \\ Y + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1} &= f'(\psi)\Big[Y' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\ z_{n-1-i,i+1}\Big] \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

which by elimination of $f'(\psi)$ give

$$\left.\begin{aligned} & X \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1} - X' \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1} + \\ & + Y' \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i} - Y \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i} \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1} - \\ & - \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i} \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1} = \\ & = X'Y - XY' \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5).$$

In the products of two sums we put r instead of i in their last factors, whereby these terms become

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{r=0}^{r=n-1} Z_{n-1-i,i}\, Z'_{n-1-r,r}\, z_{n-i,i}\ z_{n-1-r,r+1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{r=0}^{r=n-1} Z_{n-1-i,i}\, Z_{n-1-r,r}\, z_{n-i,i}\ z_{n-1-r,r+1}$$

or $$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{r=0}^{r=n-1} \Big[Z_{n-1-i,i}\, Z'_{n-1-r,r} - Z'_{n-1-i,i}\, Z_{n-1-r,r}\Big] z_{n-i,i}\ z_{n-1-r,r+1} \quad \ldots\ldots (6).$$

The equation (5) becomes, as may easy be seen,

$$\left.\begin{aligned} & (Y'Z_{n-1,0} - YZ'_{n-1,0})\, z_{n,0} + \\ & + \sum_{i=1}^{i=n-1} \Big[Y'Z_{n-1-i,i} - YZ'_{n-1-i,i} + XZ_{n-i,i-1} - X'Z_{n-i,i-1}\Big] z_{n-i,i} + \\ & + \text{the terms in (6)} \ = \ X'Y - XY' \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7).$$

When $i = r$ the corresponding terms in (6) vanish; in order to exclude such terms, we must transform the expression (6). To this end we use the identity

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{r=0}^{r=n-1} = \sum_{i=1}^{i=n-1}\sum_{r=0}^{r=i-1} + \sum_{i=0}^{i=n-2}\sum_{r=i+1}^{r=n-1} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

whence the vanishing terms are already removed.

The first term in the right member of this identity undergoes no change, when we interchange r and i; thus this term becomes

$$-\sum_{r=1}^{r=n-1}\sum_{i=0}^{i=r-1}\left[Z_{n-1-i,i}\ Z'_{n-1-r,r} - Z'_{n-1-i,i}\ Z_{n-1-r,r}\right] z_{n-r,r}\ z_{n-1-i,i+1} \ \ldots \quad (9).$$

This double sum may be regarded as extended over the surface of a rightangled triangel; and if we sum over the same surface in reverse order, it will be seen, that the expression (9) becomes

$$-\sum_{i=0}^{i=n-2}\sum_{r=i+1}^{r=n-1}\left[Z_{n-1-i,i}\ Z'_{n-1-r,r} - Z'_{n-1-i,i}\ Z_{n-1-r,r}\right] z_{n-r,r}\ z_{n-1-i,i+1} \ .$$

Thus the expression (6) becomes

$$\sum_{i=0}^{i=n-2}\sum_{r=i+1}^{r=n-1}\left[Z_{n-1-i,i}\ Z'_{n-1-r,r} - Z'_{n-1-i,i}\ Z_{n-1-r,r}\right]\left[z_{n-i,i}\, z_{n-1-r,r+1} - z_{n-r,r}\, z_{n-1-i,i+1}\right] .. (10).$$

Now as the equation (7) is to be linear with respect to the differential coëfficients of z of the nth order, we must have

$$Z_{n-1-i,i}\ Z'_{n-1-r,r} = Z'_{n-1-i,i}\ Z_{n-1-r,r}$$

from $r = i + 1$ to $r = n - 1$ and from $i = 0$ to $i = n - 2$.

The last equations also may be written

$$\frac{Z_{n-1-r,r}}{Z_{n-1,0}} = \frac{Z'_{n-1-r,r}}{Z'_{n-1,0}} = \mu_r \quad \ldots\ldots\ldots (11),$$

where we have successively to put $r = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$; also, of course, it is supposed, that neither $Z_{n-1,0}$ nor $Z'_{n-1,0}$ vanishes.

Now the differential equation (7) will become

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_i\, z_{n-i,i} = V \quad \ldots\ldots\ldots (12),$$

supposing the following notations used, viz.:

$$\left.\begin{aligned} V &= X'Y - XY', \\ U_0 &= Y'Z_{n-1,0} - YZ'_{n-1,0}, \\ U_i &= \mu_i\left(Y'Z_{n-1,0} - YZ'_{n-1,0}\right) + \mu_{i-1}\left(XZ'_{n-1,0} - X'Z_{n-1,0}\right), \\ U_n &= \mu_{n-1}\left(XZ'_{n-1,0} - X'Z_{n-1,0}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (13).$$

Admitting the extreme values $\mu_{-1} = 0$, $\mu_0 = 1$ and $\mu_n = 0$, the expression for U_i gives also U_0 and U_n.

§. 3.

To integrate the differential equation (12), when it has a first integral of the form (3).

The object of a first integration of (12) is to return from this differential equation to a first integral of it of the form $\varphi = f(\psi)$ such as equ. (3). In order to find a method of performing that integration we have to shew, that the two simultaneous equations

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = \beta \quad \ldots\ldots\ldots (14),$$

the conditions (11) being satisfied, will also satisfy the equation (12) and reproduce it, if (14) be differentiated totally and the differentials eliminated by means of the equations arising from the circumstance, that z is a function of x and y, viz.:

$$dz_{r-i,i} = z_{r-i+1,i}\, dx + z_{r-i,i+1}\, dy \quad \ldots\ldots (15),$$

where we have to put $i = 0, 1, 2, \ldots r$ successively and then $r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Now (14) gives by differentiation, if all differentials, except dx and dy, are eliminated by means of (15)

$$\left.\begin{aligned} \left[X + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i}\right] dx + \left[Y + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1}\right] dy = 0 \\ \left[X' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-i,i}\right] dx + \left[Y' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1}\right] dy = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16),$$

and, if here we eliminate $\frac{dy}{dx}$, the equation (5) is reproduced, from which again by means of (11) the differential equation (12) may be deduced.

Upon this mode of deriving the differential equation from (14) a method of obtaining the functions φ and ψ may now easily be founded;

they will, in fact, when equated to arbitrary constants, be integrals to (11), (15) and (16). By means of these equations we have, therefore, to deduce a system of ordinary differential equations, to which the equations (14), considered as simultaneous, are a solution. φ and ψ being found, an arbitrary relation $\varphi = f(\psi)$ will be a first integral to (12). The system of ordinary differential equations, from which φ and ψ are to be found, may be deduced in the following manner. From (16) we get

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{X + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1,i}}{Y + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1}} = \frac{X' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-1,i}}{Y' + \sum_{i=0}^{i=n-1} Z'_{n-1-i,i}\, z_{n-1-i,i+1}} .$$

Multiplying in the second member numerator and denominator by $Z'_{n-1,0}$, in the third member similarly by $Z_{n-1,0}$ and subtracting numerator from numerator, denominator from denominator we get by means of (11) and (13)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{XZ'_{n-1,0} - X'Z_{n-1,0}}{Y'Z_{n-1,0} - YZ'_{n-1,0}} = \frac{U_n}{\mu_{n-1}U_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

From the first and second members of (17) we find in virtue of (11) and (13)

$$\mu_i + \mu_{i-1}\frac{dy}{dx} = \frac{U_i}{U_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

where we have to put successively $i = 1, 2, \ldots, n-1$. The formula (18) also involves (17), if we, as before, suppose $\mu_n = 0$.

Now, supposing $r = n-1$ in (15), put successively $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, and having multiplied the equations, thus obtained, in order by $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ add them; we thus get after division by dx

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \mu_i \frac{dz_{n-1-i,i}}{dx} = \mu_0 z_{n,0} + \sum_{i=1}^{i=n-1} z_{n-i,i}\left(\mu_i + \mu_{i-1}\frac{dy}{dx}\right) + z_{0,n}\mu_{n-1}\frac{dy}{dx}$$

or, in virtue of (17) and (18),

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \mu_i \frac{dz_{n-1-i,i}}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} U_i z_{n-i,i}}{U_0}$$

or finally by (12)

$$U_0 \sum_{i=0}^{i=n-1} \mu_i\, dz_{n-1-i,i} = V dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Denoting $\frac{dy}{dx}$ by m we get, after the quantities μ have been eliminated, for determining m the equation

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i U_i m^{n-i} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

which together with the equation

$$dy - mdx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

are equivalent to (17) and (18).

In order to be able to use (19), we must determine the quantities μ from (17) and (18), or else, putting $U_0\mu_i = W_i$, we have to determine W_i the equations

$$W_0 = U_0, \; W_i + W_{i-1} \; m = U_i \; (i = 1, 2, \ldots, n-1) \ldots\ldots (22).$$

(We need not necessarily use the equ. $W_{n-1} m = U_n$, which follows from (17)). Having calculated the quantities W, the equation (19) may be used in the form

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} W_i \, dz_{n-1-i,i} = V dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Now the equations (20), (21), (22) and (23) supply the place of (17), (18) and (19); and by integrating the former group of equations, the functions φ and ψ will be known.

Suppose m a root of the equation (20); we substitute this root in (22) and get a system of quantities W. Then (21) and (23) will be two ordinary simultaneous differential equations, where the coëfficients of the differentials are known functions of x, y, z and the differential coëfficients of z up to the $(n-1)^{st}$ order. Integrating these we get a system of values of φ and ψ. And in this manner there will be as many such systems, as the equation (20) has *distinct* roots, supposing, of course, that the integrations are always possible. If, on the contrary, the equation (20) has equal roots, the number of these systems will be less than n. As now an arbitrary relation between a φ and a ψ, constituting together such a system, is a first integral of (12), there will be found as many first integrals of the given partial differential equation, as the equation (20) has *distinct* roots, all the integrations in (21) and (23) being supposed possible.

§. 4.

Relations between two and three first integrals of the equ. (12).

Let μ_i and m correspond to the first integral $F = \varphi - f(\psi) = 0$, $\mu_i^{(r)}$ and m_r to another $F_r = \varphi_r - f_r(\psi_r) = 0$. Then from (17) and (18) we have evidently

$$\left.\begin{aligned} \mu_{n-1}\, m &= \mu_{n-1}^{(r)}\, m_r\,, \\ \mu_i + \mu_{i-1}\, m &= \mu_i^{(r)} + \mu_{i-1}^{(r)}\, m_r \\ (i &= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)). \end{aligned}\right\} \quad . \quad (24)\,.$$

The equations (11) give

$$\mu_i = \frac{Z_{n-1-i,i}}{Z_{n-1,0}} = \frac{Z'_{n-1-i,i}}{Z'_{n-1,0}} = \frac{Z_{n-1-i,i} - f'(\psi)\, Z_{n-1-i,i}}{Z_{n-1,0} - f'(\psi)\, Z'_{n-1,0}}$$

or

$$\mu_i = \frac{\dfrac{\partial F}{dz_{n-1-i,i}}}{\dfrac{\partial F}{dz_{n-1,0}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)\,;$$

and in the same manner an analogous expression is obtained for $\mu_i^{(r)}$. Using these equations and putting $\dfrac{\partial F_r}{dz_{i,j}} = \zeta_{i,j}^{(r)}$, the equations (24) become

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta_{0,n-1}}{\zeta_{n-1,0}}\, m &= \frac{\zeta_{0,n-1}^{(r)}}{\zeta_{n-1,0}^{(r)}}\, m_r\,, \\ \frac{\zeta_{n-1-i,i}}{\zeta_{n-1,0}} + \frac{\zeta_{n-i,i-1}}{\zeta_{n-1,0}}\, m &= \frac{\zeta_{n-1-i,i}^{(r)}}{\zeta_{n-1,0}^{(r)}} + \frac{\zeta_{n-i,i-1}^{(r)}}{\zeta_{n-1,0}^{(r)}}\, m_r \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

in the last of which we have to put successively $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$.

Eliminating successively m and m_r, we get from the two equations (26)

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{0,n-1}\, D_i^{(r)} + \zeta_{n-1,0}\, \triangle_i^{(r)}\, m_r &= 0\,, \\ \zeta_{0,n-1}^{(r)}\, D_i^{(r)} + \zeta_{n-1,0}^{(r)}\, \triangle_i^{(r)}\, m &= 0 \\ (i &= 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1))\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

where the following notations are used, viz.:

$$D_\varrho^{(r)} = \begin{vmatrix} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}, & \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}^{(r)} \\ \zeta_{n-1,0}, & \zeta_{n-1,0}^{(r)} \end{vmatrix}, \quad \triangle_\varrho^{(r)} = \begin{vmatrix} \zeta_{n-\varrho,\varrho-1}, & \zeta_{n-\varrho,\varrho-1}^{(r)} \\ \zeta_{0,n-1}, & \zeta_{0,n-1}^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Giving in either of the equations (27) successively two values i and j to the index i and eliminating the m (or m_r) occurring in these equations, we obtain

$$D_i^{(r)} \triangle_j^{(r)} = D_j^{(r)} \triangle_i^{(r)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

including all the relations, which the two integrals $F=0$ and $F_r=0$ must satisfy, if independently of each other i and j receive all integral values from i or $j=1$ to i or $j=n-1$.

Taking the last equ. of system (27) together with what it becomes, if s be put for r and j for i, we get by elimination of m the form of the relations, which must be satisfied by three first integrals $F=0$, $F_r=0$, $F_s=0$ of the equation (12), viz.:

$$\zeta_{0,n-1}^{(r)} \zeta_{n-1,0}^{(s)} D_i^{(r)} \triangle_j^{(s)} = \zeta_{n-1,0}^{(r)} \zeta_{0,n-1}^{(s)} D_j^{(s)} \triangle_i^{(r)} \quad \ldots \quad (29),$$

which for $s=r$ reproduces (28).

The equations (28) and (29) we, therefore, may regard as complete identities, satisfied by any two or three of the first integrals of (12).

§. 5.

Properties of n distinct first integrals of the differential equation (12).

Firstly let us have the n equations

$$F=0, \quad F_1=0, \quad \ldots\ldots \quad F_{n-1}=0 \quad \ldots\ldots \quad (30),$$

involving x, y, z and the partial differential coëfficients of z with respect to x and y up to the $(n-1)^{st}$ order, the equations (30) being *not* restricted to be first integrals of a given partial differential equation; we proceed to investigate the general conditions, that must hold, in order that the values of $z_{n-1,0}$, $z_{n-2,1}$, $\ldots$, $z_{0,n-1}$, obtained from (30) may render the equations (15) integrable.

To the notations, used in the equations (26) and (27), we add the following

$$\left(\frac{\partial F}{dx}\right) = \xi, \quad \left(\frac{\partial F}{dy}\right) = \eta, \quad \left(\frac{\partial F_r}{dx}\right) = \xi^{(r)}, \quad \left(\frac{\partial F_r}{dy}\right) = \eta^{(r)},$$

where the parentheses are used to denote, that we differentiate, for instance, with respect to x, as far as it is involved in F or F_r both explicitly and implicitly through z and its partial differential coëfficients of all occurring orders *except the highest.* Lastly we also put

$$D_0^{(r)} = \begin{vmatrix} \xi\,, & \xi^{(r)} \\ \zeta_{n-1,0}\,, & \zeta_{n-1,0}^{(r)} \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \triangle_0^{(r)} = \begin{vmatrix} \eta\,, & \eta^{(r)} \\ \zeta_{0,n-1}\,, & \zeta_{0,n-1}^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Now differentiating $F=0$ and $F_r=0$ partially with respect to x, we get

$$\xi + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}\, z_{n-\varrho,\varrho} = 0\,,$$

$$\xi^{(r)} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}^{(r)}\, z_{n-\varrho,\varrho} = 0\,.$$

Adding these multiplied respectively by $\zeta_{n-1,0}^{(r)}$ and $-\zeta_{n-1,0}$, $z_{n,0}$ will dissappear, and we get

$$D_0^{(r)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} D_\varrho^{(r)} z_{n-\varrho,\varrho} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Differentiating $F=0$ and $F_r=0$ with respect to y and eliminating $z_{0,n}$, we arrive at the equation

$$\triangle_0^{(r)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \triangle_\varrho^{(r)} z_{n-\varrho,\varrho} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32),$$

where $\varrho-1$ is substituted for ϱ.

If now in (31) and (32) we put successively $r=1, 2, \ldots (n-1)$, we shall get all distinct equations, that can be constructed by differentiating (30) and eliminating $z_{n,0}$ and $z_{0,n}$. These will be $2n-2$ equations, involving the $(n-1)$ remaining differential coëfficients of the nth order, viz. $z_{n-1,1}$, $z_{n-2,2}$, $\ldots$ $z_{1,n-1}$, the elimination of which, therefore, must lead to $(n-1)$ equations of condition. These relations we may easily obtain in the following manner. Taking all the equations, involved in (31), together with the equation (32) unaltered, and eliminating the remaining differential coëfficients of the nth order, the result will be

$$\begin{vmatrix} D_0', & D_1', & D_2', & \ldots, & D_{n-1}' \\ D_0^{(2)}, & D_1^{(2)}, & D_2^{(2)}. & \ldots, & D_{n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(n-1)}, & D_1^{(n-1)}, & D_2^{(n-1)}, & \ldots, & D_{n-1}^{(n-1)} \\ \triangle_0^{(r)}, & \triangle_1^{(r)}, & \triangle_2^{(r)}, & \ldots, & \triangle_{n-1}^{(r)} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (33,$$

whence, by putting successively $r = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, all the desired relations will appear. These are then the relations, that must be identically satisfied, in order that the values of the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order may render the equations (15) integrable.

The equations (15) take a much simpler form, when the equations (30) are n distinct integrals of the equation (12), that is: when they satisfy the relations (28). In the equations (33) we may, namely, interchange the rows or columns in any way, because then the determinants in their left members can not undergo any change except, perhaps, with respect to their signs.

Thus the equations (33) may be written

$$\left|\begin{array}{cccc} \triangle_0^{(r)}, & \triangle_1^{(r)}, & \triangle_2^{(r)}, & \ldots, \triangle_{n-1}^{(r)} \\ D_0^{(r)}, & D_1^{(r)}, & D_2^{(r)}, & \ldots, D_{n-1}^{(r)} \\ D_0', & D_1', & D_2', & \ldots, D_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(r-1)}, & D_1^{(r-1)}, & D_2^{(r-1)}, & \ldots, D_{n-1}^{(r-1)} \\ D_0^{(r+1)}, & D_1^{(r+1)}, & D_2^{(r+1)}, & \ldots, D_{n-1}^{(r+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(n-1)}, & D_1^{(n-1)}, & D_2^{(n-1)}, & \ldots, D_{n-1}^{(n-1)} \end{array}\right| = 0 \quad . \quad . \quad (34).$$

Now choosing an arbitrary integer i such that $D_i^{(r)} \gtrless 0$, the relations (34) may have their left members multiplied by $D_i^{(r)}$, that is: we may in the determinants, represented by (34), multiply the terms in their first rows by that quantity. The determinants in the equations, thus formed, will remain unchanged, if from every term of their first rows we subtract the corresponding terms of their second rows multiplied by the quantity $\triangle_i^{(r)}$. Then, in virtue of the equations (28), all the terms in the new first rows will be severally zero except the first, so that (34) becomes

$$\left|\begin{array}{cccc} D_i^{(r)}\triangle_0^{(r)} - D_0^{(r)}\triangle_i^{(r)}, & 0, & 0 \ldots, & 0 \\ D_0^{(r)}, & D_1^{(r)}, & D_2^{(r)}, \ldots, & D_{n-1}^{(r)} \\ D_0', & D_1', & D_2', \ldots, & D_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(r-1)}, & D_1^{(r-1)}, & D_2^{(r-1)}, \ldots, & D_{n-1}^{(r-1)} \\ D_0^{(r+1)}, & D_1^{(r+1)}, & D_2^{(r+1)}, \ldots, & D_{n-1}^{(r+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_0^{(n-1)}, & D_1^{(n-1)}, & D_2^{(n-1)}, \ldots, & D_{n-1}^{(n-1)} \end{array}\right| = 0 \ldots (35)$$

or, by a known property of determinants, where all terms in a certain row or column, except one, are zero, and after transposition of the rows

$$(D_i^{(r)} \triangle_0^{(r)} - D_0^{(r)} \triangle_i^{(r)}) \cdot \begin{vmatrix} D_1', & D_2', & \ldots, & D_{n-1}' \\ D_1^{(2)}, & D_2^{(2)}, & \ldots, & D_{n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1^{(n-1)}, & D_2^{(n-1)}, & \ldots, & D_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Now we have to shew, that the n first integrals (30) satisfy the equations (36) by making their first factors all vanish, that is to say: the first integrals of (12) satisfy all the equations, which, for a certain value $i < n$, are obtained from the formula

$$D_i^{(r)} \triangle_0^{(r)} - D_0^{(r)} \triangle_i^{(r)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

by making successively $r = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

We may in fact write the equations (27) thus

$$\left.\begin{aligned} D_i^{(r)} \zeta_{0,n-1} + \triangle_i^{(r)} \zeta_{n-1,0}\, m_r &= 0 \\ D_i^{(r)} \zeta_{0,n-1}^{(r)} + \triangle_i^{(r)} \zeta_{n-1,0}\, m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

As m is the value of $\frac{dy}{dx}$ satisfying the equations (16), these equations (16), divided by dx and added, after the first has been multiplied by $-f'(\psi)$, will give

$$\xi + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}\, z_{n-\varrho,\varrho} + m\left[\eta + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}\, z_{n-1-\varrho,\varrho+1}\right] = 0,$$

an equation, that would have been immediately obtained by differentiating the equation $F = 0$ totally and afterwards putting m for $\frac{dy}{dx}$.

In the same manner the equation $F_r = 0$ gives a similar relation involving m_r. Now substituting in these equations the values of m and m_r from (38), we get the two equations:

$$D_i^{(r)} \zeta_{0,n-1}^{(r)} \left[\eta + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}\, z_{n-1-\varrho,\varrho+1}\right] - \triangle_i^{(r)} \zeta_{n-1,0}^{(r)} \left[\xi + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}\, z_{n-\varrho,\varrho}\right] = 0,$$

$$D_i^{(r)} \zeta_{0,n-1} \left[\eta^{(r)} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}^{(r)}\, z_{n-1-\varrho,\varrho+1}\right] - \triangle_i^{(r)} \zeta_{n-1,0} \left[\xi^{(r)} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \zeta_{n-1-\varrho,\varrho}^{(r)}\, z_{n-\varrho,\varrho}\right] = 0.$$

Subtracting the latter of these equations from the former, we get

$$D_i^{(r)} \triangle_0^{(r)} - D_0^{(r)} \triangle_i^{(r)} + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-2} D_i^{(r)} \triangle_{\varrho+1}^{(r)} z_{n-1-\varrho,\,\varrho+1} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \triangle_i^{(r)} D_\varrho^{(r)} z_{n-\varrho,\,\varrho} = 0 \ldots (39).$$

Changing in the first sum ϱ to $\varrho - 1$, the difference between the two sums in this equation will become

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \left[D_i^{(r)} \triangle_\varrho^{(r)} - D_\varrho^{(r)} \triangle_i^{(r)} \right] z_{n-\varrho,\,\varrho},$$

which is $= 0$ by equ. (28). The equations (39), therefore, become identical with (37). Thus

When there are n distinct first integrals to (12), *they will satisfy the conditions* (33), *which must be satisfied, in order that these integrals may render the equations* (15) *integrable.*

§. 6.

The remaining integrations and deriving of the primitive.

We suppose the equation (20) completely solved.

1) Assuming that this equation has not equal roots, if we can integrate the equations (21) and (23) for every one of these roots, we get n distinct first integrals, which give such values of the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order, as will render the equations

$$dz_{n-2-i,\,i} = z_{n-1-i,\,i}\, dx + z_{n-2-i,\,i+1}\, dy \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-2)) \ldots (40)$$

integrable. These equations being integrated, we take out the values of the differential coëfficients of z of the $(n-2)^{nd}$ order and substitute in the equations

$$dz_{n-3-i,\,i} = z_{n-2-i,\,i}\, dx + z_{n-3-i,\,i+1}\, dy \quad [i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-3)] \ldots (41),$$

after the integration of which we get expressions for the differential coëfficients of z of the $(n-3)^{rd}$ order and so on. Going on in this way, we will finally get $z_{1,0}$ and $z_{0,1}$ as functions of x, y and z. Substituting their expressions in the equation

$$dz = z_{1,0}\, dx + z_{0,1}\, dy,$$

we obtain by its integration the *general* solution of (12), as each of the first integrals involved one arbitrary function.

2) If, however, the equation (20) has equal roots, then we find a less number than n distinct first integrals. If from these integrals we can obtain some of the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order and after their substitution in some of the equations (40) integrate them and so go on similarly as in the former case, the solution of (12) will be dependent on the solution of another partial differential equation of an order lower by one or more units than the given equation. If this new equation be linear, we may anew apply the given method to integrate it; if it be not linear, the method of the §. 8 of this memoir must be used to obtain its solution, which will in that case usually be a complete or a mixed one.

If the equation (20) cannot be completely solved, but some of its roots are known, the same method, as in the latter case (when (20) has equal roots), must be applied.

Sometimes we may by artifices reduce the latter to the former case by taking instead of (12) a new equation, such that its equation (20) has no equal root, and at the same time such, that its roots become identical with the roots of the equation (20), belonging to (12), for certain values of some constants involved in the new assumed equation. In order then to obtain the general solution of (12) from that of the new equation, the method of limits is to be applied.

The equations (11), or those between (10) and (11), shew, that the φ and ψ, which belong to a certain first integral, are functions only of each other, if we consider all quantities, that they involve, except the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order, as constants; that is to say: if between $\varphi = \alpha$ and $\psi = \beta$ we eliminate any of these differential coëfficients, all the others will disappear at the same time. We may also express that property briefly thus: φ and ψ are functions of one and the same function of the differential coëfficients af z of the $(n-1)^{st}$ order and involve besides none of them in any other way. This diminishes the labour of solving the equation $\varphi = f(\psi)$ with respect to the function in question, which is necessary for obtaining the expressions for the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order; it deserves, however, attention, that in general it is impossible to solve the n first integrals with respect to these differential coëfficients, provided these diff. coëff. *really* are involved *both* in φ and ψ. But, in this case, we must seek the complete primitive of (12) and may then, if the functions φ really involve the diffe-

rential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order, make the arbitrary functions f arbitrary constants.

Ex. 1.

$$x^3 z_{3,0} + 3x^2 y z_{2,1} + 3xy^2 z_{1,2} + y^3 z_{0,3} + 2(x^2 z_{2,0} + 2xy z_{1,1} + y^2 z_{0,2}) = 0.$$

The equ. (20) has here all its roots $= \frac{y}{x}$; then (21) and (23) become.

$$dy - \frac{y}{x} dx = 0,$$

$$dz_{2,0} + 2\frac{y}{x} dz_{1,1} + \frac{y^2}{x^2} dz_{0,2} + 2\left(z_{2,0} + 2\frac{y}{x} z_{1,1} + \frac{y^2}{x^2} z_{0,2}\right)\frac{dx}{x} = 0,$$

whence by integration

$$\frac{y}{x} = \alpha, \quad x^2 z_{2,0} + 2xy z_{1,1} + y^2 z_{0,2} = \beta.$$

The given differential equation has, therefore, only one general first integral viz.:

$$x^2 z_{2,0} + 2xy z_{1,1} + y^2 z_{0,2} + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

f being an arbitrary function. Now integrating this equation by means of the equations (20), (21) and (23), we get the auxiliary system

$$dy - \frac{y}{x} dx = 0,$$

$$dz_{1,0} + \frac{y}{x} dz_{0,1} + f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = 0,$$

whence $\frac{y}{x} = \alpha_1$ and $z_{1,0} + \frac{y}{x} z_{0,1} = f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} + \beta_1$; thus the general second integral of the given equation will be

$$x z_{1,0} + y z_{0,1} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ being another arbitrary function. Applying again to this equation the foregoing theory (which now identically coincides with that of Lagrange for solving linear partial differential equations of the first order), we get the auxiliary system

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{f\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

whence the general solution of the given diff. equ. becomes

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right) lx + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

l designing a logarithm with the base e and ψ a third arbitrary function.

Ex. 2. The diff. equ. of ruled surfaces:

$$z_{3,0} + 3\omega z_{2,1} + 3\omega^2 z_{1,2} + \omega^3 z_{0,3} = 0,$$

where $$\omega = \frac{-z_{1,1} \pm \sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}}}{z_{0,2}}.$$

The roots of the equation (20) are here all $= \omega$; thus (21) and (23) give

$$dy - \omega dx = 0,$$

$$dz_{2,0} + 2\omega dz_{1,1} + \omega^2 dz_{0,2} = 0,$$

where we commence by integrating the latter equation.

This, if multiplied by $z_{1,1} \pm \sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}}$, becomes

$$(z_{1,1} \pm \sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}})\, dz_{2,0} - 2z_{2,0}\, dz_{1,1} - z_{2,0}\, \omega\, dz_{0,2} = 0.$$

Introducing ω as a new variable instead of $z_{1,1}$, we have

$$-z_{1,1} \pm \sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}} = \omega z_{0,2},$$

whence $$z_{1,1} \pm \sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}} = -\frac{z_{2,0}}{\omega},$$

and, by adding the latter to the former, we get

$$\pm 2\sqrt{z_{1,1}^2 - z_{2,0} z_{0,2}} = \omega z_{0,2} - \frac{z_{2,0}}{\omega},$$

and, by subtraction of the latter from the former,

$$-2z_{1,1} = \omega z_{0,2} + \frac{z_{2,0}}{\omega}.$$

This gives by differentiation

$$-2\, dz_{1,1} = \omega\, dz_{0,2} + z_{0,2}\, d\omega + \frac{1}{\omega} dz_{2,0} - \frac{z_{2,0}}{\omega^2} d\omega.$$

Substituting these expressions in the transformed auxiliary equation, it becomes $d\omega = 0$, whence $\omega = k$, that is

$$z_{2,0} + 2kz_{1,1} + k^2 z_{0,2} = 0.$$

The former of the auxiliary equations now gives

$$y - kx = \alpha.$$

Now by putting $k = f(\alpha)$ and eliminating k and α, we might obtain the general first integral. It will, however, be impossible to integrate, and, therefore, we must instead of the general first integral use the complete one. Therefore, supposing $f(\alpha)$ to be an arbitrary constant k, the complete first integral to be integrated becomes

$$z_{2,0} + 2kz_{1,1} + k^2 z_{0,2} = 0,$$

by the integration of which we get $z_{1,0} + kz_{0,1} = \psi(y - kx)$, and by a new integration the mixed primitive

$$z = \varphi(y - kx) + x\psi(y - kx).$$

Ex. 3. To exemplify the method of limits, that may be used, when (20) has equal roots, we take the simple equation $x^2 z_{2,0} + 2xyz_{1,1} + y^2 z_{0,2} = 0$, which, however, may more easily be integrated by the usual method of Monge. We here integrate the more general equation

$$x^2 z_{2,0} + x(2y+k)\, z_{1,1} + y(y+k)\, z_{0,2} = 0,$$

from which the given equation will be obtained by putting $k = 0$.

The equation (20) gives for the latter equation the roots $m_1 = \frac{y}{x}$ and $m_2 = \frac{y+k}{x}$. Hence the two first integrals will be

$$xz_{1,0} + (y+k)\, z_{0,1} = z + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$xz_{1,0} + yz_{0,1} = z + \psi\left(\frac{y+k}{x}\right).$$

Now eliminating $z_{1,0}$ and $z_{0,1}$ between these equations and

$$dz = z_{1,0}\, dx + z_{0,1}\, dy,$$

we get

$$k\, dz = kz\, \frac{dx}{x} + \left(\frac{y+k}{x}\, dx - dy\right) \psi\left(\frac{y+k}{x}\right) + \left(dy - \frac{y}{x}\, dx\right) \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

whence by integration

$$k\,\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + F\left(\frac{y+k}{x}\right),$$

f and F being arbitrary functions. Now putting $k\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - F\left(\frac{y}{x}\right)$ instead of $f\left(\frac{y}{x}\right)$ and applying Taylors theorem on $F\left(\frac{y+k}{x}\right)$, we get

$$k\,\frac{z}{x} = k\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{k}{x}\,F'\left(\frac{y}{x} + \vartheta\,\frac{k}{x}\right) \quad (0<\vartheta<1).$$

Now dividing by k and then putting $k = 0$, the general solution of the given equation becomes

$$z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ψ being put for F'.

Ex. 4. Before explaining the general theory of non-linear partial differential equations of the nth order, we will by a simple example shew, how the foregoing theory may be used to integrate such equations. Suppose we have

$$z_{1,0}\,z_{0,1} = f'(y),$$

f' being a given function. Differentiating partially with respect to x, we get

$$z_{2,0}\,z_{0,1} + z_{1,0}\,z_{1,1} = 0.$$

Applying to this equation, which is linear, the foregoing theory, the equation (20) gives the roots $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{z_{1,0}}{z_{0,1}}$. The former root reproduces the given equation (with an arbitrary function of y instead of f') and is, therefore, of no use; the latter reduces the equations (21) and (23) to

$$dy - \frac{z_{1,0}}{z_{0,1}}\,dx = 0 \text{ and } dz_{1,0} = 0.$$

The latter of these gives $z_{1,0} = \alpha$, which, in connection with the equation $dz = z_{1,0}\,dx + z_{0,1}\,dy$ (or, in this case, $dz = 2z_{1,0}\,dx$), gives

$$z = 2z_{1,0}\,x + \beta$$

as a complete first integral. This, in connection with the given equation, gives

$$z_{1,0} = \frac{z-\beta}{2x},\quad z_{0,1} = \frac{2x}{z-\beta}\,f'(y);$$

and, as these values are obtained from two distinct first integrals of the same partial diff. equ. of the second order, they will render the equation $dz = z_{1,0}\,dx + z_{0,1}\,dy$ integrable. Thus we get

$$dz = \frac{z-\beta}{2x}\,dx + \frac{2x}{z-\beta}\,f'(y)\,dy,$$

whence by integration

$$(z-\beta)^2 = 4x\,[f(y)+\gamma].$$

Another complete solution will be obtained by connecting directly $z_{1,0} = \alpha$ with the given equation, whence $z_{1,0} = \alpha$, $z_{0,1} = \frac{f'(y)}{\alpha}$; and, substituting these values, as before, in the equation $dz = z_{1,0}\,dx + z_{0,1}\,dy$, we get the new complete solution

$$z = \alpha x + \frac{1}{\alpha} f(y) + \delta.$$

We conclude this paragraphe by resuming the formulæ to be used in the integration of linear partial differential equations of the nth order.

Notation: $$z_{m,n} = \frac{\partial^{m+n} z}{dx^m dy^n}.$$

The differential equation being

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_i\, z_{n-i,\,i} = V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

form the equation

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i\, U_i\, m^{n-i} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

and solve it. For every distinct root m of this equation, calculate the corresponding system of W's from the equations

$$W_0 = U_0,\ W_i + W_{i-1}\, m = U_i \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)) \quad \ldots \quad (22)$$

and substitute these W's together with the same root m in the equations

$$dy - m\,dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} W_i\, dz_{n-1-i,\,i} = V dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Now, regarding (21) and (23) as simultaneous, seek their system of solution in the form $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$; *then the corresponding first inte-*

gral will be $\varphi = f(\psi)$, f *being an arbitrary function. In this as well as the following integrations the equations*

$$dz_{r-i,\,i} = z_{r-i+1,\,i}\,dx + z_{r-i,\,i+1}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots r$ *and* $r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1))$ *may be used to transform and simplify.*

§. 7.

On partial differential equations of the form (12), where the coëfficients U *and the right member* V *are functions of* x *and* y *only or constants.*

We shall here prove some properties of these equations, which have a remarkable affinity with those theorems, that hold for ordinary linear differential equations of the nth order.

Theorem I.

If u *be any particular solution of (12), then its general solution will be obtained by adding to* u *the general solution of (12), provided its second member be* $= 0$.

For putting $z = u + \zeta$, whence $z_{n-i,\,i} = u_{n-i,\,i} + \zeta_{n-i,\,i}$, the equation (12) becomes

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_i\,u_{n-i,\,i} + \sum_{i=0}^{i=n} U_i\,\zeta_{n-i,\,i} = V.$$

But

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_i\,u_{n-i,\,i} = V,$$

because u is a solution of (12), therefore ζ must satisfy the differential-equation

$$\sum_{i=0}^{i=n} U_i\,\zeta_{n-i,\,i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

Q. E. D.

Theorem II.

If $u', u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ *be solutions of (42), their sum will also be a solution of the same equation.*

For putting $z = \sum_{r=1}^{r=n} u^{(r)}$, whence $z_{n-i,i} = \sum_{r=1}^{r=n} u^{(r)}_{n-i,i}$, we get by substitution in (42)

$$\sum_{r=1}^{r=n}\Big[\sum_{i=0}^{i=n} U_i\, u^{(r)}_{n-i,i}\Big] = 0,$$

an equation, that is identically satisfied, as every sum within the brackets is 0.

In the following we suppose the coëfficients U to be constants and, for the sake of distinctness, we put C in their places; thus (12) becomes

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i\, z_{n-i,i} = V.$$

We will, however, previously treat the simpler equation

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i\, z_{n-i,i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

The auxiliary equation (20) becomes here

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i\, C_i\, m^{n-i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

and has constant roots, which we represent by $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Theorem III.

If m_r *be any root of (44),* $z = \varphi(y - m_r x)$ *is a solution of (43).*

For let $z = \varphi(y - m_r x)$, whence we have $z_{n-i,i} = (-1)^{n-i}\, m_r^{n-i}\, \varphi^{(n)}(y - m_r x)$, which, when multiplied by $(-1)^{-n} = (-1)^{2i-n}$, reduces the left member of (43) to

$$\varphi^{(n)}(y - m_r x) \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i\, C_i\, m_r^{n-i},$$

that is to 0, as m_r is a root of (44), and therefore the sum vanishes.

Corollary. Applying theorem II to the equation (43), we see, that $z = \sum_{r=1}^{r=n} \varphi_r (y - m_r x)$ also is a solution of it; and this solution is *general*, if the equ. (44) have no equal roots and all the arbitrary functions φ be independent of each other. That this is the very same general solution, that would be obtained by performing the integrations according to the foregoing general theory, is easily shewn. For here (21) and (23) are immediately integrable, as all the μ's are constants and give n first integrals that will be obtained from the equation:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} C_0 \mu_i^{(r)} z_{n-1-i,i} = \psi_r (y - m_r x)$$

by putting successively $r = 1, 2, \ldots, n$. Hence we get the differential coëfficients of z of the $(n-1)^{st}$ order as sums of the functions ψ multiplied by certain constants. Substituting these expressions in (15) and integrating, we get successively the differential coëfficients of z of the $(n-2)^{nd}$, $(n-3)^{rd}$, $\ldots$, 2nd and first order all as linear functions of such arbitrary functions; and, finally, substituting in $dz = z_{1,0}\, dx + z_{0,1}\, dy$ and integrating, z will also be expressed as a sum of n arbitrary distinct and independent functions. Q. E. D.

Theorem IV.

If a root m be repeated λ times in (44), then $z = \psi(y - mx)$, $z = x\psi_1(y - mx)$, $z = x^2\psi_2(y - mx)$, $\ldots\ldots$, $z = x^{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}(y - mx)$ are all solutions.

For writing the equation (44) briefly $f(m) = 0$, we get, by substituting $z = \psi(y - mx)$ in the left member of (43), the identity

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i \frac{\partial^n [\psi(y - mx)]}{dx^{n-i}\, dy^i} = (-1)^n \psi^{(n)}(y - mx) f(m) \quad \ldots \quad (45).$$

Differentiating partially with respect to m, changing the sign of every term and putting a new arbitrary function ψ_1 instead of ψ', we get the new identity

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i \frac{\partial^n [x\psi_1(y - mx)]}{dx^{n-i}\, dy^i} = (-1)^n [x\psi_1^{(n)}(y - mx) f'(m) - \psi_1^{(n-1)}(y - mx) f'(m)] \ldots (46).$$

Treating this identity in a similar way, we get

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i \frac{\partial^n [x^2 \psi_2(y - mx)]}{dx^{n-i}\, dy^i} = (-1)^n [x^2 \psi_2^{(n)} f(m) - 2x\psi_2^{(n-1)} f'(m) + \psi_2^{(n-2)} f''(m)] \ldots (47).$$

This process we may repeat as many times, as we please, and we see, that the exponent of that x, which multiplies the function ψ in the left member, determines the order of the highest derived function of $f(m)$, that occurrs.

Now, as the root m is repeated λ times in $f(m) = 0$, we have $f(m) = f'(m) = f''(m) \ldots = f^{(\lambda-1)}(m) = 0$, and, therefore, the right members in (45) and the equations, that are derived from it by the $(\lambda - 1)$ first differentiations with respect to m, will all vanish. These equations, therefore, shew that the equation (43) will be identically satisfied by every one of the expressions, that stand in the enunciation of the theorem.

Corollary. As we have obtained λ distinct solutions belonging to a root repeated λ times in (44), we can, also here, get n distinct solutions and, therefore, by theorem II the general solution of (43), even when (44) has equal roots. That general solution will be $z =$ a sum of n terms, presenting for every simple root m_r a term $\varphi_r(y - m_r x)$ and for every root m, repeated λ times, a sum of terms of the form

$$\psi(y - mx) + x\psi_1(y - mx) + x^2\psi_2(y - mx) + \ldots + x^{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}(y - mx).$$

These theorems are, of course, valid, also when (44) has imaginary roots, but then the solutions will involve functions of imaginary functions.

We now proceed to set forth some corollaries to theorem I, as far as it applies to the equation

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i z_{n-i,i} = V = F(x, y) \ldots\ldots (48),$$

shewing how to obtain a particular solution of this equation.

Corollary I. If $V = F(x)$, u may be considered as a function of x only; then the equation (48) becomes, when $z = u$,

$$C_0 u_{n,0} = F(x),$$

whence it follows, that we may put

$$u = \frac{1}{C_0} \int^n F(x)\, dx^n$$

$\int^n$ denoting n successive integrations with respect to x.

Corollary II. If $V = F_1(y)$, we may put $v = \frac{x^{u-r}}{\lfloor n-r} u$, if $C_r z_{n-r,r}$ be the last term, that does not vanish in the left member of (48) and u a function of y only. Substituting in (48), we easily obtain

$$C_r u_{0,r} = F_1(y),$$

whence

$$v = \frac{1}{C_r} \frac{x^{u-c}}{\lfloor n-r} \int^n F_1(y) dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Corollary III. If $V = F(x) + F_1(y)$, the general solution of (48) will be $z = u + v + \zeta$, u and v being any particular solutions of the equations

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_1 u_{n-i,i} = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i v_{n-i,i} = F_1(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

and ζ the general solution of (43). For putting $z = u + v + \zeta$, we get by means of (51) and (52)

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_i \zeta_{n-i,i} = 0,$$

which proves our assertion. According to the corollaries I and II we may, therefore, use the u and v of (49) and (50).

Corollary IV. If some terms be missing at the beginning and the end of the left member of (48), this equation is immediately integrable several times and will thus be reduced to a new equation of the form (48) but of a lower order.

If, for instance, the equation (48) be

$$\sum_{i=r}^{i=n-\varrho} C_i z_{n-i,i} = F(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53),$$

where r and ϱ are integers $< n$ and $n - \varrho > r$. Integrating (53) ϱ times with respect to x, we get without difficulty

$$\sum_{i=r}^{i=n-\varrho} C_i z_{n-i-\varrho,i} = \int^{\varrho} F(x,y) dx^{\varrho} + \sum_{i=0}^{i=\varrho-1} x^{\varrho-i-1} \varphi_i(y) = F_1(x,y) \text{ say};$$

and this being integrated r times with respect to y gives

$$\sum_{i=r}^{i=n-\varrho} C_i z_{n-\varrho-i,i-r} = \int^r F_1(x,y)\,dy^r + \sum_{i=0}^{i=r-1} y^{r-i-1}\,\psi_i(x)\ ,$$

where it is to be observed, that $\int \varphi_i(y)\,dy$ is itself an arbitrary function as well as $\varphi_i(y)$ and, therefore, may simply be changed into $\chi_i(y)$.

The last equation may evidently be written

$$\sum_{i=0}^{i=n-\varrho-r} C_{i+r} z_{n-\varrho-r-i,i} = F_2(x,y),$$

the accordance in form with (48) is evident.

We might also have transformed (53) by putting $z_{\varrho,r} = z'$, whence $z_{n-i,i} = z'_{n-\varrho-i,i-r}$;
this equation would then have assumed the form

$$\sum_{i=r}^{i=n-\varrho} C_i\, z'_{n-\varrho-i,i-r} = F(x,y)$$

or

$$\sum_{i=0}^{i=n-\varrho-r} C_{i+r}\, z'_{n-\varrho-r-i,i} = F(x,y)\,.$$

Now if the general solution of the last equation be found, and we suppose it be $z' = \varphi(x,y)$, we have only to seek the general solution from the equation

$$z_{\varrho,r} = \varphi(x,y)$$

which is immediately integrable.

Corollary V. If $V = F(x,y)$ be a rational integral polynome, we may, by its differentiation with respect to one or both of the independent variables, form a new linear differential equation with constant coëfficients and with a right member either zero or of one of the forms considered in foregoing corollaries. After the integration of this new equation its solution must be so restricted, that it satisfies the given equation. Of the new equation we must, of course, use the *general* solution, in order to be sure, that the general solution of it may contain the general solution of the given equation as a special case.

The following examples will fully illustrate this method.

Ex. 1. $$z_{2,0} - 4z_{0,2} = x^2y\,.$$

Differentiating this equ. three times with respect to x, we get

$$z_{5,0} - 4\,z_{3,2} = 0\,,$$

the general solution of which is

$$z = \varphi(y) + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \psi(y-2x) + \psi_1(y+2x)\,.$$

As the two last terms by the theorems I and III also belong to the general solution of the given equation, it is only the functions φ, φ_1 and φ_2 that have to be determined by the condition, that the given equation must be satisfied. This condition will be fulfilled, if

$$\varphi_2(y) - 2\varphi''(y) = 0\,, \quad \varphi_1''(y) = 0\,, \quad 4\varphi_2''(y) = -y\,;$$

we may, therefore, put

$$\varphi_2(y) = -\frac{y^3}{24}\,, \quad \varphi_1(y) = 0 \quad \text{and} \quad \varphi(y) = -\frac{y^5}{960}\,.$$

Hence the general solution of the given equation will be

$$z = -\frac{y^5}{960} - \frac{x^2y^3}{24} + \psi(y-2x) + \psi_1(y+2x)\,.$$

If the given equation had been differentiated twice with respect to y, it would have given

$$z_{2,2} - 4z_{0,4} = 0\,.$$

Now putting $z_{0,2} = z'$, we get

$$z'_{2,0} - 4z'_{0,2} = 0\,,$$

the solution of which is

$$z' = \varphi(y-2x) + \psi(y+2x)$$

or

$$z_{0,2} = \varphi(y-2x) + \psi(y+2x)\,,$$

and, if this last be integrated twice with respect to y, it gives

$$z = \chi(x) + y\chi_1(x) + \varphi_1(y-2x) + \psi_1(y+2x)\,.$$

Determining here χ and χ_1 by substitution in the given equation, its general solution becomes

$$z = \frac{x^4y}{12} + \varphi_1(y-2x) + \psi_1(y+2x)\,,$$

which is somewhat simpler than that before given.

Ex. 2. $z_{2,1} - 2z_{1,2} + z_{0,3} = a + bx + cy$.

Integrating this with respect to y, it gives

$$z_{2,0} - 2z_{1,1} + z_{0,2} = ay + bxy + \frac{cy^2}{2} + \varphi''(x),$$

φ'' representing an arbitrary function. Differentiating with respect to x, we get

$$z_{3,0} - 2z_{2,1} + z_{1,2} = by + \varphi'''(x),$$

the general solution of which is

$$z = \varphi(x) + \frac{bxy^3}{6} + \varphi_1(y) + \psi(y+x) + x\chi(y+x).$$

Now determining $\varphi_1(y)$ so, that the given equation may be satisfied, its general solution becomes

$$z = \varphi(x) + (a+bx)\frac{y^3}{6} + (2b+c)\frac{y^4}{24} + \psi(y+x) + x\chi(y+x).$$

B) TO INTEGRATE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, WHICH ARE NOT LINEAR WITH RESPECT TO THE DIFFERENTIAL COËFFICIENTS OF THE HIGHEST ORDER.

§. 8.

In §. 6 we have briefly exemplified, how the foregoing theory of linear equations may be used also to integrate those, that are not linear. We shall now deduce the general formulæ, that are to be used for the integration of non-linear partial differential equations of the nth order with one dependent and two independent variables, and also shew, how these formulæ in special cases coincide with known auxiliary systems.

The result of the differentiation with respect to x and y of the equation

$$F(x, y, z, z_{1,0}, z_{0,1}, \ldots, z_{n,0}, z_{n-1,1}, \ldots, z_{0,n}) = 0 \quad . \quad . \quad (54)$$

may be written

$$\xi + \sum_{i=0}^{i=n} \zeta_{n-i,i}\, z_{n-i+1,i} = 0\,,$$

$$\eta + \sum_{i=0}^{i=n} \zeta_{n-i,i}\, z_{n-i,i+1} = 0\,,$$

the same notation being used as in §. 5.

Multiplying these equations by α and β respectively and adding, we get

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, \zeta_{n,0}\, z_{n+1,0} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\alpha\, \zeta_{n-i-1,i+1} + \beta\, \zeta_{n-i,i}\right] z_{n-i,i+1} + \\ + \beta\, \zeta_{0,n}\, z_{0,n+1} + \alpha\xi + \beta\eta = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (55)\,,$$

which is linear with respect to the differential coëfficients of z of the highest order. To integrate this equation, we have by § 3 the auxiliary equations

$$\alpha\, \zeta_{n,0}\, m^{n+1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^{i+1} \left[\alpha\, \zeta_{n-i-1,i+1} + \beta \zeta_{n-i,i}\right] m^{n-i} + (-1)^{n+1}\, \beta \zeta_{0,n} = 0 \ldots (56)\,,$$

$$dy - m\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)\,,$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} W_i\, dz_{n-i,i} + (\alpha\xi + \beta\eta)\, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)\,,$$

the coëfficients W satisfying the conditions

$$W_n = \frac{\beta \zeta_{0,n}}{m}\,,\quad W_r = \sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i \left[\alpha\, \zeta_{n-r+i,r-i} + \beta \zeta_{n-r+i+1,r-i-1}\right] m^i \quad *)$$

and $$W_0 = \alpha\, \zeta_{n,0}\,.$$

The equation (56) may evidently be written

$$(\alpha m - \beta) \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i\, \zeta_{n-i,i}\, m^{n-i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)\,.$$

The root $m = \frac{\beta}{\alpha}$ of this equation gives

$$W_i = \alpha\, \zeta_{n-i,i} \quad (i = 0\,,1\,,2\,,\ \ldots\ n)\,,$$

*) As soon as either of the indices of ζ becomes $= 0$, the ζ, to which that index belongs, must be regarded as vanishing.

and then the equation (58) becomes

$$\alpha\left[\xi\,dx+\eta\,dy+\sum_{i=0}^{i=n}\zeta_{n-i,i}\,dz_{n-i,i}\right]=0\,,$$

because by (57) $\beta\,dx=\alpha\,dy$. This case of (58) is evidently the result of the total differentiation of (54). The root $\frac{\beta}{\alpha}$, therefore, must be rejected, because it only reproduces the given differential equation with an arbitrary constant instead of its right member, 0; and accordingly the solution of (54) is to be obtained by means of the auxiliary system (57), (58) and

$$\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\,\zeta_{n-i,i}\;m^{n-i}=0\quad\ldots\ldots\quad(60)\,,$$

from which we finally choose two systems, produced by putting alternately $\beta=0$ and $\alpha=0$. These two systems then will belong to the two equations between (54) and (55). These auxiliary equations may, if desirable, be simplified by the equations

$$dz_{r-i,i}=z_{r-i+1,i}\;dx+z_{r-i,i+1}\;dy\quad\ldots\ldots\quad(61)$$

$$(i=0,1,2,\ldots,r\text{ and }r=0,1,2,\ldots,n-1)\,.$$

This is the general method to integrate partial differential equations of the nth order with one dependent and two independent variables, and may, of course, be applied as well to linear as to non-linear equations. We proceed to shew some special cases of it.

1) *The method of Charpit* to integrate the equation

$$F(x.\,y,z,\,z_{1.0}\,,\,z_{0.1})=0\quad\ldots\ldots\quad(62)\,.$$

The equation (60) becomes here $\zeta_{1.0}\;m-\zeta_{0.1}=0$, whence (57) becomes

$$\frac{dx}{\zeta_{1.0}}=\frac{dy}{\zeta_{0.1}}\,.$$

We have further $W_0=\alpha\,\zeta_{1.0}$, $W_1=\beta\,\zeta_{1.0}$, in consequence of which (58) assumes the form

$$\frac{\alpha\,dz_{1.0}+\beta\,dz_{0.1}}{\alpha\xi+\beta\eta}=-\frac{dx}{\zeta_{1.0}}\,.$$

Now putting here alternately $\beta=0$ and $\alpha=0$, we get the system

$$\frac{dx}{-\zeta_{1,0}} = \frac{dy}{-\zeta_{0,1}} = \frac{dz}{-(\zeta_{1,0}z_{1,0}+\zeta_{0,1}z_{0,1})} = \frac{dz_{1,0}}{\xi} = \frac{dz_{0,1}}{\eta}$$

or, according the usual notation,

$$\frac{dx}{-\frac{\partial F}{dp}} = \frac{dy}{-\frac{\partial F}{dq}} = \frac{dz}{-\left(p\frac{\partial F}{dp}+q\frac{\partial F}{dq}\right)} = \frac{dp}{\frac{\partial F}{dx}+p\frac{\partial F}{dz}} = \frac{dq}{\frac{\partial F}{dy}+q\frac{\partial F}{dz}},$$

which is the auxiliary system of Charpit in its symmetrical form.

2) *Auxiliary system of the differential equation of the second order:*

$$F(x, y, z, z_{1,0}, z_{0,1}, z_{2,0}, z_{1,1}, z_{0,2}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Here the equation (60) assumes the form

$$\zeta_{2,0}\,m^2 - \zeta_{1,1}\,m + \zeta_{0,2} = 0,$$

whence

$$m = \frac{\zeta_{1,1} \pm \sqrt{\zeta_{1,1}^2 - 4\zeta_{2,0}\,\zeta_{0,2}}}{2\zeta_{2,0}}.$$

By means of this value of m we get

$$W_0 = \alpha\zeta_{2,0},\quad W_1 = \alpha\zeta_{1,1}+\beta\zeta_{2,0}-m\alpha\zeta_{2,0} = \beta\zeta_{2,0}+\alpha\frac{\zeta_{1,1}\mp\sqrt{\zeta_{1,1}^2-4\zeta_{2,0}\zeta_{0,2}}}{2},$$

$$W_2 = \frac{\beta\zeta_{0,2}}{m} = \beta\frac{\zeta_{1,1}\mp\sqrt{\zeta_{1,1}^2-4\zeta_{2,0}\zeta_{0,2}}}{2}.$$

Now m having one of the above values, let μ denote the other; then these equations may be written

$$W_0 = \alpha\zeta_{2,0},\quad W_1 = \zeta_{2,0}(\beta+\alpha m),\quad W_2 = \beta m\zeta_{2,0},$$

and the equation (58) becomes

$$\zeta_{2,0}\left[a\,dz_{2,0} + (\beta+\alpha m)\,dz_{1,1} + \beta m\,dz_{0,2}\right] + (\alpha\xi+\beta\eta)\,dx = 0.$$

The auxiliary system of (64) is, therefore, transformed into

$$dy - m\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{2,0}(dz_{2,0}+\mu\,dz_{1,1})+\xi\,dx = 0,\\ \zeta_{2,0}(dz_{1,1}+\mu\,dz_{0,2})+\eta\,dy = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

together with what (61) becomes on, when n is put $= 2$. Here m and μ are the two roots of the equation

$$\zeta_{2,0}\, m^2 - \zeta_{1,1}\, m + \zeta_{0,2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67);$$

and, as either of these roots may be used as the value of m, the other being that of μ, there will be *two* auxiliary systems. Now one integral of each of these systems together with the given equation will in general give the values of $z_{2,0}$, $z_{1,1}$ and $z_{0,2}$, and these values are then to be substituted in

$$dz_{1,0} = z_{2,0}\, dx + z_{1,1}\, dy\,, \quad dz_{0,1} = z_{1,1}\, dx + z_{0,2}\, dy\,,$$

after the integration of which we get expressions for $z_{1,0}$ and $z_{0,1}$, that render the equation $dz = z_{1,0}\, dx + z_{0,1}\, dy$ integrable. This it is easy to see, because, independently of the values of α and β, we get, when the roots of (59) are all unequal, $(n+1)$ distinct first integrals of the *linear* equation (55), that render the equations (61) integrable, and among these first integrals there will be one $\left(\text{belonging to the root } m = \frac{\beta}{\alpha}\right)$, which is a relation involving (54) as a special case, viz

$$F(x,\ y,\ z,\ z_{1,0},\ z_{0,1},\ \ldots,\ z_{n,0},\ \ldots,\ z_{0,n}) = A\,,$$

A being an arbitrary constant. Putting then $A = 0$, the operation is restricted to the investigation of a (complete) primitive of the given equation (54), instead of solving the more general problem to seek a primitive of (55). The arbitrary quantities α and β may, of course, be determined in the manner before mentioned.

If (64) be linear with respect to the differential coëfficients of z of the second order, we may from (61) and (65) get an auxiliary system, that does not involve these differential coefficients, because $\zeta_{2,0}$, $\zeta_{1,1}$ and $\zeta_{0,2}$ are then independent of them. Thus if (64) be

$$Rr + Ss + Tt - V = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68),$$

where $r = z_{2,0}$, $s = z_{1,1}$, $t = z_{0,2}$, (67) becomes

$$Rm^2 - Sm + T = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69),$$

whence $$m + \mu = \frac{S}{R},\ m\mu = \frac{T}{R}.$$

Now putting $z_{1,0} = p$, $z_{0,1} = q$, we have

$$dp = rdx + sdy \quad \text{and} \quad dq = sdx + tdy \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

whence $$\frac{dp + \mu dq}{dx} = r + s(m + \mu) + tm\mu =$$

$$= r + \frac{Ss}{R} + \frac{Tt}{R} = \frac{V}{R},$$

since by (65) $\frac{dy}{dx} = m$. Thus the auxiliary system of (68) consists of the equations $dz = pdx + qdy$, (70), (69), (65) and

$$R(dp + \mu dq) = Vdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

that is: of the system of Monge.

The equation of Ampère

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

may also be integrated by means of the auxiliary system of (64).

The eqvation (67) here becomes

$$(H + Nt)m^2 - 2(K - Ns)m + L + Nr = 0,$$

whence by means of (72)

$$m = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt}.$$

Putting $$G = K^2 - HL + MN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

and using (65), this equation becomes

$$Hdy + N(sdx + tdy) - (K \pm \sqrt{G})dx = 0$$

or $$Hdy + Ndq - (K \pm \sqrt{G})dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74).$$

Solving one of the equations between (72) and (73) with respect to $\frac{1}{m}$ and applying (65), we get

$$\frac{dx}{dy} = \frac{K - Ns \mp \sqrt{G}}{L + Nr},$$

whence $$Ldx + N(rdx + sdy) - (K \mp \sqrt{G})dy = 0$$

or $$Ldx + Ndp - (K \mp \sqrt{G})dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

or, if dy be eliminated by means of (74),

$$Hdp + (K \mp \sqrt{G})\, dq + Mdx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Now (74), joined with either (75) or (76), constitutes the usual auxiliary system of the equation of Ampère.

If $N = 0$, (74) and (76), of course, reproduce the Mongean auxiliary system.

3) *The equation of the third order:*

$$Az_{3,0} + Bz_{2,1} + Cz_{1,2} + L(z_{2,1}^2 - z_{3,0} z_{1,2}) - U = 0 \ldots (77)$$

gives

$$(A - Lz_{1,2})\, m^3 - (B + 2Lz_{2,1})\, m^2 + (C - Lz_{3,0})\, m = 0,$$

whence $m_1 = 0$ and m_2 and m_3 are given from

$$m = \frac{B + 2Lz_{2,1} \pm \sqrt{G}}{2(A - Lz_{1,2})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78),$$

putting $$G = B^2 - 4AC + 4LU.$$

From (78) we get

$$\frac{1}{m} = \frac{B + 2Lz_{2,1} \mp \sqrt{G}}{2(C - Lz_{3,0})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79).$$

Now the equations (78) and (79) easily give the auxiliary equations

$$\left.\begin{aligned} Ady - Ldz_{1,1} &= \frac{B \pm \sqrt{G}}{2}\, dx, \\ Cdx - Ldz_{2,0} &= \frac{B \mp \sqrt{G}}{2}\, dy \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80).$$

This system is incomplete, because the root $m = 0$ has been omitted. That it also only gives particular integrals, it may be enough to shew in a special case. Let, namely, B and C be both 0; then the equation (77) becomes simply

$$Az_{3,0} + L(z_{2,1}^2 - z_{3,0} z_{1,2}) - U = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81),$$

and its auxiliary system is

$$Ady - Ldz_{1,1} = \pm \sqrt{L\bar{U}}.dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82),$$

$$Ldz_{2,0} = \pm \sqrt{L\bar{U}}.dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83),$$

and, supposing the coëfficients to be constant, we get from these equations

$$Ay - Lz_{1,1} = \pm\sqrt{LU}.x + \gamma,\ Lz_{2,0} = \pm\sqrt{LU}.y + \delta.$$

Now taking out the values of $z_{2,0}$ and $z_{1,1}$ and substituting in $dz_{1,0} = z_{2,0}dx + z_{1,1}dy$, this equation will become integrable, if these values be taken the one for the upper and the other for the lower sign of the surd. Therefore these values will satisfy the equations

$$Ay - Lz_{1,1} = \pm\sqrt{LU}.x + \gamma$$

and

$$Lz_{2,0} = \mp\sqrt{LU}.y + \delta.$$

Now multiplying these equations by $-dy$ and dx respectively and adding, we get

$$Lz_{1,0} = \mp xy\sqrt{LU} + A\frac{y^2}{2} + \delta x - \gamma y + \varepsilon,$$

whence by integration with respect to x

$$Lz = \mp\frac{x^2y}{2}\sqrt{LU} + A\frac{xy^2}{2} + \delta\frac{x^2}{2} - \gamma xy + \varepsilon x + \varphi(y),$$

φ being an arbitrary function. That this mixed solution is particular, is shewn by § 1.

We do not suppose, that we have here overcome all the difficulties, which exist in the delicate problem of obtaining a theory of partial differential equations of the form treated in this memoir. As to our method of deduction, it is essentially the same as that, which *Boole* in his *Treatise on differential equations* applies to Monge's linear partial differential equation of the second order:

$$Rr + Ss + Tt = V.$$

We hope in a future memoir to extend the theory, now given, to any number of independent variables.

DES RELATIONS DE L'AURORE BORÉALE

ET DES PERTURBATIONS MAGNÉTIQUES

AVEC

LES PHÉNOMÈNES MÉTÉOROLOGIQUES.

PAR

L.-A. FORSSMAN.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 21 Octobre 1871).

UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1872.

La connaissance que nous possédons actuellement du magnétisme terrestre et des phénomènes atmosphériques, est le résultat d'études inaugurées depuis longtemps par des savants distingués, et poursuivies avec persévérance jusqu'à ce jour. Des observatoires spécialement établis sur plusieurs points du globe pour l'étude du magnétisme terrestre et de la météorologie, ont fourni des données assez nombreuses et assez sûres pour servir de base à des recherches scientifiques. Dans l'établissement des institutions précitées, on ne s'est pas toujours, il est vrai, proposé, dès le principe, de trouver des relations entre ces deux catégories de phénomènes, ni de chercher à les expliquer l'une par l'autre [1]); mais, toutes les deux exigeant des observations continues et identiques à plusieurs égards, il était naturellement plus avantageux de les réunir dans un local commun. L'incertitude dans laquelle on a longtemps été sur la question de savoir si elles sont ou ne sont pas étrangères l'une à l'autre, vient sans nul doute de ce que l'on n'a commencé que tout récemment à employer les méthodes au moyen desquelles on peut espérer que la question trouvera enfin sa solution. Ces méthodes consistent à combiner entre elles des observations exécutées sur des points différents de la surface terrestre. Appliquées à l'étude des variations magnétiques, elles en ont démontré depuis plusieurs dizaines d'années la simultanéité à de très-grandes distances. Employées, d'autre part, depuis ces dernières années seulement, dans la météorologie, on leur doit les principales découvertes faites dans cette science. En effet, une vaste étude comparative n'a été rendue possible que du moment où, grâce à une meilleure rédaction des publica-

[1]) Le fait suivant prouve cependant que l'on a cherché parfois à atteindre ce but: "It was the supposed analogy between magnetism and atmospherical disturbances, which led in the commencement of the British colonial observations to the *simultaneous* observation and record of these two great, and as we have now reason to believe, distinct branches of natural phenomena", etc. SABINE: *Obs. made at the Magn. and Met. Obs. at Toronto in Canada*, Vol. III, p. CXXV.

tions météorologiques, on a pu se former, pour une foule de cas spéciaux, une idée exacte de l'état général et des mouvements de l'atmosphère.

Quoiqu'il soit donc bien clair qu'un observateur, réduit aux observations faites sur un seul point, n'ait pu, même avec une longue expérience, expliquer le rapport entre les phénomènes en question, beaucoup, cependant, ont émis l'opinion que ce rapport existe réellement. Comme, toutefois, la question se trouve encore dans un état rudimentaire, nous avons cru devoir faire précéder la relation de nos recherches d'un exposé des raisons qui nous ont fait admettre la possibilité des rapports cherchés.

I.

DE L'AURORE BORÉALE ET DES PERTURBATIONS MAGNÉTIQUES.

Dans les variations magnétiques, on distingue, comme personne ne l'ignore, entre les variations régulières et les irrégulières. Les premières sont à la fois séculaires, annuelles et diurnes, et présentent de la sorte, dans leur périodicité annuelle et diurne, une analogie avec les variations atmosphériques. Il est possible de montrer des correspondances même dans les périodes spéciales. En effet, les éléments magnétiques ont deux maxima et deux minima diurnes, tout aussi bien que la pression atmosphérique, et, en général, les amplitudes des variations diurnes augmentent ou diminuent également avec les saisons, de sorte que, quand les variations météorologiques diurnes sont les plus grandes, les éléments magnétiques présentent aussi les plus grandes oscillations autour de leurs valeurs moyennes. Plusieurs autres analogies pourraient encore être énumérées. Elles ne fournissent toutefois pas en elles-mêmes de preuves suffisantes, aussi longtemps que l'on n'en pourra démontrer la cause et l'origine.

Les variations irrégulières, lesquelles suivent aussi certaines lois, ont été mises en relation avec divers autres phénomènes. C'est, p. ex., un fait connu et constaté de longue date, que les aurores boréales intenses sont toujours accompagnées de perturbations magnétiques ou d'un dérangement de l'équilibre des forces magnétiques, dont les manifestations les plus fortes ont reçu de Humboldt la dénomination d'orages magnétiques. L'étude de ces phénomènes sera donc, à certains égards, la même que l'étude de l'aurore boréale, laquelle constitue ainsi un point de départ naturel, dès qu'il s'agit de chercher une relation entre les phénomènes magnétiques et

météorologiques. Nous croyons donc nécessaire de donner un exposé succinct des principaux résultats auxquels a conduit cette étude.

Peu de matières ont été soumises à une si vaste discussion et à un si grand nombre d'hypothèses que la question de la nature de l'aurore boréale, et riche est la littérature qui, depuis une époque relativement ancienne, jusqu'à nos jours, s'est occupée de l'explication de ce phénomène [1]). Deux courants d'opinion ont lutté pour la suprématie, opposés en ceci, que l'un a placé la cause du phénomène en dehors de la terre et l'autre sur notre planète même. On peut citer, comme représentants de l'opinion cosmique, MAIRAN [2]) et DALTON. Suivant le premier, l'aurore boréale consistait en une conflagration de l'atmosphère solaire, laquelle se mêlait en tombant avec l'atmosphère terrestre. Des opinions identiques sur une origine étrangère à notre globe et analogue à celle des étoiles filantes et des aérolithes, ont été soutenues même par des auteurs plus récents, tels que THOMPSON [3]), BIOT [4]), BÉCQUEREL [5]) et OLMSTED [6]). Du moment, toutefois, où les propriétés magnétiques et électriques de l'aurore boréale ont été plus connues, ces opinions ont dû céder toujours davantage le pas à une théorie fondée sur les propriétés en question, et dont les points fondamentaux, tels qu'ils se retrouvent chez son fondateur et son défenseur le plus zêlé, M. DE LA RIVE [7]), sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les signaler ici plus en détail. Nous dirons seulement que, suivant cet auteur, l'aurore boréale est la lumière d'une décharge électrique ayant lieu dans les régions polaires, entre l'électricité positive de l'atmosphère et l'électricité négative de la terre; qu'elle a la forme d'un anneau lumineux à diamètre variable, avec le pôle magnétique pour centre; et que la source de l'électricité positive de l'atmosphère est constituée par l'évaporation qui se produit à la surface de la mer, principalement dans les régions tropicales. Nous rappellerons en dernier lieu les expériences faites par le savant physicien dans le but de fournir la preuve scientifique de son opinion.

---

[1]) Voir: BOUÉ, *Chronologischer Katalog der Nordlichter bis zum Jahre 1856, sammt eine Bibliographie über diese Erscheinung.* Wien, 1856.

[2]) *Traité sur l'aurore boréale.* Paris 1754.

[3]) *Ann. of Philosophy*, 1814, T. 4, p. 434.

[4]) GILB. *Ann.* 1821, T. 67.

[5]) *Traité de l'électricité et du magnétisme.* 1840, T. 6, p. 215—216.

[6]) *Fortschritte der Physik.* 1853, TT. 6 et 7, p. 873.

[7]) *Traité de l'électricité*, T. III, p. 280 et ss.

Suivant cette théorie, qui doit être considérée comme la plus probable, l'aurore boréale, est, à proprement parler, un phénomène atmosphérique, dont la dépendance de forces extra-telluriennes est d'une nature exclusivement secondaire; quant aux faits qui semblent fournir un appui à une opinion plus cosmique, tels que la dépendance de sa fréquence de la déclinaison et de l'angle horaire du soleil, du nombre des taches solaires, etc., ils peuvent certainement être expliqués sans qu'il soit nécessaire d'admettre une action *directe* du soleil ou d'autres corps célestes.

On peut considérer comme l'un des données les plus importantes sur la nature de l'aurore boréale, l'analyse de sa lumière faite en premier lieu par M. le professeur ÅNGSTRÖM [1]), analyse montrant que l'aurore boréale donne un spectre composé d'une ligne jaune à intensité très-grande, et de quelques bandes plus faibles. Deux circonstances rendent principalement cette découverte très-remarquable: la première, c'est que la ligne caractéristique du spectre de l'aurore boréale ne coïncide avec aucune des lignes observées jusqu'ici dans les gaz simples ou composés; la seconde, c'est que, suivant M. ÅNGSTRÖM, la même ligne a été observée dans la lumière zodiacale. Aucune déduction relative à la nature de l'aurore boréale n'a encore été tirée de ces faits. Les lignes brillantes indiquent, d'un côté, que la source lumineuse est un gaz incandescent, ce qui reporte la pensée sur la décharge électrique, comme la cause de l'augmentation de la température dans les couches supérieures de l'air, tandis que, d'un autre côté, la situation de la ligne et sa présence dans le spectre de la lumière zodiacal éveillent l'idée d'un rapport avec une source cosmique.

Comme il importe pour l'appréciation des rapports entre les phénomènes magnétiques el météorologiques, de connaître certaines propriétés de l'aurore boréale, nous allons donner un exposé succinct de quelques-unes d'entre elles, à la fois les mieux constatées et les plus propres à éclaircir la question qui nous occupe.

1. **Extension géographique** [2]). L'aurore boréale est le plus souvent visible dans les latitudes élevées, et elle est presque inconnue entre les tropiques. Une carte polaire destinée à illustrer graphiquement sa fréquence, montre que la région proprement dite de l'aurore boréale, est une zône de forme ovale englobant le pôle nord, zône dont la ligne moyenne coupe le

[1]) Recherches sur le spectre solaire, par A.-J. ÅNGSTRÖM, Upsal 1868, p. 41.

[2]) Partout où aucune autre autorité n'est expressément nommée, nous avons suivi, dans l'exposé qu'on va lire, l'excellent travail de M. LOOMIS, basé sur de vastes matériaux: "The aurora borealis, or polar light: its phenomena and laws". Smithsonian Report, 1865.

méridien de Washington sous le 56ème et celui de Saint-Pétersbourg sous le 77ème degré de latitude. La largeur de cette zône est d'environ 10°, et la moyenne annuelle des aurores boréales qui y sont visibles, s'élève à 80. Tant au nord qu'au sud de cette zône, la fréquence du phénomène diminue [1]), donnant une moyenne annuelle de 40 aurores boréales jusqu'au 60ème degré sur le continent américain. La forme de la zône présente au reste, avec les lignes isocliniques, une ressemblance bien propre à éveiller l'idée d'un rapport réel entre les deux phénomènes. On a conclu des observations connues jusqu'ici: que la fréquence des aurores boréales est presque aussi grande dans l'hémisphère austral que dans le septentrional; qu'il existe dans tous les deux une parfaite analogie relativement à leur distribution; que ce phénomène est souvent simultané dans les deux hémisphères, ce qui est toujours le cas quand il s'agit d'aurores d'une grande intensité.

2. **Périodicité.** Quoique l'aurore boréale soit visible à toutes les heures de la nuit, des observations nombreuses ont toutefois démontré l'existence d'une période diurne, dont le maximum se présente dans nos régions à 2 ou 3 heures avant minuit [2]). La différence dans la fréquence suivant les saisons et les mois, forme une période annuelle avec deux maxima aux équinoxes et deux minima aux solstices. Cette périodicité a été pleinement constatée par de longues séries d'observations exécutées dans des localités très-distantes, ce qu'on ne peut guère affirmer à l'égard de la variation séculaire, dans laquelle on a cru pouvoir distinguer deux périodes, l'une de dix ans et l'autre de soixante ans, de sorte que chaque période décennale présenterait un maximum, et chaque sixième période décennale un *maximum maximorum*.

3. **Hauteur.** Comme, pour la décision de la question si combattue de la nature de l'aurore boréale, il doit être important de connaître la hau-

[1]) Comme le montre la citation suivante, ce fait a été constaté dans la dernière expédition suédoise au pôle nord: "Cette intéressante particularité est aussi corroborée par les observations faites pendant l'expédition. Car, au Spitsberg, on apercevait toujours la lumière polaire au sud, tandis que, sous une latitude plus méridionale (69°), elle se montrait soit aux environs du zénith, soit au nord." K. S. Lemström: Observations sur l'electricité de l'air et sur la lumière polaire pendant l'expédition suédoise de 1868 au pôle nord. Öfvers. af Kongl. Vet. Akad. Förh. 1869, N:o 7.

[2]) Dans les régions du nord, le maximum de la fréquence journalière paraît arriver plus tard que dans celles du sud, comme il appert d'un tableau dressé d'après des observations faites au Canada, savoir: dans cette contrée, à 43 ½° de latitude; à Calton Fort, 50° 51′ id; à Atabaska, 58° 43′ id; à Point Barrow, 71° 21′ id. (Voir le Tableau, p. 223, Smiths Rep. 1865).

teur dans l'atmosphère ou en dehors de l'atmosphère, où se passe le phénomène, cette question a été l'objet de recherches suivies. Des formules ont été données [1]), pour calculer par la hauteur de l'arc auroral au-dessus de l'horizon et par l'azimuth de ses points terminaux, sa distance de la surface de la terre, distance que l'on a aussi essayé de déterminer en observant simultanément la hauteur de l'arc à deux stations distantes. Quoique ces mesures aient donné des résultats très-différents, il est toutefois permis d'en conclure qu'en général l'aurore boréale paraît s'élever à environ 160 kilomètres au-dessus de la surface terrestre, et rarement à moins de 70 kilom.

Quelques observateurs ont prétendu que parfois l'aurore boréale apparaît à une très-faible distance de la terre et même s'abaisse jusqu'à la région des nuages proprement dite. Il s'est en réalité présenté des cas qui ont pu donner naissance à une telle opinion, comme, p. ex., lorsque le phénomène a paru entre le lieu d'observation et une terre [2]) ou une montagne voisine, ou encore, le lieu d'observation étant un navire, entre ce navire et la terre la plus proche [3]); lorsqu'il a semblé s'élancer d'une crête alpestre, d'un nuage, d'un brouillard, etc. Ces observations appartiennent toutefois presque exclusivement aux régions polaires, et les observateurs eux-mêmes ne sont pas pleinement assurés qu'ils n'aient été exposés à une illusion d'optique. Dans les latitudes moyennes, ces basses aurores boréales peuvent du moins être considérées comme fort rares, de même que le bruit crépitant que l'on dit accompagner ce phénomène.

4. **Rapports avec la formation des nuages et l'état du temps.** Nous avons signalé dans ce qui précède quelques-uns des faits les plus importants et les mieux connus. Cet exposé a été très-succinct, vu que les propriétés de l'aurore boréale passées en revue jusqu'ici, n'appartiennent pas immédiatement à notre sujet. Il en est tout autrement de la question de son rapport avec la formation des nuages. Nous allons, pour cette cause, énumérer ce qui a été dit d'essentiel à cet égard. KÄMTZ [4]) cite divers auteurs plus anciens, tels que FROBESIUS, KRAFT, MUSSCHENBROEK et WARGENTIN, qui concordent tous à dire que des nuages minces, blancs, transparents, tantôt apparaissant sous forme de vapeurs, tantôt disparaissant, accompagnent toujours l'aurore boréale. HANSTEN et ARGELANDER, qui ont fourni tous deux de si nombreuses observations, ont constaté que, dans les

[1]) FEARNLY, Norske Videnskabs Selskabs Forh. — NEWTON, American Journal of Science and Arts Vol. XXXIX, p. 286.

[2]) PARRY.

[3]) BRAVAIS; LEMSTRÖM.

[4]) Lehrbuch der Meteorologi, T. III, p. 488.

aurores boréales, le ciel se couvre souvent d'un épais voile de nuages, et HANSTEN en tire la conclusion que les rayons auroraux, en traversant l'espace, précipitent des vapeurs d'eau qui en troublent la transparence [1]). FRANKLIN vit souvent, pendant le jour, les nuages prendre une forme ressemblant à l'aurore boréale, et constata simultanément des perturbations magnétiques. RICHARDSSON admettait que l'aurore boréale suit ou précède toujours l'une ou l'autre des formes de cirrostratus. WRANGEL dit, selon KÄMTZ, que "quand la lumière polaire atteignait le zénith ou s'en approchait, elle se transformait, avant de disparaître, en de légers nuages clairs, qui conservaient longtemps une couleur blanchâtre, et souvent se voyaient encore le lendemain au ciel comme de véritables petits nuages crépus. Quand les rayons auroraux passaient devant le disque de la lune, ils formaient tout autour de grands halos."

Une attention spéciale a été donnée à cette matière par M. W. STEVENSON, lequel a résumé ses observations dans un travail intitulé "Observations on the aurora, cirri, etc. [2]). Après avoir rendu compte de ses intéressantes observations, continuées pendant plusieurs années, sur la marche des cirrus et la direction des bandes et des fibres, il cite plusieurs extraits de son journal d'observation, relatifs aux occasions nombreuses où l'influence de l'aurore boréale sur ces types de nuages était évidente. Les dits extraits, comprenant les années 1840—53, contiennent, outre plusieurs descriptions étendues de divers phénomènes auroraux intéressants, des remarques sur des formations peu communes de cirrus et de cirrostratus. L'auteur parle souvent des nuages brillants, des mouvements violents et irréguliers dans les nuages supérieurs, indiquant la présence de forces électriques, et il paraît admettre que le même phénomène dont l'aurore boréale est la manifestation la plus évidente, la plus brillante et la plus intense, se passe souvent d'une manière moins visible et sur une partie du ciel moins étendue [3]). Si l'on essaye de résumer ses observations consignées dans les

[1]) Mém. Acad. de Bruxelles, 1847, T. 20, p. 118.

[2]) The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine, Vol. VI, Forth serie, Juli—December 1853.

[3]) HANSTEN: "Souvent l'aurore boréale se montre sous l'aspect d'un cirrus blanchâtre, même pendant le jour; quand c'est le cas, l'éclat du phénomène augmente toujours après le coucher du soleil." N. Mém. Ac. Brux. 1847, T. 20, p. 120 (D'après BOUÉ). De même, encore, M. SILBERMANN: "Or M. SILBERMANN a vu souvent, par des nuits sans lune, des nuées orageuses lançant des rayons divergents. Parfois même, une seconde rangée de rayons correspondant aux premiers et séparés d'eux par une zône obscure, formait comme une seconde *gloire* autour de la nuée obscure ou légèrement phosphorescente et dans l'intérieur de laquelle M. SILBERMANN a vu se produire, dans plusieurs cas, des éclairs. *Nouvelles Météorol.* 1869, p. 144.

extraits mentionnés ci-dessus, on arrive à la conclusion suivante: l'aurore boréale a le plus souvent lieu quand le ciel est couvert de minces cirrus et cirrostratus, ordinairement en longues bandes d'abord excessivement ténues, mais, pendant la continuation du phénomène, toujours plus denses et plus évidentes, et passant souvent aux cirrocumulus ou aux nimbus. M. Loomis distingue entre les *taches ou nuages auroraux* (auroral clouds) et la hâle ou *vapeur aurorale* (auroral vapour). L'apparence des taches est indiquée comme la dernière phase d'un phénomène complet de l'aurore boréale, dont les deux premières sont l'arc et les rayons. Il décrit comme suit les deux formes: "When an aurora becomes less active, its beams become more feable, their edges more diffuse, their length diminishes and their bredth increases, and they assume the appearance of luminous clouds. These auroral clouds generally correspond to an hour of the night more advanced than arches and beams." Auroral vapour: "Frequently during the exhibition of a brilliant aurora, there is an appearance of general nebulosity or luminous vapour covering large portions of the heaven and sometimes almost the entire celestial vault." Il est à peu près inutile de donner d'autres citations sur cette matière, vu qu'elles sont singulièrement vagues et indécises, et qu'elles ne se fondent pas sur une étude systématique, mais seulement sur des observations isolées. L'opinion dominante paraît cependant être que les nuages supérieurs favorisent la naissance de l'aurore boréale, et que, pendant la durée du phénomène, le ciel prend un aspect nébuleux, provenant d'un mince voile de nuages, augmentant peu à peu en densité, et formant, après la fin du phénomène, un fond nuageux sombre.

Ce fait concorde au reste avec notre propre expérience, du moins dans la partie qui concerne la formation des nuages pendant et après l'aurore boréale.

M. Hansten admet que les vapeurs d'eau flottant dans l'air, subissent une condensation pendant l'aurore boréale, et toute personne concédant l'influence de ce phénomène sur la formation des nuages, se représente sans doute aussi que les nuages se forment durant l'aurore même et ne sont pas attirés d'ailleurs. Une autre circonstance, souvent signalée par les auteurs, est la présence, dans les régions les plus élevées de l'air, de cristaux de glace très-fins, formant une couche de nuages d'une extrême ténuité. On pense avoir acquis, par l'observation la plus immédiate, la certitude de l'existence d'une formation pareille de glace, des aéronautes s'étant trouvés, à une hauteur considérable, subitement entourés de petites aiguilles de glace, si fines et si transparentes, toutefois, qu'elles ne troublaient pas la clarté

du ciel [1]). Suivant une opinion prédominante, ce sont précisément ces cristaux de glace qui, tout en servant de conducteurs à la décharge électrique, en réfléchissent la lumière et en provoquent de la sorte le grandiose effet optique [2]). Cela expliquerait aussi la fréquence des halos solaires et lunaires aux époques d'aurore boréale, fréquence dont nous avons vu plus haut un exemple chez WRANGEL.

Après avoir montré, dans ce qui précède, que l'aurore boréale est en général considérée comme se trouvant en rapport avec une certaine condition de l'atmosphère, savoir la présence et la formation de types déterminés de nuages, nous passons à l'énoncé des opinions concernant ses rapports avec l'état du temps, c.-à.-d. avec les changements de temps qui la précèdent et la suivent. Si la première question est difficile à élucider d'une manière satisfaisante, parce que les observations qui y servent de base ne sont pas suffisamment positives et systématisées, et que la matière n'est guère capable d'être traitée par une méthode exacte, c'est encore bien davantage le cas à l'égard de la seconde. Nous nous bornerons donc à signaler les opinions auxquelles elle a donné naissance. Aucune de ces opinions ne s'est formée d'une manière telle, qu'on la puisse considérer comme constituant un résultat scientifique; mais leur existence peut du moins servir à démontrer qu'il ne nous a pas manqué de prémisses historiques pour la recherche dont il sera rendu compte ci-dessous.

On sait de longue date que la croyance populaire attribue à l'aurore boréale une certaine influence sur les changements de temps. Ainsi, OLAUS RÖMER prétendait avoir entendu dire qu'avant l'hiver, elle annonçait du froid, et, au printemps, un été sec [3]). De Saussure raconte que les habitants des Orcades voient dans l'aurore boréale le présage de la tempête. Même dans notre pays, on entend dire parfois qu'elle indique du froid ou de la tempête. Certains auteurs s'énoncent d'une manière plus positive. Selon WINN, des tempêtes de l'Ouest ou du Sud-Ouest, accompagnées de nuages et de pluie, suivent l'aurore boréale à 24—30 heures d'intervalle [4]); et, comme il a fondé son opinion sur des observations faites en Angleterre [5]), il est très probable qu'il la mettait en connexion avec l'arrivée du courant du SO dans l'Europe moyenne. Cette observation est constatée par l'écossais FARQUARSON, connu

[1]) DE LA RIVE, T. III, pp. 289 et 295. — Nouvelles météorologiques, 1869, p. 144.

[2]) BUCHAN, Handy Book of Meteorology, p. 313.

[3]) GEHLER, Phys. Wörterbuch, Tome VII, p. 197.

[4]) Phil. Transact. Vol. 64, p. 128.

[5]) A Spithead, au bord de la Manche.

par ses observations sur les aurores boréales, et suivant lequel elles se montrent principalement pendant les tempêtes équinoxiales de l'Ouest, tandis que pendant l'hiver elles sont ou simultanées avec un fort vent d'Ouest ou le précèdent. Hertzberg[1]), après avoir fait un tableau synoptique d'un nombre considérable d'aurores boréales observées pendant plusieurs années, est arrivé au résultat que la plupart ont été suivies de froid, mais de tempête et d'ouragan, si l'aurore boréale a été fortement flamboyante, et s'est étendue au-delà du zénith[2]). En Islande, on la considère comme un présage certain de tempête, et, d'après les observations de Henderson[3]), de fortes raffales de vent ont toujours eu lieu dans l'espace de 24 heures. En Sibérie existait, selon Wrangel[4]), la croyance qu'une aurore boréale intense était toujours suivie d'un vent violent, venant de la direction dans laquelle le phénomène avait été vu, fait qui, toutefois, ne concorde pas avec ses propres observations. On trouve de même chez Ihle[5]) que, dans la Norvège septentrionale, l'aurore boréale à l'horizon Est est accompagnée et suivie d'un froid sec, et à l'horizon Ouest, de tempête et de neige, avec un froid moins intense. Il a été présenté à cet égard, dans ces derniers temps, des opinions plus positives et fond es sur de plus vastes observations. Nous y reviendrons dans une autre division de ce travail. Nous devons cependant ajouter, pour ne pas négliger les opinions contraires, que des observateurs distingués, tels que Mairan et Bergman[6]) nient toute relation avec l'état du temps, circonstance bien naturelle, toutefois, à l'égard du premier, par suite de ses vues sur l'origine cosmique de l'aurore boréale.

5. **Effets magnétiques et électriques.** En 1741, déjà, Celsius et Hiorter découvrirent à Upsal que l'aurore boréale est accompagnée de perturbations magnétiques considérables[7]). Cette propriété est donc connue depuis plus d'un siècle, et elle a été l'objet d'une étude attentive et soigneuse. On a remarqué que des formes différentes de l'aurore boréale présentent des différences dans leurs effets magnétiques, et que les divers éléments magnétiques sont également soumis à des influences divergentes. Le fait toutefois le plus saillant, est l'immense étendue de ces perturbations ou causées par l'aurore boréale ou se trouvant du moins dans un rapport très-

---

[1]) Norskt Magazin for Naturvidenskaberne B. VII. p. 145.
[2]) Ib.
[3]) Kämtz, Met., Tom. III, p. 484.
[4]) Ibid., p. 415.
[5]) Pogg., 1843, T. 58, p. 344.
[6]) Kämtz, T. III, p. 483.
[7]) Kongl. Sv. Vet. Akad. Handl. 1747, p. 27.

intime avec ce phénomène. Il est superflu d'énumérer des cas spéciaux à titre d'exemples. Des observations pour ainsi dire innombrables, et principalement les observations simultanées provoquées par Gauss sur des points différents de la surface terrestre, tendent toutes à prouver que, s'il se présente sur un point du globe une forte perturbation, elle se fait sentir simultanément sur d'autres points, quoique avec une intensité différente; et, à cet égard, il a été constaté que l'intensité des pertubations augmente vers les pôles magnétiques. En outre, cette intensité dépend de l'extension de l'aurore boréale. Ce sont principalement les aurores boréales s'avançant considerablement vers le sud et présentant par suite une vaste extension, qui produisent les effets magnétiques les plus intenses. On peut citer comme d'exemples les aurores boréales les plus remarquables des dernières périodes décennales, savoir celles de la fin d'août et du commencement de septembre 1859, dont la dernière fut visible en Amérique jusqu'au 12° de lat. Nord.[1]) Cette circonstance concorde parfaitement avec l'opinion actuellement la plus répandue, que l'aurore boréale est une décharge électrique entre les régions supérieures et les régions inférieures de l'air, formant de la sorte un courant dont la partie de l'atmosphère occupée par l'aurore boréale constitue le milieu conducteur. Plus la section du conducteur est grande, plus sont grandes tant la quantité d'électricité qui peut y passer, que la force du courant. L'explication que l'on peut considérer comme la plus probable est au reste une chose indifférente pour le point en question; mais c'est un fait définitivement acquis, que les perturbations accompagnant une aurore boréale d'une vaste extension, sont toujours considérables. Une question plus difficile sera de décider si ces perturbations sont toujours produites par l'aurore boréale ou si elles ont aussi d'autres origines. Dans le premier cas, on pourrait prouver que chaque perturbation d'une intensité relativement grande a lieu simultanément avec une aurore boréale sur un point quelconque de la terre. Les difficultés à cet égard sont toutefois évidentes; car, d'un côté, la partie de la terre sur laquelle ont lieu les observations est trop restreinte, et de l'autre, la perturbation dont la lumière aurorale est le phénomène visible, peut avoir lieu dans des circonstances telles, qu'elle ne peut être observée, opinion émise, comme nous l'avons vu, par quelques savants[2]). Ce qui toutefois est certain, c'est que de vrais orages magnétiques ont souvent été constatés simultanément avec l'aurore boréale. Aussi les variations subies dans ces circonstances par les éléments magnétiques, peuvent-elles être considérées comme caractérisant l'aurore boréale.

[1]) Loomis. Smithsonian Report, 1865, p. 228.

[2]) Hansteen, Stevenson.

Quand on a voulu déterminer les éléments magnétiques d'une localité et leur variation régulière, en général on a séparé de toute la série d'observations celles qui ont présenté les plus grands écarts des valeurs moyennes, ou, en d'autres termes, celles qui ont été perturbées; cela, parce qu'elles peuvent être considérées comme résultant de causes toutes différentes de celles amenant la variation régulière, variation qu'elles ne masqueraient pas, il est vrai, mais où elles introduiraient sans doute certaines irrégularités. Afin de pouvoir montrer l'étroite relation existant entre les périodes de l'aurore boréale et celles des perturbations, nous allons rendre compte de l'effet total de l'influence de ces dernières sur les valeurs moyennes des éléments du magnétisme terrestre; puis nous étudierons spécialement la variation durant les orages magnétiques. Il est naturel que les résultats obtenus de la sorte n'auront de valeur que pour la partie de la terre, grande ou petite, où est situé le lieu d'observation. Nous donnerons en premier lieu quelques extraits des "General Results of the Makerstown magnetical and meteorological observations". [1])

Déclinaison.

Valeur moyenne et variation annuelle. L'influence des perturbations sur les moyennes peut être considérée comme nulle, ou, en d'autres termes, les perturbations positives sont, dans ces périodes, aussi fortes que les négatives. Par contre, leur somme, indépendamment du signe, ou, si l'on veut, leur irrégularité est la plus grande pour mars et septembre, moins grande pour les mois d'hiver, et elle présente son minimum en juin. [2])

Variation diurne. La déclinaison occidentale est accrue par les perturbations, principalement aux heures suivantes:

en Déc.—janv.—févr.,	Mars—avril,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
à $1^h\,40^m$ s.,	9^h m., 1^h s.,	$1^h\,40^m$ s.,	8^h m.,	8^h m.

Elle diminue:

en Déc.—janv.—févr.,	Mars—avril,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
à 8^h s.—12^h s.,	6^h s.—11^h s.,	11^h s.—12^h s.,	9^h s.—10^h s.,	8^h s.—11^h s.

Ainsi, pendant le cours de l'année, l'effet des perturbations est d'augmenter la déclinaison occidentale entre 8^h m. et 2^h s., et de la diminuer entre 8^h s. et 12^h s. (minuit). [3])

---

[1]) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XIX, p. II.

[2]) Ibid., p. XXIV.

[3]) Ibid., p. XXIV et XXV.

Composant horizontal.

Valeur moyenne et variation annuelle. D'après ce qui précède, la valeur moyenne de la déclinaison ne présente aucune différence, qu'elle soit calculée sur des observations d'où les perturbations ont été éliminées, ou sur la totalité des observations. Il en est tout autrement du composant horizontal, car la moyenne annuelle, calculée uniquement sur les valeurs qui n'ont pas souffert de perturbation, est, pour 1844, de 0,000189, et, pour 1845, de 0,000154 plus grande que la même moyenne calculée sur toutes les observations. Les perturbations réduisent donc de 0,000172 du total la valeur moyenne du composant horizontal. [1]) Si l'on compare les moyennes mensuelles provenant des 10 jours de chaque mois qui ont fourni les moindres perturbations avec les mêmes moyennnes basées sur l'ensemble des observations, on trouve que ces dernières dépassent en moins (—) ou en plus (+) les précédentes des quantités suivantes, dans lesquelles la valeur entière du composant horizontal est prise pour unité.

	Janv.,	févr.,	mars,	avr.,	mai,	juin,	juill.,	août,	sept.,	oct.,	nov.,	déc.
1844.	0,000	—109	—346	—399	—315	—029	+018	—021	—108	—069	—507	—164	—234.
1845.	0,000	—301	—160	—260	—143	—032	+021	+003	—119	—109	—251	—111	—377.
Moy.	0,000	—205	—253	—329	—229	—030	+019	—009	—113	—085	—379	—137	—305.

Ainsi, dans chaque mois, à l'exception de juin, l'effet des perturbations est de diminuer l'intensité, et cette diminution est la plus grande en mars et en octobre. [2])

Variation diurne. Le composant horizontal est augmenté par les perturbations principalement aux heures suivantes:

en Déc.—janv.—févr.,	Mars—avr.,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
Environ à $3^h\ 20^m$ s., 6^h m.,	$4^h\ 40^m$ s.,	5^h s.,	$5^h\ 15^m$ s.,	$5^h\ 40^m$ s.

Il diminue:

En. Déc.—janv.—févr.,	Mars—avr.,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
Environ à 1^h m.,	2^h m.,	$2^h\ 30^m$ m.,	$5^h\ 40^m$ m.,	11^h s.

L'augmentation maxima se présente donc entre 3^h—5^h du soir, et la diminution maxima de 11^h du soir environ à 2^h du matin. [3])

Inclinaison.

La moyenne annuelle est, suivant des observations faites pendant deux ans, augmentée, par les perturbations, d'une quantité de 0',15. [4])

---

[1]) Iibd., p. XXXII.
[2]) Ibid., p. XXXIII.
[3]) Ibid., p. XXX.
[4]) Ibid., p. LIX.

Variation diurne. L'inclinaison augmente, par suite des perturbations, principalement aux heures suivantes:

	En Déc.—janv.—févr.,	Mars—avr.,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
Env.	$12\frac{1}{2}^h$ m.,	$1\frac{1}{2}^h$ m.,	11^h s., $8\frac{1}{2}^h$ m.,	9^h m.,	9^h m.
	$9\frac{1}{2}^h$ m.,	$8\frac{1}{2}^h$ m.,		9^h s.,	10^h m.

Augmentation minima:

	En Déc.—janv.—févr.,	Mars—avr.,	Mai—juin,	Juill.—août,	Sept.—oct.—nov.
Env.	6^h m., 3^h s.,	4^h s.,	4^h s.,	5^h s.,	$3\frac{1}{2}^h$ m., 3^h s.
		6^h m.,	4^h m.,	12^h s.,	

Remarque. Les chiffres de la ligne inférieure désignent les heures d'un maximum ou d'un minimum secondaire.

Comme on le voit, les époques varient avec les saisons. Les perturbations font au reste augmenter en général l'inclinaison pendant la nuit plus que pendant le jour. Pour donner une idée plus exacte des lois qui régissent les perturbations magnétiques, nous allons exposer les résultats des recherches de Mr. SABINE, lesquelles serviront en outre à établir le rapport des perturbations précitées avec l'aurore boréale. Ces résultats, basés sur plusieurs années d'observations exécutées à l'observatoire de Toronto en Canada, sont particulièrement propres à faire connaître la nature des variations irrégulières. [1])

Après avoir montré l'existence d'une période séculaire et prouvé son rapport avec les taches solaires, l'auteur passe à l'exposition de la période annuelle et diurne des perturbations, à laquelle nous empruntons les données suivantes.

Variation annuelle.

Le tableau qui suit a été établi sur cinq années d'observations. La somme de toutes les grandes perturbations de chaque élément séparé ayant été divisée par 12, on a obtenu de la sorte la perturbation moyenne annuelle. Celle-ci, prise pour unité, a été comparée avec la valeur observée des perturbations pour chaque mois, et les rapports ainsi obtenus insérés dans le tableau. [2])

---

[1]) Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Toronto in Canada. Vol. III, p. LXVI et sviv.

[2]) Ib. Tab. LIV, p. LXX. Nous avons, à titre de comparaison, ajouté une colonne portant l'en-tête: *Fréquence relative de l'aurore boréale*, formée de la sorte, que le nombre des aurores boréales visibles à trois stations de l'Amérique du Nord, a été divisé par 12, et le quotient comparé avec le nombre observé pour chaque mois.

Mois.	Déclinaison.	Comp. horizont.	Comp. vert.	Moyenne.	Fréquence relative des aurores boréales.
Juillet.....	0.94	0.61	0.71	0.75	1.11
Août.....	1.16	0.75	1.08	0.99	1.10
Septembre..	1.62	1.71	1.61	1.64	1.33
Octobre....	1.31	1.48	1.29	1.36	1.07
Novembre...	0.78	0.98	0.75	0.84	0.98
Décembre...	0.76	0.58	0.61	0.65	0.57
Janvier	0.57	0.56	0.57	0.57	0.79
Février	0.84	0.94	0.74	0.84	0.95
Mars	1.11	0.94	1.08	1.04	1.10
Avril.....	1.42	1.50	1.49	1.47	1.21
Mai	0.98	0.90	1.12	1.00	0.87
Juin	0.53	0.36	0.50	0.46	0.85

Ainsi, chez tous les éléments, la perturbation présente un minimum en janvier et en juin, et un maximum en septembre et en avril. Dans le calcul ci-dessus, on a ajouté toutes les perturbations, sans égard au signe. En distinguant entre les quantités positives et les quantités négatives, et en procédant au reste de la même manière que plus haut, on trouve que les deux parties dans lesquelles se divise la perturbation de chaque élément, présentent identiquement les mêmes caractères généraux, savoir un maximum aux équinoxes et un minimum aux solstices.

Relativement à l'influence sur les valeurs moyennes ou au rapport entre les sommes des perturbations positives et négatives, nous signalerons qu'à Toronto, l'effet général est de diminuer la déclinaison occidentale. Les perturbations orientales y prédominent dans le rapport de 1,28: 1. La valeur moyenne de la déclinaison n'est donc affectée que d'une manière insignifiante par les perturbations. Le cas est tout autre à l'égard du composant horizontal. Le rapport entre la somme des perturbations qui augmentent et de celles qui diminuent, est à peu près comme 1,4: 4, ce qui produit une réduction considérable dans la valeur moyenne. La valeur moyenne de l'inclinaison est augmentée les perturbations positives étant, à la règle, en prédominance dans le rapport de 5,6: 1.

Variation diurne.

Temps astronomique de Toronto.	Variation diurne produite par les grandes perturbations.			Fréquence relative des aurores boréales à Toronto.	Temps civil de Toronto.
	Déclinaison.	Inclinaison.	Intensité.		
h.	′	′	Parties du total.		
18	0.29 O	+0.10	−.000092	0.02	6 matin.
19	0.41 O	+0.18	−.000092		7 „
20	0.52 O	+0.16	−.000047		8 „
21	0.46 O	+0.13	−.000032		9 „
22	0.30 O	+0.10	−.000008		10 „
23	0.11 O	+0.09	+.000007		11 „
0	0.11 O	+0.09	+.000015		midi.
1	0.03 O	+0.09	+.000027		1 soir.
2	0.09 O	+0.05	+.000042		2 „
3	0.08 O	+0 07	+.000054		3 „
4	0.09 O	+0.05	+.000068		4 „
5	0.04 O	+0.08	+.000073		5 „
6	0.18 E	+0.14	+.000058	0.25	6 „
7	0.34 E	+0.14	+.000062	0.61	7 „
8	0.52 E	+0.16	+.000047	1.25	8 „
9	0.87 E	+0.16	+.000016	1.51	9 „
10	0.61 E	+0.15	−.000022	1.93	10 „
11	0.53 E	+0.16	−.000047	1.96	11 „
12	0.33 E	+0.14	−.000098	1.56	minuit.
13	0.26 E	+0.18	−.000125	1.29	1 matin.
14	0.17 E	+0.19	−.000132	1.03	2 „
15	0.16 E	+0.14	−.000138	0.82	3 „
16	0.15 E	+0.12	−.000123	0.50	4 „
17	0.02 O	+0.10	−.000109	0.24	5 „

Nous voyons par là que, si l'on considère uniquement les observations perturbées, la déclinaison occidentale est supérieure à sa valeure moyenne de 5^h du matin à 5^h du soir, avec le maximum à 8^h du matin, tandis qu'elle lui est inférieure de 5^h du soir à 5^h du matin, avec le minimum à 9^h du soir, et que l'inclinaison à chaque heure surpasse la valeur moyenne, principalement de 8^h du soir à 8^h du matin. L'intensité montre une faible augmentation entre 11^h du matin et 9^h du soir, avec le maximum à 5^h du soir, et une diminution considérablement plus grande pendant le reste du jour, surtout immédiatement après minuit. Les matériaux des recherches dont nous venons de donner succinctement les résultats, ont été formés en séparant, de la masse totale des observations, celles qui présentaient les plus grands écarts de la valeur moyenne. Comme il serait trop long de

rendre ici un compte plus détaillé du procédé suivi, nous renvoyons le lecteur au travail original.

De ce qui vient d'être dit, il résulte, tant d'après les observations de Makerstown que d'après celles de Toronto, que les perturbations, que l'on serait tout d'abord disposé à considérer comme accidentelles, suivent des lois périodiques avec des époques souvent très-différentes de celles de la variation régulière. Il est dès-lors évident que la variation observée est la résultante de deux variations dépendant de lois spéciales et ayant une origine différente, et que, pour trouver l'une, il faut éliminer l'autre. Le titre de ce § indique déjà que nous considérons en général les perturbations comme des effets dus à l'aurore boréale. Si nous résumons les raisons qui nous ont conduit à admettre que ces phénomènes se trouvent entre eux dans les rapports de la cause à l'effet, ou qu'ils ont une origine commune, nous signalerons les suivantes:

1:o La simultanéité très-souvent observée de l'aurore boréale et des perturbations magnétiques, jointe à la circonstance que ces phénomènes ont leur plus grande fréquence dans les mêmes contrées du globe.

2:o La relation entre la position et la direction de l'arc auroral, des rayons et de la couronne, d'un côté, et la déclinaison et l'inclinaison magnétiques du lieu de l'autre.

3:o La concordance dans les variations périodiques, lesquelles, tant séculaires [1]) qu'annuelles [2]) et diurnes, [3]) sont identiques pour les deux phénomènes.

4:o Le rapport direct qui existe entre l'extension et l'intensit de l'aurore boréale et les perturbations.

Relativement à la priodeé diurne des perturbations qui se manifestent pendant les aurores, nous avons vu, d'après ce qui précède: [4])

1:o Que la déclinaison occidentale augmente pendant le jour qui précède l'aurore boréale. Pendant et après le phénomène, la déclinaison est à l'est du méridien magnétique.

---

[1]) Relativement à la période séculaire, voir: Loomis, Comparison of the mean daily range of the magnetic declination, etc. etc. Americ. Journ. of Sc. and Arts, Vol. I, 1870.

[2]) Voir Tabl., p. 15.

[3]) Voir Tabl., p. 16.

[4]) Une lumière très-précieuse à cet égard a été fournie par M. le prof. Airy, lequel, dans les "Greenwich Observations", 1862, a donné des orages magnétiques pendant les années 1841—57, un extrait ne comprenant pas moins de 170 cas différents, et dont il sera rendu compte plus loin.

2:o L'intensité augmente avant l'aurore boréale, pour diminuer ensuite rapidement et à un degré considérable, de sorte que l'effet total est une diminution. Ce sont précisément cette diminution et cette valeur si basse de l'intensité, qui constituent la variation la plus caractéristique de toutes.

3:o L'inclinaison est, tant avant que surtout pendant l'aurore boréale, au-dessus de sa valeur moyenne.[1])

Ces propositions se fondent sur des observations faites à Makerstown et à Toronto, situés presque sous la même latitude magnétique. La question de savoir si et jusqu'à quel point elles sont aussi valables pour d'autres zônes, ne pourra être résolue que par des observations semblables pour ces zônes-là. Quoique nous ne puissions entrer dans une question aussi vaste, nous ne voulons toutefois pas passer sous silence le fait intéressant que voici: Nous avons vu que les perturbations suivent le temps du lieu d'observation, et qu'elles atteignent à Makerstown et à Toronto leur maximum pendant la nuit. Il en est de même dans la zône tempérée de l'hémisphère méridional, suivant des observations faites à Hobartton (Terre de van Diemen), sous les 42° 12′ lat. S. et 147° 27′ long. de Gr., seulement avec une faible inégalité dans les heures tropicales, et avec cette différence que le mouvement des pôles à l'est et à l'ouest y est renversé, comme partout dans l'hémisphère Sud. A Sainte-Hélène, par contre, située dans la zône tropique, le maximum des perturbations n'a pas lieu pendant la nuit, mais pendant le jour[2]), circonstance venant à l'appui de l'opinion admettant le rapport de l'aurore boréale avec l'électricité atmosphérique, dont les effets, qui se manifestent en orages, atteignent pendant le jour leur plus grande intensité, les orages étant dans les régions tropiques un phénomène journalier, comme l'aurore boréale l'est probablement aussi dans les régions polaires. Aussi, sous les latitudes les plus élevées, les perturbations magnétiques sont-elles presque permanentes, ce qui doit sans doute être attribué au voisinage des régions où les décharges électriques se suivent sans interruption. De même, la moindre fréquence de l'aurore boréale et des perturbations à mesure que l'on s'avance vers le Sud, est uniquement et exclusivement le résultat de leur diminution d'intensité, diminution par laquelle le nombre de fois qu'elles sont observées pendant le courant de l'année, est d'autant plus restreint que l'on est plus éloigné des pôles.

---

[1]) Voici comment HANSTEEN s'exprime à cet égard: "Pendant l'aurore boréale et plusieurs jours après, l'intensité horizontale est notablement diminuée, et elle reprend peu à peu sa valeur habituelle. Au contraire, la moyenne de la déclinaison diurne reste à peu près invariable". De la Rive, Tom III, p. 290.

[2]) Toronto Obs., Vol. III, p. IX, Introduction.

Comme, suivant les travaux de Sabine, les perturbations atteignent dans les régions tropicales leur maximum pendant le jour, tandis qu'elles l'ont pendant la nuit sous les plus hautes latitudes, ce fait nous amène à supposer que les localités situées sur le même méridien magnétique, devraient présenter un déplacement continu des époques des maxima et des minima des perturbations, supposition constatée au reste par ce qui a été dit, p. 5, relativement aux heures de la plus grande fréquence de l'aurore boréale.

En connexion avec la question de l'influenee de l'aurore boréale sur les éléments magnétiques, nous allons en dernier lieu donner un exposé rapide de quelques autres preuves encore plus directes de sa nature électrique. Une lumière très-importante et très-précieuse a été fournie à cet égard par l'observation de son influence sur les fils télégraphiques. Pendant des aurores boréales intenses, ces fils sont parfois presque hors de service par suite de courants accidentels qui provoquent des mouvements irréguliers dans les appareils. Ce phénomène se montra d'une manière très-sensible dans les grandes aurores boréales du 17 nov. 1848, ainsi que de la fin d'août et du commencement de septembre 1859. L'emploi de la télégraphie fut parfaitement impossible sur plusieurs points. En Suisse, les galvanomètres indiquèrent pendant les aurores boréales mentionnées en dernier lieu, la présence de courants d'une force triple de ceux employés pour la télégraphie, et chose dont il est bien permis de douter, "le 2 septembre 1859, les courants sur les lignes de l'Amérique du Nord, étaient si forts et si constants, que, dans plusieurs localités, l'expédition des télégrammes put se faire exclusivement avec le courant auroral, sans l'emploi d'une batterie". [1])

Mais ce n'est pas seulement cette expérience accidentelle qui a fait placer l'aurore boréale dans une relation intime avec l'électricité. Une étude poursuivie de cette force dans ses rapports avec les phénomènes naturels, a frayé la voie aux opinions qui la placent en tête de l'explication de tous les phénomènes du magnétisme terrestre. Nous en avons déjà vu une expression dans la théorie de l'aurore boréale dont il vient d'être rendu compte. Les découvertes d'Örsted et d'Ampère sur le rapport entre le magnétisme et les courants électriques, avaient sans doute déjà rendu depuis longtemps possible une théorie fondée sur la présence de courants galvaniques et sur leurs effets sur l'aiguille aimantée; mais, jusqu'ici la base même de cette théorie, savoir l'existence des courants précités et leurs rapports intimes avec les phénomènes magnétiques dont ils étaient la cause, n'avait pu être

[1]) Loomis, p. 233.

démontrée d'une manière satisfaisante par une voie directe et expérimentale; par suite, la théorie même manquait de points de départ solides. [1]) L'expérience acquise dans les derniers temps, soit accidentellement, comme nous l'avons vu à l'égard des fils télégraphiques, soit par des recherches très-exactes et de longue haleine, comme principalement celles de Mr. LAMONT et de Mr. AIRY[2]), a démontré la simultanéité des phénomènes magnétiques extraordinaires avec les phénomènes électriques, de même qu'une conformité si parfaite entre les mouvements des instruments magnétiques et ceux produits, par les courants terrestres, dans les circuits métalliques fermés par la terre, que l'action de l'électricité sur les phénomènes du magnétisme terrestre ne peut plus être mis en doute. On ne sait pas encore avec certitude comment et sous quelle forme elle agit, c.-à-d. comment naissent les courants terrestres; mais je crois devoir signaler au moins l'une des opinions émises à cet égard, savoir celle de Mr LAMONT, lequel régarde l'électricité statique qui se répand à la surface de la terre comme la force créatrice du courant terrestre. [3]) Son opinion sur l'électricité de l'air diffère au reste complètement de l'opinion généralement adoptée, en ce qu'il pense "que l'on donnera une explication plus correcte des observations relatives à l'électricité de l'air, en ne se représentant pas l'atmosphère comme contenant de l'électricité positive, mais plutôt la terre comme un globe chargé d'électricité négative, circulant isolé dans l'espace; par suite, la répartition de l'électricité à sa surface peut être différente à des heures différentes du jour et sous l'influence d'états atmosphériques différents." [4]) Nous ne nous arrêterons pas à la plus ou moins grande justesse de cette idée. Mr LAMONT, et d'une façon plus complète encore, Mr. AIRY, ont prouvé que certains mouvements brusques et totalement irréguliers des aiguilles aimantées, présentent une concordance parfaite avec ceux produits simultanément sur le galvanomètre par le courant terrestre; et Mr. LAMONT croit que l'on s'approche le plus de la vérité, en ne considérant pas ce courant comme galvanique ou thermoélectrique, mais en y voyant le résultat du mouvement de l'électricité statique. Cette manière de voir place le courant terrestre et conjointement le magnétisme ter-

[1]) On voudra bien consulter, pour cette matière, l'historique qui en a été donné dans l'ouvrage de Mr le prof. LAMONT: "Der Erdstrom und der Zusammenhang desselben mit dem Magnetismus der Erde," p. 1—4.

[2]) Philos. Transact. of the R. Soc. of London, Vol. 158, part. II, p. 465. Ibid., pour 1870, p. 215.

[3]) "Hiermit ist, etc." . . . . . Der Erdstrom p. 65.

[4]) Der Erdstrom, p. 68.

restre dans un rapport immédiat avec les modifications atmosphériques, et nous entrons par là dans la matière qui fera l'objet des parties subséquentes de ce travail.

II.

RECHERCHES SUR LA RELATION DU VENT ET DES TEMPÊTES AVEC LES VARIATIONS MAGNÉTIQUES.

Nous avons essayé de donner, dans les pages précédentes, quelques raisons générales en faveur d'une relation supposée entre les phénomènes magnétiques et météorologiques. Après avoir signalé quelques analogies entre les variations régulières, nous nous sommes efforcé de préparer le lecteur à la matière qui fait l'objet de ce travail, en rapportant les effets bien connus de l'aurore boréale sur les variations magéntiques, et les relations supposées ou connues de ce phénomène remarquable avec les changements qui ont leur siége dans l'atmosphère. Ce qui a été exposé jusqu'ici sur les relations de l'aurore boréale avec la formation des nuages et l'état du temps, ne peut toutefois être considéré comme le résultat de recherches suffisamment exactes, mais seulement comme l'expérience générale à laquelle les observateurs croient être parvenus. Nous allons maintenant rendre compte des travaux destinés à *prouver* l'influence des phénomènes météorologiques sur le magnétisme terrestre. Nous signalerons, en premier lieu, le plus ancien que nous ayons trouvé, celui de SCHÜBLER, datant de 1820.[1]) N'ayant pu nous procurer le travail même de cet auteur, nous sommes réduit à en rendre compte d'après le "Repertorium der Physik" de DOVE, T. 2, p. 263. Il comprend les observations faites dans trois différentes localités, Hofwyl en Suisse, Tubingue et Berlin, et cherche à prouver que la variation diurne de la déclinaison dépend des différences de clarté ou de nébulosité du ciel. Les observations suisses comprennent une année, 1813. Ces observations se firent trois fois par jour, savoir entre une heure et demie et deux heures après le lever du soleil, le soir entre $1\frac{1}{2}^{h}$ et 2^{h}, et deux heures après le coucher du soleil. La différence entre les deux premières observations était considérée comme la variation diurne.

---

[1]) Schweigg. Journ., T. 28, p. 305.

	Variation.			Nombre de jours.	
	Moyenne.	Ciel couvert.	Ciel clair.	Nébuleux.	Clairs.
	′	′	′		
JANVIER....	5.1	4.3	6.4	10	7
FÉVRIER....	8.5	7.5	8.9	4	14
MARS.....	12.0	10.2	14.5	10	10
AVRIL	14.5	18.0	15.7	2	17
MAI.....	12.0	12.3	11.6	7	10
JUIN	11.6	10.5	12.1	8	13
JUILLET....	10.8	10.2	12.5	13	11
AOÛT.....	13.1	8.7	16.2	3	14
SEPTEMBRE..	12.1	10.4	13.7	5	9
OCTOBRE ...	10.3	9.0	11.7	6	9
NOVEMBRE..	6.4	5.9	8.7	15	3
DÉCEMBRE ..	5.7	5.7	5.3	11	3
Année....	10.17	9.39	11.44		

Il paraîtrait de ce tableau que la variation moyenne serait plus grande dans les jours clairs que lorsque le ciel est couvert. Un seul mois, avril, fait à cet égard une exception qui peut toutefois être regardée comme accidentelle, ce mois n'ayant eu que deux jours nébuleux. On voit, par la première colonne, que la variation atteint son minimum dans les mois d'hiver, ce que l'expérience a du reste pleinement constaté. Des observations suivies faites à Tubingue donnèrent les mêmes résultats. Elles eurent aussi lieu trois fois par jour: le matin, à 8^h en hiver, $7\frac{1}{2}{}^h$ en automne et au printemps, et 7^h en été; l'après-midi, entre $1\frac{3}{4}{}^h$ et 2^h; le soir, entre 9^h et 10^h. Le tableau qui suit contient le résultat d'observations faites pendant 1200 jours, dans les années 1827—1831. La colonne portant l'en-tête *demi-clair*, comprend les jours qui n'ont pu être rapportés à aucune des autres catégories. On supprimait les jours qui se faisaient remarquer par de grandes perturbations.

	Moyenne.	Clair.	Demi-clair.	Couvert.
	′	′	′	′
Janvier....	7.01	7.5	7.6	6.4
Février....	8.16	8.9	7.4	8.1
Mars.....	11.57	12.8	11.2	10.9
Avril	13.37	14.3	13.4	12.5
Mai.....	15.09	16.2	14.8	13.7
Juin	14.70	16.6	14.6	13.3
Juillet	14.98	16.3	15.0	12.8
Août	15.70	15 8	16.2	14.8
Septembre .	14.08	14.3	14.5	13.1
Octobre ...	10.79	12.9	10.4	9.2
Novembre ..	7.88	8.7	7.8	7.5
Décembre ..	7.05	7.7	8.3	5.8
Hiver.....	7.40	8.0	7.6	6.7
Printemps	13.33	14.4	13.1	12.3
Été	15.12	16.2	15.2	13.6
Automne..	10.88	11.9	10.9	9.9
Année	11.68	12.6	11.9	10.6

Les deux séries d'observations que nous venons de donner, semblent indiquer qu'il existe une relation réelle entre la quantité des nuages et la grandeur de la variation diurne de la déclinaison. Des observations identiques aux précédentes, faites par Mr Dove à Berlin pendant quelques mois de l'année 1830, donnèrent un résultat analogue, en ce que la variation fut constaté être:

dans les jours clairs = 9′45″,
et dans les jours nébuleux = 8′1″.

Farquarson a également obtenu des résultats identiques de ces observations. [1])

Aussi longtemps qu'on chercha dans l'action thermique du soleil la cause des variations magnétiques régulières, il était aussi naturel qu'on admît une proportionalité entre les variations de la température et les variations magnétiques. Le résultat signalé plus haut, obtenu par Schubler, s'explique donc par les variations plus grandes de la température pendant les jours clairs.

Personne n'ignore que des vents différents exercent une influence décidée sur la clarté du ciel, la hauteur du baromètre, la température et

[1]) Phil. Transact. London, 1830 p. I.

l'humidité. Cette circonstance donne naissance à la supposition qu'ils devraient aussi influencer inégalement sur l'aiguille de déclinaison. Kämtz [1]) a essayé de prouver que cette différence existe réellement, en combinant pour quelques localités les valeurs de déclinaison observées suivant différents vents, et corrigées pour la variation régulière. Ces calculs, exécutés pour Mannheim, Berlin et Londres, fournissent des résultats paraissant indiquer que la déclinaison occidentale est plus petite avec les vents du SO., qu'avec ceux du NO. Kämtz a donné, sur la base des valeurs observées, des formules d'interpolation pour le calcul de la valeur moyenne de la déclinaison d'après les vents. En omettant ces formules et les valeurs calculées, nous donnons ici les valeurs observées pour Mannheim, Berlin et Londres.

Mannheim.		Berlin.		Londres.	
	0 ′		0 ′		0 ′
N.	19 56,06	N.	18 3,95	N.	24 42,90
NE.	„ 55,99	NE.	„ 3,94	NE.	„ 42,91
E.	„ 55,94	E.	„ 3,83	E.	„ 43,63
SE.	„ 55,52	SE.	„ 3,63	SE.	„ 43,00
S.	„ 55,37	S.	„ 3,35	S.	„ 42,33
SO.	„ 55,23	SO.	„ 2,96	SO.	„ 42,09
O.	„ 55,41	O.	„ 3,06	O.	„ 41,53
NO.	„ 55,82	NO.	„ 4,03	NO.	„ 41,43

Ces chiffres sont les moyennes de 10, 3 et 2 ans d'observations.

"Pour autant", dit Kämtz [2]), "que les chiffres ci-dessus ont réellement la signification qu'ils paraissent avoir, il est probable que d'autres phénomènes météorologiques influent en outre sur les mouvements de l'aiguille aimantée, ou que l'on devrait, du moins, trouver une simultanéité entre les modifications les plus remarquables de l'état atmosphérique et du magnétisme terrestre." Jusque-là, on n'avait pu, toutefois, rien dire de positif à cet égard, l'expérience obtenue par différents auteurs ne s'étant pas trouvée concordante sur ce point. Cependant, l'idée d'une connexion entre les phénomènes atmosphériques et magnétiques n'était nullement étrangère à la science. Le développement et l'esprit systématique introduits à une époque plus récente dans les travaux sur le magnétisme terrestre, conduisirent, il est vrai, à des découvertes qui paraissaient inconciliables avec l'idée d'une cause météorologique des variations magnétiques. En effet, du moment où

[1]) Lehrb. der Meteor., T. III, p. 441.
[2]) Lehrb. der Meteor., T. III, p. 445.

l'on eut constaté l'influence de la lune et des taches solaires, on arriva toujours davantage à considérer le magnétisme terrestre comme une force cosmique. Il semble toutefois que, dans sa forme la plus exclusive, du moins, cette opinion n'est plus soutenable, surtout depuis que l'action de l'électricité sur les variations magnétiques a été démontrée jusqu'à l'évidence. Nous avons déjà signalé quelques-uns des résultats obtenus à cet égard, principalement par les travaux de MM. LAMONT et AIRY. Cela nous paraît donc un motif assez puissant pour se livrer à des recherches de la nature de celles indiquées au commencement de ce chapitre. Aussi, un auteur, du moins, s'est il fait spécialement remarquer par des travaux dans cette direction, savoir le père Secchi, à Rome, qui a énoncé quelques propositions sur les rapports de l'aurore boréale et des variations magnétiques avec les tempêtes, la direction du vent, la formation des nuages, etc. Les recherches qui servent de bases à ces propositions, présentent une étendue si grande, et la renommée scientifique de l'auteur est d'une importance si considérable, qu'elles sont de nature tant à provoquer des travaux ultérieurs dans cette branche de la physique, qu'à leur servir de guides. Nous croyons donc devoir leur consacrer une attention plus spéciale.

Ces recherches ont été publiées, les unes séparément, sous le titre de: "*Intorno alla relazione che passa tra i fenomeni meteorologici e le variationi del magnetismo terrestro. Quattro memorie*", et les autres, dans le *Bulletino Meteorologico del Coll. Rom.*, Vol. I et II. On peut regarder comme une continuation de ces ouvrages la "*Riduzione delle Oss. Magn. fatte all'Oss. del Coll. Rom.*" [1]) Les circonstances qui portèrent l'auteur à cette étude et qui lui firent pressentir les rapports dont il est question, furent: 1:o, qu'en général, les instruments magnétiques subissent plus de perturbations en hiver qu'en été; 2:o, que le bifilaire montre dans les jours de bourrasque des déviations remarquables de sa valeur moyenne; 3:o, que, pendant les vents froids du Nord, cet instrument s'élève au-dessus de la position moyenne, même quand la déclinaison ne montre pas de variation appréciable, tandis qu'il baisse sous l'influence des vents du Sud; 4:o, que le bifilaire est sensible à la plus petite variation atmosphérique, surtout, p. ex., lorsque le ciel s'obscurcit tout à coup, ou dans des changements subits de température accompagnés ou non de perturbations atmosphériques.

Afin de faire ressortir d'une manière palpable la relation énoncée ci-dessus, Mr. SECCHI construisit, pour chaque décade ou période de 10 jours,

[1]) Atti dell'Acad. Pontif. dei Nuovi Lincei, T. XVIII.

des courbes[1]) indiquant les variations météorologiques, telles que la force et la direction du vent, la quantité d'eau tombée, la température et l'état du baromètre, et, en dessous, les courbes magnétiques. Grâce à cette combinaison, Mr. SECCHI arrive au résultat que de toutes les perturbations de l'intensité, il n'en existe aucune qui ne soit simultanée avec une perturbation atmosphérique, ou qui n'arrive un ou deux jours plus tôt, et *vice versa:* qu'aucune bourrasque d'une certaine violence n'arrive sans être accompagnée d'une perturbation magnétique, soit que cette perturbation se manifeste par des mouvements extraordinaires ou par l'agitation violente des aiguilles, soit qu'elle se fasse sentir par un déplacement sensible de la position moyenne des instruments, sans que le mouvement périodique diurne régulier fasse défaut.

Un examen plus attentif de la courbe d'intensité dans ses rapports avec la direction du vent, amène l'auteur à poser: "que la partie haute ou ascendante de la courbe du bifilaire coïncide avec les vents du Nord et de l'Ouest, et la partie basse ou descendante avec ceux du Sud et de l'Est." Afin de démontrer cette proposition, les observations furent discutées en calculant pour chaque jour la direction moyenne du vent, et en indiquant le mouvement du bifilaire sous l'une des trois têtes de colonne: ascendant ou haut, descendant au bas, et perturbé. Une année d'observations, du 1 nov. 1859 au 1 nov. 1860, donna les résultats suivants:

Vent.	Bifilaire.		
	Ascendant ou haut.	Descendant ou bas.	Perturbé.
S.	20	81	10
E.	9	22	2
N.	119	17	6
O.	42	21	1
Totaux	190	141	19

Il se montre donc que, de 141 cas dans lesquels l'intensité avait été basse ou en diminution, 81 cas, c.-à-d. les $\frac{4}{7}$ se sont présentés simultanément avec le vent du Sud, et que, de 190 cas à haute intensité, 119 ou près des $\frac{3}{4}$ ont été accompagnés du vent du Nord. D'où Mr. SECCHI tire la conclusion mentionnée ci-dessus. On pourrait, ce nous semble, objecter avec

[1]) Voir Bullet. Meteorol.

raison que ces catégories, ascendantes ou hautes, descendantes ou basses, ne sont pas assez nettement déterminées, et qu'elles ne s'excluent pas, car l'intensité peut être ascendante sans être haute, et descendante sans être basse. On reste, par conséquent, dans l'incertitude si le point de vue déterminant a été la variation de l'intensité dans l'un ou l'autre sens, ou sa grandeur absolue. Nous verrons, par ce qui suit, que c'est le premier point de vue qui a été principalement considéré. Le travail dans lequel sont consignés ces résultats, est accompagné d'un tableau comparatif des variations magnétiques et météorologiques pendant les années 1859 et 1860, sur le même plan que les notes mensuelles insérées sous le titre *"Note al mese di*, etc.," dans le *Bull. Met. dell'Oss. del Coll. Romano.*

Des recherches ultérieures exécutées d'après la même méthode et communiquées un an plus tard [1]), constatent les résultats que nous avons déjà signalés, et conduisent à l'énoncé des propositions suivantes: 1:o, Aucune grande bourrasque n'arrive sans être ou précédée ou accompagnée simultanément de perturbations magnétiques, et *vice-versa*, aucune perturbation n'a lieu, sans une modification dans l'état du temps, soit immédiatement, soit simultanément, quoique cette modification ne soit pas toujours considérable à Rome. 2:o, Les grandes perturbations commencent et ont souvent leur maximum parfois deux, et quelquefois trois jours avant l'arrivée de la bourrasque. 3:o, Les grandes perturbations peuvent fournir un moyen de prévoir l'état du temps. — Un tableau des mouvements du bifilaire en combinaison avec le vent en prédominance, donne les chiffres suivants pour chaque jour de l'année 1861.

Mois.	Le bifilaire bas ou en baisse.				Le bifilaire haut ou en hausse.			
	E.	S.	N.	N.	E.	S.	O.	N.
Janvier	2	3	4	4	2	2	1	13
Février	1	11	3	0	2	4	2	5
Mars	1	4	5	3	0	5	4	9
Avril	0	7	5	0	0	5	5	10
Mai	1	8	5	0	1	1	7	8
Juin	0	7	3	1	1	2	7	9
Juillet	1	7	6	1	0	2	6	8
Août	0	10	5	0	0	2	4	10
Septembre	0	8	4	1	0	3	5	8
Octobre	1	8	2	1	0	1	3	15
Novembre	1	10	2	1	1	2	2	11
Décembre	0	5	0	3	0	2	0	21
Totaux	8	88	44	15	7	31	46	137
Rapport de chaque vent à la somme	0,53	0,74	0,44	0,11	0,77	0,38	0,52	0,88

[1]) Memorie II.

Des thèses si positives et dénotant des relations d'un tel poids, doivent naturellement, si elles se constatent pour d'autres localités par une étude comparative identique, présenter une importance scientifique et pratique incalculable. Mais s'il faut, d'un côté, leur reconnaître toute l'autorité que leur donne le nom de l'auteur, d'autre part, certaines objections se présentent dès l'abord et pour ainsi dire spontanément. En premier lieu, il est surprenant que l'intensité de la force magnétique, dont on s'est habitué à considérer les variations comme simultanées sur une grande partie de la terre, puisse présenter une relation avec la direction du vent à Rome. La méthode même employée dans les recherches nous paraît aussi présenter quelques périls. Il est souvent bien difficile de déterminer la direction prédominante du vent, puisque non-seulement la fréquence de chaque vent, mais encore sa force doit être prise en considération. Une discussion graphique, du genre de celle précitée, ne présente pas contre l'arbitraire les mêmes garanties qu'une discussion numérique, inconvénient d'autant plus grave, lorsqu'on s'est déjà déterminé pour une certaine opinion. Les catégories dans lesquelles les mouvements du bifilaire ont été répartis, ne nous paraissent pas s'exclure. En dernier lieu, cela doit être un sujet d'étonnement pour toute personne connaissant l'étendue des études sur le magnétisme terrestre, que des relations d'un caractère si déterminé aient pu échapper à tant d'observateurs. Aussi, d'un côté, du moins, les travaux de Mr. Secchi ont-ils rencontré une opposition que nous ne pouvons laisser inaperçue. Mr. A. Brown, jadis observateur à l'observatoire de Makerstown, et auquel on doit des travaux magnétiques et météorologiques d'une grande portée [1]), a engagé et entretenu dans cette matière une polémique dont la portée est de réduire très-sensiblement la valeur des découvertes de Mr. Secchi.

Des recherches relatives à l'influence de la température extérieure sur l'intensité horizontale, avaient déjà donné auparavant pour Makerstown un résultat négatif [2]), et l'on pouvait s'attendre à ce que la direction du vent ne présenterait pas non plus de relation avec l'intensité. Mr. Brown a établi une discussion spéciale [3]) sur les résultats donnés en 1844 par le bifilaire et l'anémographe. La moyenne de l'intensité horizontale diurne ayant été comparée avec la moyenne des 15 jours précédant et des 15 jours suivant celui de l'observation, la différence fut designée par +, si la moyenne diurne était supérieure, et par —, si elle était inférieure à la moyenne

[1]) Transact. of the Royal Soc. of Edinb., Vol. XVII, XVIII, XIX et XX, part II.
[2]) Ibid., Vol. XXIII. Introduction.
[3]) Comptes Rendus, T. LIII, p. 629.

qui servait de point de comparaison. Ainsi, il obtint (le tableu de SECCHI joint à titre comparatif):

Direction du vent à Makerstown, en 1844.	Intensité à Makerstown.		Direction du vent à Rome, en 1860.	Intensité à Rome.	
	Jours en +	Jours en —		Jours en +	Jours en —
Sud	39	39	Sud	20	81
Est	30	$16\frac{1}{2}$	Est	9	22
Nord	$27\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	Nord	119	17
Ouest	$63\frac{1}{2}$	49	Ouest	42	21

On aperçoit facilement que la concordance existante pour les vents d'Ouest, est par trop minime pour que l'on puisse y voir une constatation des thèses de Mr. SECCHI, et l'on est amené, comme Mr. BROWN, à attribuer au résultat romain un caractère exclusivement local.

En divisant par le nombre de jours la somme des différences entre la moyenne diurne et la moyenne mensuelle, on obtient la déviation moyenne pour chaque vent, exprimée en dix millièmes du composant horizontal:

Direction du vent à Makerstown, en 1844.	Moyenne diurne, au-dessus (+) ou au-dessous (—) de la moyenne mensuelle.
Sud	— 0.87.
Est	+ 0.88.
Nord	— 0.43.
Ouest	+ 0.28.

Après avoir classé, d'après une certaine norme, les vents en faibles et en forts, Mr. BROWN parvient au résultat: que le bifilaire a été au-dessous de sa position moyenne la plupart des jours où ont régné des vents faibles, tant du Nord que du Sud, mais au-dessus, avec de vents forts, et que la même circonstance a également eu lieu pour les vents d'Est et d'Ouest. Il suivrait donc de là, que les perturbations du bifilaire n'ont pas la moindre relation avec les bourrasques.

Pour démontrer avec encore plus d'évidence que les variations de l'intensité ne peuvent être attribuées à une cause aussi locale que la direction du vent, Mr. BROWN montre que le même calcul exécuté sur des observations faites en 1844 à Singapore (situé sous 1° 15′ lat. N., et $6^h\ 45^m$ long. E de Greenwich), donne, comme on le voit ci-dessous, un résultat presque entièrement conforme à celui de Makerstown:

Direction du vent à Makerstown, en 1844.	Intensité à Makerstown.		Intensité à Singapore.	
	Jours en +	Jours en −	Jours en +	Jours en −
Sud	39	39	$34\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{2}$
Est	30	$16\frac{1}{2}$	28	$17\frac{1}{2}$
Nord	$27\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	29	29
Ouest	$63\frac{1}{2}$	49	$61\frac{1}{2}$	51

Une recherche de la déviation moyenne pour Singapore par le même procédé que pour Makerstown, donna des valeurs identiques pour les vents de l'Ouest et du Sud.

Direction du vent à Makerstown.	Vents faibles.		Vents d'une force quelconque.		Vents forts.	
	Makerstown.	Singapore.	Makerstown.	Singapore.	Makerstown.	Singapore.
Sud.	−0.79	−0.63	−0.40	−0.32	−0.02	−0.01
Ouest.	−0.46	−0.26	+0.10	+0.07	+0.34	+0.23

De la concordance entre ces chiffres, Mr. BROWN conclut que les variations, lesquelles ne s'élèvent jamais à 0.0001 du composant entier, correspondant à un changement de température de moins d'un degré de l'instrument, ne peuvent être attribuées à la direction du vent, les vents à Makerstown et à Singapore n'ayant évidemment aucune connexion les uns avec les autres. Mr. BROWN explique le fait que les déviations de la valeur moyenne à Rome ou dans une autre localité se sont montrées les plus grandes à un certain vent, par la circonstance que ce vent était en prédominance à l'époque des plus grandes perturbations, c.-à-d. aux environs des équinoxes. Quoi qu'il en soit, l'influence de la direction du vent se montre, pour Makerstown du moins, très-insignifiante, même si l'on admet qu'elle ait été la cause des petites variations qui se voient dans le tableau précédent.

Le père SECCHI objecte à ces arguments, que les résultats de Mr. BROWN signifient une tout autre chose que les siens, la comparaison ayant porté à Makerstown sur la grandeur de l'intensité, et non, comme à Rome, sur le mouvement ascendant ou descendant de la courbe. On doit, toutefois, reconnaître que les en-tête cités: "*ascendente o alto*," et "*descendente o basso*", s'appliquent également bien à ces deux procédés. Relativement à la possi-

bilité d'influences locales sur la variation des éléments magnétiques, Mr. SECCHI déclare avoir abandonné l'opinion admettant une origine si universelle de cette variation, que la terre pourrait être considérée comme un aimant dont la force augmente ou diminue simultanément sur tous ses points. L'étendue des perturbations est sans doute immense, et elles comprennent parfois le globe tout entier; mais, comme preuve de causes relativement locales, Mr SECCHI cite, outre leur dépendance du temps et de la latitude du lieu[1]), divers cas où des localités assez rapprochées ont présenté une grande différence. Mr SECCHI signale au reste la grande difficulté d'une discussion telle que la sienne pour des contrées plus septentrionales, où les perturbations, tant magnétiques qu'atmosphériques se succèdent plus rapidement, et empiètent souvent l'une sur l'autre de manière à dissimuler encore davantage leurs rapports respectifs. Dans les climats méridionaux, les variations sont en général plus régulières, les perturbations plus rares et par conséquent plus distinctes. Les localités situées non loin de la mer se prêtent en outre moins que d'autres à l'étude du rapport de la direction du vent avec l'intensité, parce que les vents locaux y prédominent trop. Le père SECCHI voit dans ces diverses raisons la cause des résultats négatifs donnés par les observations de Makerstown, et il considère que dans les localités de ce genre, on doit restreindre ses recherches aux jours où le vent a eu une force telle, que la direction n'en a pu dépendre de circonstances locales; ou, en d'autres termes, lorsqu'une véritable bourrasque s'est présentée. Il fait observer "qu'une expérience de trois ans l'a confirmé dans l'opinion qu'à Rome, chaque grande bourrasque est ordinairement précédée ou suivie de perturbations magnétiques." En dernier lieu, il cite des observations tendantes à prouver la connexion entre la période diurne de l'électricité de l'air et du mouvement du bifilaire.

Il serait trop long de rendre compte de tout ce qui a été dit de part et d'autre dans le débat ci-dessus. Nous ne pourrons toutefois passer entièrement sous silence les dernières publications de Mr BROWN sur ce sujet. Dans l'une d'elles[2]), il essaie de prouver que les mouvements du bifilaire ne présentent pas d'irrégularités de quelque importance au temps des bourrasques et immédiatement autour de ce temps. Dans ce but, il a extrait, de deux ans d'observations, les jours pendant lesquels la force du vent a dépassé une certaine limite (une pression de 4 $\overline{w}$ anglaises par pied carré). Ces jours ont été considérés comme "jours de bourrasque". La

---

[1]) Voir, à cet égard, ce qui a été dit plus haut, p. 5 — note 2.

[2]) C. R., T. LVI, p. 540.

courbe d'intensité pour chacun de ces jours a été comparée avec la courbe d'intensité du mois respectif, et la différence entre les ordonnées indépendamment du signe, a été regardée comme la déviation pour chaque cas; celle-ci, à son tour, comparée avec la déviation moyenne, a conduit au résultat: que le jour de bourrasque et le jour suivant présentent une déviation *inférieure*, mais le jour avant la bourrasque, une déviation légèrement *supérieure* à la déviation ordinaire. Pour les jours des 2 années auxquels la force du vent a été la plus grande, la même résultat moyen a été obtenu.

Les 10 jours pendant lesquels la déviation de l'intensité de la valeur moyenne se montre la plus grande, furent ensuite extraits. Le maximum de la force du vent tant pour ces jours que pour ceux de la veille et du lendemain, fut comparé avec la moyenne de la force maxima du vent pendant chaque jour, et le résultat fut qu'elle était parfois supérieure, parfois inférieure à son maximum normal. A la règle, les jours les plus rapprochés des perturbations se montrèrent plus calmes que d'ordinaire.

Pendant les 10 jours où l'oscillation de l'intensité (*diurnal range*) se montra la plus grande, le maximum de la force du vent fut inférieur au maximum moyen.

Mr BROWN pense avoir de la sorte totalement réfuté l'hypothése du père SECCHI sur la relation des perturbations magnétiques avec les bourrasques, et le hazard a voulu que les chiffres donnassent un appui à des relations parfaitement opposées. Il n'a, quant à lui, jamais trouvé que des concordances purement accidentelles entre les deux phénomènes en question, et pense que les résultats de SECCHI sont dus à ce qu'il n'a pas corrigé les observations pour la température, reproche revenant peut-être bien souvent dans la polémique de Mr BROWN, laquelle conclut au rejet absolu de toutes les relations énoncées par le père SECCHI. Celui-ci répond, de son côté: 1:o, que son adversaire n'a pas voulu se placer dans le même milieu, ne regardant, trop exclusivement, comme "jours de bourrasque", que ceux où, pendant la journée, la force maxima du vent s'est élevée à une certaine pression par pied carré; manière de procéder par trop exclusive, puisque, outre la force du vent, un grand nombre d'autres éléments concourent à la caractérisation d'une bourrasque; 2:o, que Mr BROWN n'a pas eu égard à la direction du vent, circonstance qui a dû amener un résultat négatif, des vents divers agissant diversement; 3:o, qu'il ne suffit pas de limiter les recherches au jour précédant ou suivant immédiatement la perturbation, puisque les bourrasques ne surviennent que 2, 3 ou 4 jours après les variations irrégulières subies par l'aiguille aimantée. En dernier lieu, voici ce que le père SECCHI répond à l'énoncé que la négligence de la corrrection de la

température a été la cause des résultats obtenus: "l'instrument employé était si bien protégé contre les variations de la température, que, comme le prouvent les observations mentionnées à cette occasion, les variations susdites ne se sont pas élevées à plus de 1 à 4° F. pendant un jour où la variation de la température extérieure avait été de 28° F.; qu'en général, cette variation a été encore plus petite, et qu'aucune observation n'a été considérée comme perturbée, pour autant qu'elle ne s'est pas écartée de la moyenne, de plus de 4 à 5 divisions correspondants à 4 à 5° F." Nous devons cependant ajouter que l'un au moins de ces arguments n'est pas très-bien fondé, savoir celui que, dans ses dernières recherches, Mr. BROWN a négligé la direction du vent. Du moment où, comme le fait observer aussi Mr. BROWN dans sa dernière réponse[1]), il s'agissait de prouver que la déviation du bifilaire de la valeur moyenne pendant les vents forts n'est pas plus grande que dans les vents faibles, il n'était pas nécessaire de distinguer entre les directions différentes, quand on ne distinguait pas entre les signes de la déviation magnétique.

Peut-être n'avons-nous qu'imparfaitement rendu compte de la polémique échangée entre les deux auteurs, mais notre exposé comprend du moins la substance de leurs écrits pour autant que nous les avons eus à notre disposition. Si, partant de ce qui vient d'être dit, nous osions formuler un jugement sur l'état de la question, ce jugement serait plutôt contre que pour les suppositions du père SECCHI. Car, même en admettant qu'elles ne concernent que Rome, on devrait trouver aussi pour d'autres lieux, sinon les mêmes relations, du moins d'autres rapports déterminés, vu que ce serait une complète absurdité d'admettre une exception pour Rome à cet égard. Nous avons signalé les inconvénients que présente la méthode graphique. Elle peut, sans doute, donner des indices et des constatations, mais les preuves effectives doivent en tous cas être fournies par une discussion numérique. A l'époque des publications dont nous nous sommes occupé, l'observatoire de Rome ne possédait pas encore de série d'observations assez longue et suffisamment travaillée pour permettre une discussion de cette nature. Elle a toutefois été faite plus tard[2]), et semble démontrer d'une manière infiniment plus satisfaisante l'existence du rapport dont il est question.

---

[1]) C. R., T. LVII, p. 342.

[2]) Rid. delle Osserv. Magn. fatte all'Oss. del Coll. Rom. dal 1859 al 1864, Estr. dagli Atti dell'Accad. Pontif.

Le tableau suivant donne en divisions d'échelle la variation et la position moyenne du bifilaire pendant les jours de chaque mois où la direction du vent était en prépondérance du Nord au Sud, et où il est tombé de la pluie.

La variation a été obtenue en prenant la différence entre le maximum et le minimum, la position moyenne a été calculée en prenant la moyenne entre les deux extrêmes. Dans cette recherche, le père SECCHI considère comme venant du Nord tous les vents de l'ENE. par N. à l'OSO.; comme venant du Sud, tous les vents de l'E. par S. au SO., "l'expérience ayant démontré que dans l'action exercée par les bourrasques sur les aimants, le vent d'E. pur est identique au vent du S." Quand le vent était variable, il le regarde comme Sud, si le changement se faisait dans le sens direct NESON., et comme Nord, pour le sens opposé, c.-à-d. NOSEN.,"vu", pour nous servir des paroles mêmes de l'auteur; "que nous avons constaté dans le premier cas la prépondérance du vent du S., et celle du vent du Nord dans le second". Sous la tête de colonne *pluie*, la variation est donnée pour tous les jours où il est effectivement tombé de la pluie à l'observatoire, en ajoutant quelques cas où elle a paru à l'horizon. Toutes les observations sont réduites à une seule et même température de 50° F.

Variation diurne du bifilaire par rapport au vent et à la pluie.

Mois.	Moyenne de cinq ans.		
	Sud.	Nord.	Pluie.
JANVIER....	9.48	7.48	11.48
FÉVRIER....	10.58	7.80	11.70
MARS.....	11.00	6.64	11.62
AVRIL	10.30	7.84	11.82
MAI.....	10.06	7.90	11.82
JUIN	10.24	8.88	13.90
JUILLET....	12.22	9.10	15.50
AOÛT.....	13.78	10.40	17.92
SEPTEMBRE..	13.04	10.00	13.46
OCTOBRE ...	12.86	7.83	12.14
NOVEMBRE..	12.78	7.78	12.18
DÉCEMBRE..	9.96	7.70	13.36
Moyenne..	11.35	8.25	13.00

Position moyenne du bifilaire par rapport au vent et à la pluie

Année.	Moyenne de cinq ans.		
	Sud.	Nord.	Pluie.
1860	105.85	108.54	105.15
1861	121.81	124.43	122.51
1862	137.44	140.04	139.24
1863	152.07	154.13	152.04
1864	167.48	170.02	168.16
Moyenne.	136.93	139.43	137.46

Des chiffres donnés ci-dessus, Mr. SECCHI tire les conclusions suivantes relativement à la variation diurne: Elle est en moyenne plus grande avec le vent du Sud qu'avec le vent du Nord, et présente son maximum en temps de pluie. Deux mois seulement sur soixante font exception. La différence est trop grande pour être considérée comme accidentelle. Elle est insignifiante entre les jours avec le vent du Sud et ceux avec la pluie, vu que, le plus souvent, la pluie vient avec un vent du Sud ou avec un vent variable. La pluie est la plus active des causes météorologiques amenant des variations magnétiques.

Les conclusions suivantes se réfèrent à la position moyenne du bifilaire: Il donne une valeur plus grande avec le vent du Nord qu'avec celui du Sud; en moyenne, la différence est de 2,5 divisions[1]), circonstance à l'égard de laquelle 6 mois sur 60 font seuls exception. Les jours de pluie donnent une valeur intermédiaire entre celles des vents du Nord et du Sud.

Il résulte de ces faits que, si, pendant la pluie, les variations sont considérables, la moyenne diurne varie par contre d'une manière insignifiante, et qu'elle paraît principalement dépendre de la modification générale du temps et du vent, de même que de l'approche ou de l'éloignement des grandes bourrasques.

Le tableau suivant donne les résultats d'une discussion semblable sur la dépendance de la déclinaison tant de la direction du vent que de celle de la pluie. Il ne comporte que la variation et non la valeur absolue.

---

[1]) Une division étant égale à environ 0.0001 du composant total. Bull. Met. Vol. V, p. 4.

Variation diurne de la déclinaison par rapport au vent et à la pluie[1]).

Année.	Sud.	Nord.	Pluie.
1860	8.31	7.13	8.92
1861	7.71	7.16	8.00
1862	6.99	6.07	6.66
1863	6.23	5.30	6.29
1864	6.71	5.55	6.72
Moyenne	7.199	6.248	7.318

Il résulte de ce tableau, que la variation de la déclinaison est à son minimum avec le vent du Nord, qu'elle est plus grande sous l'influence du vent du Sud, et qu'elle atteint son maximum avec la pluie. Après ces faits, il serait difficile de nier qu'il n'existe, pour Rome du moins, une relation effective entre la direction du vent et les variations des instruments magnétiques. Les exceptions à la règle donnée ont été, comme on l'a vu, excessivement rares. Nous ne pouvons au reste trouver, contre la méthode employée, aucune objection de nature à diminuer d'une manière essentielle la certitude du résultat. On pourrait sans doute être autorisé à la remarque que, sur tel point, comme, p. ex., la détermination de la direction du vent pendant les jours où il varié, l'auteur a posé des bases qui ne sont pas prouvées; mais cette remarque n'attaque rien d'essentiel. La concordance si remarquable entre les soixante mois qui entrent dans le calcul, n'a pu être amenée par un procédé fautif, puisque, même en admettant une méthode inexacte, la concordance trouvée serait tout aussi inexplicable.

Nous avons signalé dans les pages précédentes des calculs semblables pour d'autres lieux, savoir ceux de Schübler pour Hofwyl en Suisse et pour Tubingue, de même que ceux de Mr. Brown pour Makerstown. Les premiers sont en opposition complète avec les calculs de Mr. Secchi, c.-à-d., qu'ils paraissent démontrer que dans les localités mentionnées, les variations de déclinaison sont plus grandes lorsque le ciel est clair que lorsqu'il est voilé; ou, en d'autres termes, plus grandes sous l'influence du vent du Nord que sous celle du vent du Sud. Ces résultats reposent toutefois sur des matériaux qui ne peuvent être considérés suffisants, ou qui, du moins, sont considérablement inférieurs à ceux réunis à Rome. A l'égard des recherches de Mr. Brown, nous signalerons plus bas les circonstances qui l'ont forcément amené à des résultats négatifs.

[1]) En divisions d'ont une est égale à 1'36884. Bull. Met. Vol. V, p. 3.

III.

RAPPORTS ENTRE LES PERTURBATIONS MAGNÉTIQUES ET LA VARIATION DE LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

Les opinions énoncées dans les pages précédentes et les recherches dont il a été rendu compte, nous ont paru d'une valeur assez grande pour nous engager à nous occuper de recherches de ce genre. Or, lorsqu'on essaie de constater les relations entre les modifications du magnétisme terrestre et les phénomènes atmosphériques, on doit admettre que ces relations se manifestent le plus clairement dans les cas où les phénomènes magnétiques ou météorologiques revêtent un caractère très-prononcé, c.-à-d. lorsqu'ils se présentent avec une force au-dessus de l'ordinaire. On pourrait ainsi se servir de deux procédés différents, c.-à-d. prendre pour point de départ ou les perturbations ou les bourrasques. A ce double égard, on peut ou explorer l'état de l'atmosphère pendant les perturbations magnétiques, ou étudier les phénomènes magnétiques quand l'état de l'atmosphère dévie de manière ou d'autre de l'état normal. Nous avons choisi la première de ces méthodes, vu qu'elle permet de déterminer avec certitude et facilité le moment où des perturbations magnétiques ont eu lieu, but dans lequel il suffit d'avoir à sa disposition des observations d'une seule localité, tandis que l'on ne peut constater les grandes perturbations dans l'équilibre de l'atmosphère sans des observations exécutées sur un grand nombre de points très-distants l'un de l'autre.

Dans les pages précédentes, nous avons exposé l'étroite relation des perturbations magnétiques avec l'aurore boréale, et signalé l'aire considérable de ces phénomènes. En raison de cette propriété, il sera nécessaire, du moment où il s'agit de rechercher si leur présence est en connexion avec une certaine disposition de l'atmosphère, d'étudier ce dernier sur un espace aussi grand que possible; et, comme l'on ignore la nature d'action réciproque que l'on cherche, c.-à-d. comme l'on ne connaît pas si c'est la température, la direction du vent, la quantité des nuages, l'humidité ou la pluie, qui constitue le principal agent au point de vue magnétique, on emploiera de préférence les observations influencées par tous les éléments météorologiques à la fois. Les observations barométriques sont celles qui remplissent le mieux ces conditions. Nous savons que la marche du baromètre est relativement libre d'influences locales, qu'elle est intimement liée à chaque modification de l'état du temps, et, en dernier lieu, qu'elle se trouve

dans des rapports connus avec les variations des autres instruments météorologiques. Les observations barométriques fournissent par conséquent sous plusieurs rapports une connaissance exacte de l'état du temps, non-seulement pour les lieux même d'observation, mais encore pour les régions environnantes. Aussi cette cause les rend-elle particulièrement applicables, selon nous, à des recherches de la nature de celles-ci. Il résulte des travaux du père SECCHI, que, pour Rome, la direction du vent et la pluie exercent une influence sur certaines variations magnétiques. Il n'est guère possible d'infirmerce fait après les chiffres que nous avons cités. Or, si les propositions du père SECCHI sont valables pour Rome, elles doivent être valables aussi pour d'autres lieux plus ou moins distants. Comme on le sait, la météorologie plus récente[1]) a réussi à constater la dépendance de la direction du vent de la répartition de la pression, non-seulement pour des cas particuliers et sur une surface limitée, mais encore sur une échelle beaucoup plus grande, puisqu'on a trouvé que la même loi régissant les cas particuliers, se manifeste aussi sur une partie considérable de la surface terrestre, lorsqu'on compare la direction moyenne du vent avec la répartition de la pression atmosphérique.

On est donc pleinement autorisé à la supposition que, si la direction du vent a présenté une relation avec les variations magnétiques, cette relation se montrera aussi dans la répartition de la pression, représentée par les lignes isobariques. Une construction de ces lignes pour une foule de cas spéciaux, conduirait probablement à la certitude sur la relation dont il est question ici. Mais ce travail exigerait des matériaux encore à peine existants et des travaux auxquels il est inutile de se livrer avant que les raisons d'espérer un résultat ne soient ultérieurement fortifiées.

Le système de circulation atmosphérique constaté par des observations récentes, du moins à l'égard de l'hémisphère Nord, montre clairement que l'influence des bourrasques s'étend sur des régions d'une immense étendue. Pour discuter les variations dans la répartition de la pression atmosphérique, de la nature de celles accompagnant les tempêtes équinoxiales, l'Europe est une région trop restreinte, à l'égard de laquelle on ne possède pas même des observations suffisantes. En second lieu, donner une forme exacte à des recherches se fondant sur des procédés graphiques, rencontre parfois certaines difficultés. La manière la plus facile d'y remédier, est d'établir une discussion numérique disposée de façon à éviter tout arbitraire, question

[1]) A. BUCHAN, Handy Book of Meteorology; et "On the mean pressure of the Atmosphere and the prevailing winds over the Globe for the months and for the year." Transact. of the R. Soc. of Edinburgh. Vol. XXV, p. II, 1868—69.

d'une grande importance dans une matière aussi sujette à discussion que la nôtre. Cette méthode est moins propre, il est vrai, à faire connaître la nature du phénomène, mais la première chose à faire, c'est de constater une relation d'une manière irréfutable et sous une forme parfaitement déterminée, même si l'on ne réussit pas à démontrer l'origine de ce phénomène ni à en donner l'explication. C'est dans ce but que nous avons entrepris les calculs dont nous allons rendre compte.

Partant de ce qui a été dit plus haut relativement à l'utilité des observations barométriques pour notre but, nous avons essayé de trouver les variations de la pression atmosphérique aux époques d'aurore boréale et de perturbations magnétiques, et nous avons pour cette cause inscrit dans un tableau l'état moyen du baromètre pour le jour où les perturbations ont eu lieu, et pour un certain nombre de jours (ordinairement trois) tant avant qu'après. On obtient de la sorte, par la moyenne des chiffres de chaque colonne, la variation de la pression atmosphérique en moyennes diurnes. Il eût sans doute été à désirer de pouvoir déterminer par un plus grand nombre de points situés plus près l'un de l'autre la courbe indiquant la marche moyenne du baromètre, mais cela aurait été difficile, principalement pour deux raisons: la première, c'est que les perturbations magnétiques d'une force extraordinaire continuent souvent si longtemps, qu'elles ne peuvent être supposées durer moins d'un jour; la seconde, c'est que le calcul de moyennes eût été singulièrement pénible, tant parce que le nombre s'en fût trouvé beaucoup plus grand, que parce que l'on ne rencontre jamais dans les ouvrages météorologiques des moyennes calculées pour moins de 24 heures.

S'il n'existait aucune relation entre la marche du baromètre et les variations magnétiques extraordinaires, la pression d'un jour ne devrait pas être en moyenne plus grande que celle d'un autre jour, dès que le nombre des jours est suffisant pour rendre les différences accidentelles sans influence sur la valeur moyenne, et si les jours sont répartis sur les différentes saisons de telle sorte que la différence ne peut s'expliquer par la variation annuelle de la pression. Si, p. ex., le baromètre présentait en moyenne pour une localité une hausse non interrompue avant et après la perturbation, cela pourrait dépendre de ce que la plupart des jours entrant dans le calcul tombent dans la saison où la pression barométrique va en augmentant. Si, par contre, le nombre des jours est suffisant et que la variation moyenne de la pression ne peut dépendre de la variation annuelle, elle montre qu'un certain mouvement du baromètre est en prédominance pendant les perturbations. Il est naturel qu'il faille aussi avoir égard à la grandeur du

mouvement moyen. La question de la quantité qu'il doit atteindre pour être considéré comme concluant, dépend du nombre des jours et de la force des perturbations atmosphériques. Cette quantité ne peut sans doute jamais être fixée, mais il existe différents moyens de contrôler un résultat obtenu. Ainsi, relativement à un seul et même lieu, ou s'il s'agit de lieux très-voisins l'un de l'autre, la variation doit être la même pour des jours appartenant à des series différentes d'années, de sorte que si un calcul comprend, p. ex., 80 jours, les 40 premiers jours et les 40 derniers, de même que tous les 80 donnent des résultats concordants entre eux. Ensuite, on doit s'attendre à ce que la modification de la pression qui accompagne l'aurore boréale se présente aussi quand les perturbations magnétiques sont de la nature de celles ordinairement observées pendant le phénomène en question. Or, il est clair qu'une concordance semblable ne peut être accidentelle. L'exposé qui suit démontrera, nous l'espérons, que cette concordance existe réellement. L'objet de notre recherche est de trouver *la variation barométrique prépondérante:* 1:o. Quand l'aurore boréale a été observé, soit sur un point quelconque, soit simultanément sur une grande surface; 2:o. quand il s'est présenté des perturbations magnétiques. On pourrait peut-être objecter, à l'égard du premier point, que l'on exclut une foule de cas où, par suite de l'état voilé du ciel, l'aurore boréale n'a pu être observée. Mais cette objection n'aura d'importance que du moment où la variation barométrique obtenue pourrait être expliquée par cette ommission. Si l'on trouve, p. ex., que l'aurore boréale coïncide avec un maximum barométrique, cela pourrait provenir de la circonstance que le ciel a dû être relativement clair et par conséquent le baromètre haut, les jours où l'aurore boréale a été visible. Si, par contre, la moyenne barométrique est basse ou descendante, les cas exclus, c.-à-d. les jours voilés, dans lesquels l'aurore boréale a été invisible, auraient probablement augmenté la descente du baromètre. Si donc notre calcul ne peut être considéré concluant pour les cas où le baromètre monte lorsqu'il y a aurore boréale, il constitue une preuve d'autant plus forte quand le baromètre tombe; mais, même dans le premier cas, il peut cependant servir de contrôle, vu que, d'après ce qui a été dit plus haut, il doit donner le même résultat que le calcul appliqué aux jours où les variations magnétiques ont été semblables à celles qui accompagnent l'aurore boréale.

On peut s'attendre à ce que, par suite de l'étendue de l'aurore boréale, les mouvements atmosphériques qui coïncident avec elle se fassent sentir sur des régions très-vastes, même lorsque de circonstances accidentelles ont empêché qu'elle ne fût observée partout. Si, p. ex., elle a été observée simultanément à Bruxelles, Paris, Turin, Rome, Christiania et Saint-

Pétersbourg, le mouvement atmosphérique dont elle a été accompagnée, a dû s'étendre aussi à Vienne et à Upsal, même si l'aurore boréale n'y a pas été visible. Nous avons, par conséquent, cherché la variation barométrique sur certains points, tant lorsque l'aurore boréale y a été visible, que lorsqu'elle s'est présentée sur une vaste surface, sans avoir égard à la circonstance qu'elle ait été visible ou non dans la localité que le calcul concerne.

La seconde partie de notre recherche comprend le calcul des variations de la pression pendant les perturbations magnétiques. Nous n'avons fait entrer dans ce calcul que les jours où les perturbations ont été fortes et réitérées. Les observations perturbées isolées, sont, du moins à des latitudes élevées, par trop nombreuses, et elles peuvent se présenter à des jours où la marche des instruments ne trahit pas une de ces perturbations générales dans l'équilibre des forces magnétiques, désigné sous le nom d'orage magnétique. Il a donc été nécessaire de rechercher les jours des plus fortes perturbations. Heureusement, il existe des travaux spéciaux à l'égard de ces phénomènes. Nous en avons consulté deux, savoir: "Abstracts of the magnetic observations from 1841—1857, made on days of great magnetic disturbance" [1]), et "Observations on days of unusual magnetic disturbance", le premier rédigé sur les observations de Greenwich, le second sur les observations faites dans les colonies anglaises. Le premier travail comprend plus de 170 orages magnétiques observés à Greenwich de 1841 à 1857.

Nous renvoyons à l'avant-propos qui précède les observations, pour la méthode suivie dans la construction des tableaux qui en contiennent les résultats. Nous remarquerons toutefois que chaque jour y a été traité comme un orage magnétique spécial, sans connexion avec les autres.

Relativement à la variation de la déclinaison, il appert: que sur 100 cas, soit sur 50 % du total, la perturbation moyenne ("mean disturbance") a été négative, c.-à-d. orientale; que 63 % du total des orages ont commencé, et 60% ont fini avec une perturbation occidentale, fait qui s'explique par la circonstance que l'orage est censé commencer et finir à midi, et que, comme il a été signalé p. 17, la déclinaison occidentale augmente pendant le jour qui précède l'aurore boréale. Quant à la perturbation moyenne de l'intensité horizontale, elle n'a été positive que dans 22 cas, soit 8% du total. De ce même total, 66% commencèrent et 91% finirent par une perturbation négative (c.-à-d. par une diminution d'intensité) du composant horizontal. Il se montre donc ici que l'influence de la perturbation sur la valeur moyenne est infiniment plus grande que pour la déclinaison, et que

[1]) Greenwich Obs. 1862.

l'intensité a besoin d'un temps plus long pour revenir à sa valeur normale, tandis que, par contre, la diminution est très-rapide.

Le second des travaux cités: "Observations on days of unusual magnetic disturbance", est rédigé sur un plan tout-à-fait différent. La seule partie que nous ayons eue à notre disposition [1]), comprend des observations de Toronto, Sainte-Hélène, Cap de Bonne-Espérance et Hobart-Town (Terre de van Diemen), pour les années 1842, 43 et 44. Chaque jour n'y est pas considéré comme un orage magnétique spécial, et la perturbation moyenne n'a pas été calculée. Nous ne pouvons donc pas distinguer ici comme pour les observations de Greenwich, entre les jours où la perturbation a agi dans l'une ou dans l'autre direction. Nous avons, pour cela, réuni tous les jours de perturbation en une seule catégorie, et nous pouvons nous attendre en conséquence à ce que la variation barométrique qui se montre en excès pendant ces jours-là, appartiendra à la variation magnétique caractérisant les perturbations, c.-à-d. à la diminution de l'intensité. On verra plus loin que ce procédé donne un résultat conforme à ceux obtenus à d'autres égards pour Toronto. Nous nous rappelons [1]) de la "Riduzione delle osservazioni magnetiche" citée plus haut (p. 33—36) du père SECCHI, que la relation entre les phénomènes météorologiques et les phénomènes magnétiques apparut le plus clairement dans la discussion du composant horizontal, dont la grandeur absolue et l'excursion diurne se montre en relation déterminée avec la direction du vent et la pluie; nous nous rappelons en outre que ce fut principalement l'excursion (la différence entre le maximum et le minimum) qui donna le plus nettement la règle suivante, savoir: "que cette excursion est plus grande avec le vent du Sud qu'avec celui du Nord, et le plus grande les jours où la pluie tombe, tandis que la valeur absolue du composant horizontal présente un rapport opposé". Ces deux propositions reviennent à la même en réalité, vu que les variations sont plus grandes principalement lorsque l'intensité est basse, et petites, quand elle est haute, circonstance dont il est facile de se convaincre par toutes les observations magnétiques comprenant les moyennes diurnes et l'excursion diurne du composant horizontal. L'opposition signalée ci-dessus dans la direction du vent, doit aussi se faire sentir dans une variation barométrique opposée. Nous avons essayé de constater ce fait pour quelques localités, savoir Rome, Vienne et Makerstown, en tirant des observations magnétiques les jours de chaque mois où, pour Vienne et Makerstown, l'intensité a présenté son maximum et son minimum, et pour Rome, ceux où l'excursion a été le plus forte et

[1]) Vol. I, part II.

le plus faible, puis en calculant l'observation barométrique avant et après ces jours. Nous avons fait un calcul identique à l'égard de Munich, pour les jours où l'intensité a présenté une valeur plus haute ou plus basse qu'à l'ordinaire[1]), toutefois sans prendre le maximum ou le minimum précis de chaque mois, ce qui n'a pu se faire, le calcul des moyennes diurnes n'étant pas exécuté. Nous avons aussi été en mesure de constater cette opposition par les observations de Greenwich sur les orages magnétiques, observations permettant de distinguer entre les cas où la perturbation moyenne du composant horizontal a été négative, et ceux où elle a été positive, ou, en d'autres termes, entre les cas où les observations perturbées ont été au-dessous ou au-dessus des valeurs moyennes.

Comme, parfois, l'aurore boréale et les perturbations se répètent pendant plusieurs jours consécutifs, et ordinairement lorsqu'elles présentent leur maximum d'intensité, on est peut-être autorisé à la supposition que le mouvement atmosphérique accompagnant ces phénomènes, doit être à ces occasions encore plus étendu que dans celles où les perturbations présentent une plus courte durée. Nous avons donc distingué, pour Greenwich, entre les cas où un jour seulement a été signalé comme perturbé, et ceux auxquels la perturbation s'est fait sentir pendant plusieurs jours consécutifs, quoique, du reste, nous ayons traité ceux-ci de la même manière que les premiers; considérant chaque jour comme un orage spécial, nous en avons inscrit la pression barométrique dans la colonne médiane, et fait entrer dans les autres colonnes les trois jours précédents et les trois jours subséquents. Le sens du mouvement au jour même de la perturbation, doit être identique dans les deux cas, mais la grandeur et la durée de la variation peuvent être différentes.

On obtient aussi, grâce à cette distinction, un plus grand nombre de moyennes, augmentant la possibilité de contrôler la concordance des résultats.

La plus grande difficulté qu'ait présentée notre recherche, est provenue du manque d'observations météorologiques et magnétiques suffisamment longues et travaillées d'une manière convenable. Comme les perturbations intenses ne se présentent que quelques jours par an, le nombre des années doit être d'autant plus grand pour que les moyennes soient suffisamment sûres. En outre, pour faire la comparaison indiquée ci-dessus, il faut avoir à sa disposition les moyennes diurnes de la pression et du composant horizontal calculées d'avance.

---

[1]) D'après: Schwankungen der Horizontalen Intensitet, etc. Ann. der Münchener Sternwarte.

Or, les recueils d'observations n'ont donné jusqu'ici ces valeurs que pour quelques lieux, ce qui rend le travail à exécuter très-pénible. Finalement, nous n'avons pu nous servir que d'une partie des ouvrages publiés, vu que plusieurs d'entre eux n'indiquent pas les jours perturbés ou ne contiennent pas les moyennes diurnes.

Les Tableaux I, II, III ci-dessous, donnent le résultat des calculs faits. La 1ère colonne est destinée au nom des localités respectives, la 2ème donne la période de temps comprise dans le calcul, la 3ème, le nombre des jours. Les colonnes 4—10 donnent la variation barométrique en mm. pour les jours immédiatement avant et après la perturbation. Les chiffres de ces colonnes ont été obtenus en soustrayant la moyenne barométrique d'un certain jour, prise pour point de départ et désignée dans le Tableau par 0,0, de cette même quantité pour les autres jours. Pour zéro l'on a pris soit la valeur maxima soit la valeur minima. Par suite, les signes — dans le premier cas, + dans le second, seront pour chaque ligne les mêmes dans toutes les colonnes et la diminution successive des chiffres vers 0,0, indiquera une hausse ou une baisse successive. Cet arrangement facilite l'aperçu des résultats, de même que de la grandeur et du sens de la variation. On retrouve toujours le jour de la perturbation dans la 7ème colonne, marquée par des lignes doubles. La onzième cite l'autorité d'après laquelle le jour a été déterminé; en dernier lieu, B. B. signifie BUYS BALLOT, Nederl. Meteor. Jaarboek; B., BOUÉ, Katalog der Nordlichter; U. O., Observ. faites à Upsal; G. O., Greenwich Observations; T., O., Magn. and Meteor. Obs. made at Toronto; M. O., Makerstown Observ.; L. A., LAMONT, Ann. der Münchener Sternwarte; S. D., SABINE, Obs. on days of disturbance; et A. M., KUPFFER, Annuaire Magn.[1])

[1]) Les travaux d'où j'ai tiré les observations météorologiques, sont les suivants: EDLUND, Meteorol. Iakttagelser i Sverige; Obs. Météorol. faites à l'Observatoire d'Upsal. (Manuscrit); Greenwich Magn. and Meteor. Obs.; Meteor. Beobacht. an der Wiener Sternwarte; BROWN, Makerstown Magn. and Meteor. Obs., Transact. of the Royal Society of Edinbourgh; SABINE, Obs. made at the Magn. and Met. Obs. at Toronto; KUPFFER, Annuaire Magn. et Météor., et Annales de l'Obs. central de Russie; Meter. Beob., aufgezeichnet auf Christiania Obs.; LAMONT, Annalen der Münchener Sternwarte.

Tabl. I. Perturbations Magnétiques.

Localité.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes. Jours avant. 3.	2.	1.	Jour d'aur.	Jours après. 1.	2.	3.	Jours déterminés d'après:
Barnoul	1841—57	88	−0.5	−1.4	−1.9	−0.7	0.0	−1.0	−1.3	G. O.
Ekatérinenbourg	1842—44	79		−2.1	−0.8	−0.3	0.0	−0.5	−1.1	T. O.
St.-Petersbourg	1843—57	46	−1.0	−1.4	−1.4	0 0	−0.6	−1.3	−1.6	G. O.
„ „	1842—44	77		−0.4	−0.1	0.0	−0.5	−1.1		T. O.
Upsal	1841—54	84	−1.0	−0.6	−0.8	0.0	0.0	−0.4	−0.4	G. O.
„ [1])	1841—57	67	−3.1	−3.9	−4.2	−4.0	−2.7	−1.0	0.0	„
Christiania . . .	1842—47	32	−2.5	−1.1	−0.1	0.0	−0.6	−1.6	−0.4	„
Makerstown. . .	1843—46	177		+1.0	+0.9	+0.5	+0.2	0.0	+0.7	M. O.
„ . . .	1843—46	136		+1.0	+1.5	+0.9	+0.8	0.0	+0.3	„
Greenwich . . .	1843—57	85	+2.2	+1.3	+1.2	+0.7	0.0	+0.2	+1.3	G. O.
„ [1]) . . .	1843—57	58	+2.2	+1.1	+0.2	0.0	+0.9	+1.8	+1.1	„
Utrecht	1853—57	28	+1.9	+2.2	+1.8	+1.4	−0.4	0.0	+1.9	„
Helder	1853—60	36	+0.8	+0.9	+0.1	+0.1	0.0	+0.1	+1.0	B. B.
Brest	1863—66	38	+0.7	+0.4	+0.4	+0.4	0.0	+0 8	+1.4	L. A.
Vienne	1841—55	77	+2.1	+1.6	+0.7	+0.2	0.0	+0.3	+0.6	G. O.
„ [1])	1841—54	58	+1.7	+1.8	+0.7	+0.1	0.0	+1.0	+1.6	„
Rome	1657—67	77	+1.4	+0.9	+1.0	+1.0	+0.7	+0.3	0.0	B. B.
Lisbonne	1859—63	36	+1.4	+1.2	+1.0	0.0	+0.2	+0.2	+0 1	„
Lougan	1842—57	80	−0.1	−0.5	−0.4	−0.2	−0.3	0.0	0.0	G. O.
Toronto	1842—44	77		−1.2	−1.7	−0.4	0.0	−1.2		S. D.
„	1841—48	66	+0.1	−1.2	−0.9	−0.7	−0.7	−0.4	0.0	G. O.
Sitka	1843—51	38	+0.7	+2.2	+2.0	+2.2	+0.7	0.0	+2.0	A. M.
„	1842—44	79		+0.5	+0.6	+0.4	0.0	+0.2	+0.2	S. D.

Tabl. II. Aurores boréales visibles sur une étendue considérable.

Localité.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes. Jours avant. 3.	2.	1.	Jour d'aur.	Jours après. 1.	2.	3.	Jours déterminés d'après:
Haparanda. . .	1859—66	16	−2.2	−3.2	−2.6	−1.8	0.0	−1.9	−2.7	B. B.
Upsal	1840—62	40	−3.3	−4.7	−5.2	−3.6	−1.7	−1.4	0.0	B. et B. B.
Greenwich . . .	1843—66	34	+0.9	+2.2	+1.3	+0.7	+0.7	0.0	+0.1	„ „
Vienne	1839—52	31	+3.7	+1.6	+0.4	0.0	+0.3	+1.1	+1.7	B.

[1]) Plusieurs jours consécutifs perturbés.

Tabl. III. Aurores boréales visibles au lieu d'observation.

Localité.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes.							Jours déterminés d'après:
			Jours avant.			Jour d'aur.	Jours après.			
			3.	2.	1.		1.	2.	3.	
Haparanda. . .	1865—66	80		−3.1	−3.3	−1.9	−1.7	0.0		U. O.
Upsal	1865—70	200		−2.3	−2.4	−0.8	0.0	−0.7		„
„ . . . .[1])	1865—70	26		−2.2	−2.9	−0.1	0.0	−0.7		„
Greenwich . . .	1843—67	45	+1.3	+2.0	+0.9	+0.4	0.0	+1.0	+2.5	G. O.
Toronto	1840—48	59	−1.0	−1.8	−2.2	0.0	0.0	−1.0	−1.1	T. O.

Avant de tirer quelques conclusions des moyennes données, il est de la plus grande importance de prouver que les variations, indiquées par les chiffres, dans la pression atmosphérique aux époques de perturbations et d'aurores boréales, ne sont pas accidentelles mais trahissent la présence d'une loi réelle. Nous avons déjà signalé, p. 40, les méthodes qui existent pour contrôler l'exactitude des résultats. Ainsi, nous comparons en premier lieu les diverses variations moyennes obtenues pour un seul et même lieu. Pour certaines localités, nous n'avons fait qu'un seul calcul, ce qui ne nous permet pas de procéder à une comparaison semblable; cela, du moins, quand les jours entrant en ligne de compte sont en nombre si minime, que, dans leur division en groupes, chaque groupe représente un chiffre trop faible pour faire évanouir les irrégularités accidentelles. Il n'est pas nécessaire, au reste, de discuter de cette façon les moyennes de chaque lieu séparément, si la concordance pour quelques localités se montre pleinement satisfaisante. Voilà pourquoi nous nous sommes restreint à ne faire cette recherche que pour Greenwich, Vienne et Upsal.

Le tableau suivant contenant les moyennes pour Greenwich, a été rédigé en parfaite conformité avec les précédents, la seule exception, c'est que la première colonne contient le caractère de la perturbation, "— perturb." signifiant que le composant horizontal a été au-dessous de sa valeur moyenne pendant le jour perturbé, et "+ perturb.", indiquant qu'il a été au-dessus de cette même moyenne, et la dernière colonne contient les numéros d'ordre des calculs spéciaux. Les jours sont déterminés d'après Greenw. Obs. et Boué, Kat. der. Nordl.

[1]) Les aurores boréales signalées comme ayant été d'une intensité toute particulière.

Tabl. IV. Greenwich.

Caractère de la perturb.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes.							N°
			Jours avant.			Jour d'aur.	Jours après.			
			3.	2.	1.		1.	2.	3.	
-- perturb. isolées	1843—49	41	+2.3	+1.3	+1.5	+0.2	0.0	+0.9	+1.7	I
„ „	1850—57	44	+2.5	+1.8	+1.3	+1.5	+0.3	0.0	+1.3	II
„ „	1843—57	85	+2.2	+1.3	+1.2	+0.7	0.0	+0 2	+1.3	III
„ répétées	1843—57	58	+2.2	+1.1	+0.2	0.0	+0.9	+0.8	+0.2	IV
Aurores à Grw.	1843—67	45	+1.3	+2.0	+0.9	+0.4	0.0	+0.9	+2.5	V
„ grandes [1])	1843—66	34	+0.9	+2.2	+1.3	+0.7	+0.7	0.0	+0.1	VI
+ perturbations	1843—57	21	+2.1	+0.0	0.0	+1.5	+2.7	+3.5	+5.0	VII

Mais, pour qu'une concordance entre les moyennes soit concluante, il faut en outre que les mêmes jours n'entrent pas, du moins en nombre un peu grand, dans les calculs spéciaux I, II, etc. Montrer jusqu'à quel point cela a lieu, est l'objet du tableau suivant, dans lequel les chiffres désignent le nombre des jours perturbés communs à deux des calculs spéciaux I, II, etc.

I	II	III	IV	V	VI	VII	
	0	41	0	2	4	0	I
		44	0	5	0	0	II
			0	7	4	0	III
				9	5	0	IV
					6	1	V
						0	VI
							VII

Ce tableau d'après lequel sont construites les courbes de la planche fig. 1, contient les moyennes de différents groupes de jours pendant lesquels se sont présentées des aurores boréales ou des perturbations magnétiques. Les six premiers doivent en général, d'après les principes indiqués ci-dessus (p. 40), correspondre entre eux et le 7ème être opposé. Aussi, I et II, qui n'ont pas de jour commun, montrent-ils qu'en moyenne le baromètre tombe d'environ 2 mm. du 3ème jour avant au 1er jour après la perturbation. Le minimum se trouve, il est vrai, sur un point, un jour, et sur l'autre, deux jours après la perturbation, mais la variation est à tout prendre la même; leur moyenne commune, III, a son

[1]) C.-à-d. celles qui ont été observées sur une grande surface.

minimum un jour après la perturbation. IV, qui, de même, indique une diminution de la pression avant la perturbation, a son minimum un peu plus tôt; V et VI, comprenant les jours d'aurore boréale, montrent que le baromètre atteint son maximum de baisse 1 à 2 jours après l'aurore boréale. Les variations, c.-à-d., la différence entre le maximum et le minimum, sont partout de plus de 2 mm. VIII, qui contient des jours de perturbation positive, a son minimum 1 à 2 jours *avant* la perturbation, et présente une variation moyenne de 5 mm. Un procédé parfaitement analogue employé dans la discussion relative à Vienne et à Munich, donne les résultats suivants:

Tabl. V. Vienne et Munich.

Caractère de la perturb.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes.							N°
			Jours avant.			Jour d'aur.	Jours après.			
			3.	2.	1.		1.	2.	3.	
Vienne —pert. isol.	1841—46	26	+3.7	+2.5	+2.0	0.0	+0.1	+0.2	+0.8	I
„ „	1847—51	27	+2.0	+1.4	+1.0	+0.1	0.0	+0.2	+0.9	II
„ „	1852—55	24	+0.7	+0.4	+0.7	+0.6	0.0	+0.3	+0.2	III
„ „	1841—55	77	+2.1	+1.5	+0.9	+0.2	0.0	+0.3	+0.6	IV
„ répétées	1841—54	58	+1.7	+1.8	+0.7	+0.1	0.0	+1.0	+1.6	V
Grandes aurores	1839—52	31	+3.7	+1.7	+0.4	0.0	+0.4	+1.4	+1.8	VI
Munich —perturb.	1846—54	50	+3.2	+1.5	+0.8	0.0	+0.2	+1.2	+2.2	VII
Vienne +perturb.	1842—54	21	+0.7	+1.2	0 0	+0.6	+0.3	+0.9	+0.7	VIII
Munich „	1846—55	60	0.0	+0.1	+0.7	+1.0	+1.3	+1.8	+1.2	IX

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
	0	0	26	0	2	0	0	0	I
		0	27	0	3	5	0	0	II
			24	0	0	4	0	0	III
				5	5	9	0	0	IV
					8	12	0	0	V
						4	0	0	VI
							0	0	VII
								4	VIII
									IX

Nous avons cru pouvoir réunir Vienne et Munich, le voisinage de ces villes rendant probable que la variation barométrique est en moyenne la même pour toutes les deux, et que, par suite, la concordance entre VII

et I, de même qu'entre VIII et IX, sera tout aussi probante que s'il s'agissait d'une seule et même localité. L'inspection du tableau montre ainsi que la planche fig. 1 une corcordance indisputable dans les 7 premiers groupes, qui s'excluent presque mutuellement quant aux jours considérés.

Dans tous ces groupes, la pression atmosphérique diminue vers le jour de la perturbation, et le minimum se présente pendant ce jour ou pendant le jour suivant. VIII et IX sont égaux en ceci, que la pression augmente vers le jour de la perturbation. Dans III, les variations sont très-faibles et même légèrement irrégulières. Cela nous porta à comparer la perturbation moyenne du composant horizontal, pendant les jours entrant dans III, avec la même quantité pour I et II. Nous reçûmes alors pour I:— 0,0023, pour II: — 0,0021, pour III: — 0,0013.

Ainsi, les perturbations comprises dans III sont considérablement plus faibles que les autres. Les années 1852—1855, pendant lesquelles elles ont eu lieu, appartiennent aussi à une époque minima dans la période séculaire des perturbations magnétiques [1]). C'est au reste une constatation intéressante de la dépendance du composant horizontal vis à vis de la modification de la pression, dépendance dénotant entre les variations magnétiques et météorologiques une proportionalité qu'implique en outre, il est vrai, l'idée même d'une relation entre elles. Nous y reviendrons plus loin.

Tabl. VI. Upsal.

Caractère de la perturb.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes.							N:o
			Jours avant.			Jour d'aur.	Jours après.			
			3.	2.	1.		1.	2.	3.	
—perturb. isolées	1841—48	42	−3.4	−1.4	−0.5	−0.1	0.0	−1.3	−1.0	I
„ „	1848—54	42	+0.9	−0.5	−1.5	−0.5	-0.5	0.0	−0.3	II
„ „	1841—54	84	−1.0	−0.7	−0.8	0.0	0.0	−0.4	−0.4	III
„ répétées	1841—57	67	−3.1	−3.9	−4.2	−4.0	−2.7	−1.0	0.0	IV
Aurores boréales	1865—66	79		−3.0	−2.1	−0.5	−0.4	0.0		V
„ „	1866—69	79		−2.3	−2.4	−0.8	0.0	−1.0		VI
„ „	1869—70	42		−2.7	−3.0	−1.7	−0.6	0.0		VII
„ „	1865—70	200		−2.3	−2.4	−0.8	0.0	−0.7		VIII
„ „ [2])	1865—70	26		−2.2	−2.9	−0.1	0.0	−0.7		IX
„ grandes [3])	1840—62	40	−3.3	−4.7	−5.2	−3.6	−1.7	−1.4	0.0	X
+ perturbations	1842—57	22	0.0	−0.6	−0.7	−2.0	−2.8	−2.0	−2.8	XI

[1]) Voir Loomis: "Comparison of the mean daily range of the magnetic Declination etc." American Journal of Science and Arts. Vol. L., Sept. 1870.

[2]) Voir la note p. 46.

[3]) Voir la note p. 47.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
	0	42	0	0	0	0	0	0	0	3	I
		42	0	0	0	0	0	0	0	10	II
			0	0	0	0	0	0	0	13	III
				0	0	0	0	0	0	0	IV
					0	0	79	11	0	0	V
						0	79	8	0	0	VI
							42	7	0	0	VII
								26	0	0	VIII
									0	0	IX
										0	X
											XI

I—X (voir la planche fig. 3) coïncident tous en ceci, que, pendant le jour de perturbation ou d'aurore boréale, le baromètre est plus haut que le jour précédent; dans huit des dix groupes, la pression atmosphérique continue à augmenter après ce jour, et dans deux, elle reste la même jusqu'au jour suivant. Ainsi, tandis qu'à Greenwich et à Vienne, comme le montrent les Tabl. IV et V, d'après toutes les moyennes la pression *diminue* vers la perturbation, elle *augmente* au contraire ici. On rencontre, il est vrai, quelques différences si l'on s'éloigne du jour de la perturbation, mais les jours adjacents montrent toujours une augmentation de pression.

La discussion étendue que nous avons consacrée aux résultats de Greenwich, Vienne et Upsal, doit suffire à prouver qu'une certaine modification de la pression est prédominante aux époques d'orages magnétiques et d'aurores boréales, du moins sur la partie de la terre dans l'aire de laquelle sont situés les lieux d'observation précités, et que cette modification n'est pas accidentelle. Nous avons appelé l'attention sur la différence entre la variation de Vienne et de Greenwich d'un côté et celle d'Upsal de l'autre. Une étude plus spéciale du Tabl. I montre qu'à la 1ère catégorie, caractérisée par la circonstance que lors de la perturbation, le baromètre est en baisse ou présente un minimum, appartiennent, outre Greenwich et Vienne, Makerstown, Utrecht, Helder, Lisbonne et Rome; et à la 2de, dans laquelle le baromètre est en hausse ou présente un maximum, outre les lieux susnommés, Christiania, Haparanda, Saint-Pétersbourg et Ekatérinenbourg. Il existe de la sorte une opposition entre différentes parties de notre continent. La limite entre ces deux régions paraît être une ligne partant d'un point immédiatement au Nord de l'Écosse et s'avançant au SE., dans la direction de la Mer Noire. Une localité, Lougan, située

Lat. 48° 35′, Long. 37° 1′, au voisinage de cette limite, ne montre presque aucune variation autour du jour perturbé. Il faudrait sans doute faire entrer encore quelques lieux dans la discussion, afin de déterminer plus exactement la position, ce que nous n'avons pu réaliser faute d'observations convenables. Ce qui vient d'être dit, nous semble donner l'explication de la différence entre les résultats du père SECCHI et ceux de Mr. BROWN relativement à Rome et à Makerstown. Les deux localités appartiennent, il est vrai, à la même région, mais l'une, Makerstown, est située tout près de la ligne de limite; elle est, en outre, moins convenable pour une discussion de la direction du vent, par suite du voisinage de la mer et de la prédominance du courrant du SO., comme le démontrent les chiffres suivants, indiquant le nombre de fois que chaque vent a été observé pendant 4 ans[1]):

N. NNE. NE. ENE. E. ESE. SE. SSE. S. SSO. SO. OSO. O. ONO. NO. NNO.
779. 1318. 1668. 867. 431. 177. 329. 575. 1088. 2672. 4210. 1949. 1198. 726. 932. 866.

Dans les contrées où l'aurore boréale est un phénomène presque journalier et où les perturbations atmosphériques sont aussi infiniment plus nombreuses, il est plus difficile de démontrer, par le méthode que nous avons choisie, que chaque aurore boréale coïncide avec une certaine modification de la pression atmosphérique. Comme il a été dit ci-dessus, c'est principalement lors des perturbations intenses en coïncidence avec des aurores boréales s'étendant considérablement vers le Sud, que cette pression montre une variation dans un sens déterminé. Il est aussi probable que dans ces cas, l'état barométrique des régions du Nord subit une modofication analogue relativement très-considérable. Quant aux aurores boréales et aux perturbations journalières, notre méthode n'y est pas applicable, puisqu'elle présuppose, pour le jour considéré comme perturbé, des variations extraordinaires ou d'une intensité beaucoup plus grande que celles des jours précédents et des jours suivants.

Comme nous n'avons eu à notre disposition d'observations magnétiques propres à notre but que pour un très-petit nombre des lieux entrant dans nos recherches, nous avons, en général, dû fixer les jours de perturbation pour un lieu quelconque d'après les observations magnétiques exécutées dans un autre. Cela peut se faire sans inconvénients, aussi longtemps que l'on se borne aux perturbations intenses communes à de grandes surfaces terrestres. Il est, sans doute, incertain que l'on puisse appliquer cette méthode à des distances parfaitement illimitées; cela paraît probable, toutefois, en admettant toujours que l'on ait exclusivement égard aux perturbations in-

[1]) Transactions of the Roy. Society of Edenburgh, Vol. XIX. part II, p. CL.

tenses. Nos deux calculs pour Saint-Pétersbourg nous semblent en fournir un indice. Dans l'un, les jours sont déterminés d'après les observations de Greenwich, et dans l'autre, d'après celles de Toronto. Ils montrent tous les deux un maximum au jour même de la perturbation. C'est également le cas pour les moyennes d'Ekatérinebourg, où les jours ont été tirés des recueils d'observations de Toronto.

Dans nos recherches, qui concernent principalement l'Europe, entrent cependant deux localités situées dans l'Amérique du Nord, savoir Toronto, Lat. 43° 9′ Long. 79° 21′ O. de Gr. et Sitka, Lat. 57° 3′, Long. 222° 15′ O de Par. Le tableau suivant donne le résultat pour Toronto.

Tabl. VII. Toronto.

Caractère de la perturb.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes.							N°
			Jours avant.			Jour d'aur.	Jours après.			
			3.	2.	1.		1.	2.	3.	
Aurores boréales	1840—48	59	−1.0	−1.8	−2.0	0.0	0.0	−1.0	−1.0	I
Perturbations	1842—44	77		−1.2	−1.7	−0.4	0.0	−1.2		II
Aurores boréales	1840—48	40		−1.6	−2.3	0.0	−0.1	−1.2		III
Perturbations	1842—44	58		−1.5	−1.7	−0.4	0.0	−0.6		IV
Aurores boréales	1842—44	19		−0.3	−1.7	−0.5	0.0	−0.7		V
Perturbations	1841—48	66	−0.1	−1.2	−0.9	−0.7	−0.7	−0.4	0.0	VI

I et II précentent une coïcidence à peu près parfaite. Des jours entrant dans le calcul, 19 sont toutefois communs; mais, même en les négligeant, la concordance reste très-satisfaisante entre les variations l'on obtient que et qui sont inscrites dans les lignes désignées par III et par IV. Les 19 jours communs dans I et II donnent V. La ligne VI indique la variation que l'on obtient pour les jours où les perturbations ont été observées à Greenwich. On voit ainsi, que, dans ce cas même, la pression atmosphérique augmente vers le jour de perturbation.

S'il était permis de tirer une conclusion des moyennes données pour Sitka, la variation y serait opposée à celle de Toronto; mais les jours auxquels la perturbation a été déterminée d'après Sitka, sont en trop petit nombre, et les jours fixés d'après Toronto, calcul qu'on retrouve dans le tableau, se rapportent à une localité trop éloignée pour donner un résultat concluant. Il est cependant probable que l'opposition signalée existe aussi pour les parties différentes de l'autre continent; le manque d'observations suffisantes nous a empêché de porter nos recherches sur ce point.

Jusqu'ici, nous ne nous sommes occupé que des mouvements du baromètre pendant l'aurore boréale et les perturbations, sans distinguer entre les cas où ces phénomènes ont agi dans des sens différents. Les chiffres suivants montrent que, pour les lieux examinés, la variation de la pression atmosphérique va en sens contraire, suivant que la perturbation moyenne du composant horizontal est positive (+) ou négative (—).

Tabl. VIII.

Localité.	Période.	N.bre des jours.	Moyennes. Jours avant. 3.	2.	1.	Jour d'aur.	Jours après. 1.	2.	3.	Jours déterminés d'après:
Upsal . . . . . +	1842—57	22	0.0	−0.6	−0.7	−2.0	−2.8	−2.0	−2.8	G. O.
„ . . . . . −	1841—54	71	−1.2	−0.7	−0.9	0.0	0.0	−0.4	0.0	„
St.-Pétersbourg +	1842—57	22	−0.5	0.0	−0.6	−2.4	−3.7	−3.2	−3.8	„
„ −	1843—57	46	−1.0	−1.4	−0.4	0.0	−0.6	−1.3	−1.6	„
Makerstown. . +	1843—46	48	0.0	+1.3	+2.0	+2.5	+3.1	+2.9	+4.1	M. O.
„ . . −	1843—46	48	+1.5	+1.4	+1.1	+1.1	+0.4	0.0	+1.2	„
Greenwich . . +	1842—57	21	+2.1	0.0	0.0	+1.5	+2.7	+3.5	+5.0	G. O.
„ . . −	1843—57	73	+2.0	+1.8	+1.7	+1.1	0.0	0.0	+0.8	„
Munich . . . . +	1846—55	60	0.0	+0.1	+0.7	+1.0	+1.3	+1.8	+1.2	L. A.
„ . . . . −	1846—54	50	+3.2	+1.5	+0.8	0.0	+0.3	+1.2	+2.2	„
Vienne. . . . . +	1842—57	21	+0.7	+1.2	0.0	+0.5	+1.3	+0.9	+0.7	G. O.
„ . . . . −	1841—55	77	+2.1	+1.5	+0.9	+0.2	0.0	+0.3	+0.6	„
Rome . . . . . +	1865—68	48	+0.8	0.0	+0.1	+0.9	+0.9	+1.0	+1.2	B. R. [1])
„ . . . . . −	1865—68	48	+1.7	+2.1	+1.9	+0.7	0.0	+0.2	+1.1	„

L'inspection des chiffres de la 3ème colonne, montre que quelques-unes des moyennes données proviennent d'un nombre trop petit d'observations; et comme c'est principalement le cas pour Upsal et Saint-Pétersbourg, l'opposition signalée ci-dessus peut à peine être considérée constatée pour *ces deux localités*, quoique les chiffres en question indiquent positivement une opposition pareille (voir la planche fig. 4). Mais, comme nous n'avons pas, de ces localités, d'observations magnétiques applicables à notre but, nous sommes forcé de nous restreindre pour le moment au calcul que nous avons fait. On peut, il est vrai, lors de perturbations intenses de la nature de celles qui constituent un orage magnétique, être assez certain que les moyennes du composant horizontal ont été perturbées à Upsal et à Saint-Pétersbourg dans le même

[1]) Bulletino meteorologico dell'Osservatorio del collegio Romano.

sens qu'à Greenwich et à Vienne; mais il n'est pas certain qu'elles se suivent en général de façon à être au-dessus ou au-dessous de la valeur moyenne dans une localité, à mesure qu'elles le sont dans une autre. Il n'entre donc, dans notre calcul des perturbations positives pour Upsal et Saint-Pétersbourg, que les 22 jours indiqués dans les "Abstracts of magnetic storms," ouvrage qui ne contient que les perturbations les plus marquées.

Nous avons pu obtenir des moyennes plus certaines pour les localités suivantes: Makerstown, Munich, Vienne et Rome. Les variations ne s'élèvent sans doute pas à plus de 1, 2 à 3 mm.; mais, si l'on se rappelle que plus d'une fois elles ont dû aller dans un sens opposé à celui de la moyenne, et que, sans affecter la règle énoncée, les maxima et les minima peuvent se présenter un jour plus tôt ou plus tard, une différence moyenne de 2 mm. sur 60 à 80 jours, par ex., est déjà trop grande pour pouvoir être attribuée au hasard, circonstance d'autant moins probable que, comme nous l'avons déjà montré, des groupes de jours différents donnent des résultats concordants.

Nous avons essayé de résumer dans les points suivants les résultats de nos recherches:

1:o. Un certain mouvement du baromètre *prédomine* dans les perturbations magnétiques d'une grande intensité et dans les aurores boréales s'étendant au-delà de la zône propre à ces phénomènes.

2:o. Ce mouvement est opposé dans des parties différentes du continent européo-asiatique et probablement aussi du continent américain.

3:o. La limite entre ces régions part d'un point située un peu au Nord de l'Ecosse, et se dirige au SE. vers la Mer Noire.

4:o. Pendant l'aurore boréale et la perturbation, le baromètre est en hausse ou à un maximum dans la région NE. tandis qu'il est en baisse ou à un minimum dans la partie SO.

5:o. Dans la région SO., le baromètre est prépondéramment en hausse ou en baisse, suivant que le composant horizontal est très-haut ou très-bas.

6:o. Le contraire a probablement lieu dans la région NE.

Au moyen d'une méthode totalement différente de la nôtre, c.-à-d. par l'étude de cartes synoptiques, Mr. RAYET, à Paris, est arrivé, relativement à la dépendance dans laquelle l'intensité se trouve vis à vis de la répartition de la pression atmosphérique, à des conclusions qu'il ré-

sume comme suit dans un mémoire adressé à la Société Météorologique de France:[1])

1:o. L'intensité est augmentée par le courant du SO. ou par la marche de la bourrasque au Nord du lieu d'observation.

2:o. L'intensité est diminuée par le courant du SO. ou par la marche de la bourrasque au Sud du lieu d'observation.

3:o. L'augmentation de l'intensité due à la position du courant SO. au Nord du lieu d'observation, est au reste un phénomène d'un caractère plus déterminé que sa diminution par suite de la situation méridionale de ce courant.

Comme, dès-lors, suivant Mr. RAYET, la position du courant SO. par rapport à un lieu, influe sur l'intensité magnétique, cette intensité devrait aussi être contraire dans deux localités situées de chaque côté du courant. Cela ne paraît toutefois pas s'accorder avec ce que l'on sait relativement à la concordance des variations magnétiques sur des points très-distants. Il faut donc chercher une autre cause par laquelle les perturbations qui se réfèrent à la totalité ou à une certaine partie du globe, ne sont pas rendues dépendantes de la position absolue du courant SO. Nous comprenons sans doute fort bien que les résultats obtenus jusqu'ici par nous, ne suffisent pas pour servir de bases à une interprétation de la cause de l'opposition dans la variation barométrique entre des parties différentes de l'Europe, mais nous osons toutefois en présenter l'explication que nous avons trouvée la trouve la plus probable.

Dans la question de la circulation atmosphérique sur une grande échelle, il faut principalement s'attacher à certaines régions de haute et de basse pression, lesquelles constituent pour ainsi dire des régulateurs et peuvent être considérées comme de vrais pôles pour les vents qui soufflent à la surface terrestre, pôles sur lesquels pivotent les grands mouvements atmosphériques.[2]) L'Europe se trouve sous l'influence de trois de ces régions centrales de haute et de basse pression, savoir une dans l'Atlantique, à 20°—40° de lat. N., une aux environs de l'Islande et une dans l'Asie centrale. Les cartes[3]) indiquant pour chaque mois la répartition de la pression,

---

[1]) Nouvelles météorologiques, 1868, p. 14.

[2]) A. BUCHAN: "On the mean pressure of the atmosphere and the prevailing winds over the Globe for the months and for the year". — Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXV, part. II, 1868—69.

[3]) Ibid.

montrent que la haute pression sur la partie Sud de l'Atlantique septentrional, se maintient pendant toute l'année, quoique avec de légères variations de position et d'étendue, atteignant ou couvrant, durant une forte partie de l'année, les régions méridionales de la zône tempérée des deux continents. Le fait le plus remarquable est la modification que la répartition subit dans les deux autres aires. Au-dessus de la Sibérie et de l'Asie centrale, se groupe, pendant les mois d'hiver, une très-haute pression, tandis que le contraire a lieu dans la partie la plus septentrionale de l'Atlantique. Pendant les mois d'été, la pression baisse dans la première région et augmente dans la seconde, de sorte qu'à la règle la position des isobares pendant l'hiver et pendant l'été est complètement intervertie. La répartition moyenne de l'année montre un maximum dans l'Europe moyenne et méridionale (entre 40° et 50° de Lat. N.) et une diminution de pression vers le Nord.

C'est dans ces faits que les phénomènes climatologiques de notre continent trouvent en grande partie leur explication, et ce sont eux qui nous doivent aussi servir de points de départ, dès qu'il s'agit de tracer le mouvement atmosphérique auquel on doit les variations indiquées par la pression de l'air aux époques d'orages magnétiques.

De la double influence de la basse pression l'autour de l'Islande et de la haute pression au Sud de cette île, naît le vent du SO. caractéristique pour l'Europe de l'O. et du NO., vent qui a reçu la dénomination consacrée, quoique peut-être peu exacte, de courant équatorial. Suivant les idées reçues, les bourrasques sont des tourbillons qui flottent dans ce courant, et qui, par suite, doivent le plus souvent circuler en dedans de ses limites. Une étude détaillée des bourrasques a montré, en effet, que la plupart passent au Nord de la Scandinavie septentrionale vers la Mer glaciale. Ainsi, dans ce cas normal, le courant du SO. se trouve au Nord de la haute pression. Les bourrasques suivent toutefois de temps à autre d'autres routes, se jetant sur l'Europe moyenne dans une direction E. ou SE. prédominante. Le courant équatorial s'étend alors sur la partie SO. du continent européen, et la diminution de pression dans cette région en est la suite. Au Nord, par contre, c.-à-d. au côté Nord des bourrasques, les vents du NE. et du NO. doivent prédominer, accompagnés de l'ascension du baromètre.

Il résulte ainsi dans ces deux cas une différence dans la position du courant SO. relativement à la région de haute pression; ou, en d'autres termes, la position *relative* des maxima et des minima barométriques est

opposée. Or, c'est, à ce que nous croyons, précisement là qu'il faut chercher la cause de la variation barométrique opposée, sous une haute ou sous une basse intensité magnétique. La diminution de pression sur l'Europe du SO. est de la sorte une conséquence de l'arrivée et de la marche du courant du SO. et des bourrasques sur cette partie de notre continent,[1]) ou l'origine d'un minimum au Sud et d'un maximum au Nord, circonstance impliquant précisément une opposition à la répartition normale de la pression. La limite entre les régions dans lesquelles le baromètre est au-dessus ou au-dessous de la moyenne, peut être très-différente suivant les circonstances; mais, plus on s'avance vers le Nord ou vers le Sud, plus l'un ou l'autre de ces cas doit être fréquent; et il doit y avoir un espace intermédiaire dans lequel tantôt l'un des cas et tantôt l'autre doit se présenter, région où les perturbations ne sont accompagnées d'aucune variation barométrique spécialement prédominante. Cette région est précisément constituée par la limite signalée ci-dessus entre les parties de l'Europe qui se montrent opposées relativement à la modification de la pression lors des perturbations. Par cette explication, laquelle ressort au reste tant des calculs faits que de la connaissance tirée de quelques cas spéciaux, nous croyons avoir évité les difficultés attachées aux propositions de Mr. RAYET, et d'après lesquelles il a cru trouver une différence dans la position du courant SO. relativement à un certain lieu, suivant la force ou la faiblesse d'intensité du magnétisme terrestre.

Nous avons exposé nos idées sur la relation existant entre les phénomènes magnétiques et météorologiques, telles qu'elles se sont présentées d'elles-mêmes dans notre propre travail. Nous n'avons pas la prétention d'avoir pénétré par là plus profondément dans la nature de la force magnétique terrestre, d'autant moins que des faits pleinement constatés en démontrent aussi la dépendance de causes placées en dehors de notre atmosphère. Notre but a simplement été de montrer la correspondance entre certains phénomènes magnétiques et météorologiques, correspondance admise par divers auteurs, comme nous l'avons signalé dans les parties précédentes de ce

---

[1]) Citons ici les paroles suivantes de Mr. SONREL: "La relation qui existe entre les aurores boréales et les grandes perturbations de l'atmosphère est incontestable, mais elle est encore mal définie. — On sait que les apparitions des aurores boréales sont liées à la marche des grands mouvements tournants de l'air, et qu'en Europe elles se montrent principalement sur le bord droit antérieur, c'est-à-dire sur la droite de la trajectoire de leur centre, qu'elles précèdent un peu." Bull. Int. Avril 21, 1870.

travail. Si nous avions réussi à quelque degré, sans commettre d'erreurs trop graves, nous aurions contribué à diriger l'attention sur une matière d'une grande importance théorique et pratique [1]), matérière dont nous aimerions à continuer l'étude d'après un plan plus vaste et plus détaillé.

---

[1]) Voici ce que dit Mr. Buchan relativement au rapport de la formation des nuages et de l'état du temps avec les perturbations magnétiques et électriques: "For the elucidation of the important questions here raised, more magnetic observatories are required, so that syncronous magnetic charts might be made for comparison with similar meteorological charts. If this were done and the relations among the atmospheric elements discovered, the magnetic and electric states of atmosphere and the aurora might take their place among the most valuable prognostics of the weather, most valuable in as much as they would give early indication of approaching storms and changes of weather." — Handy Book of Metoerology, p. 313.

Fig. 1. **Tabl. IV.**

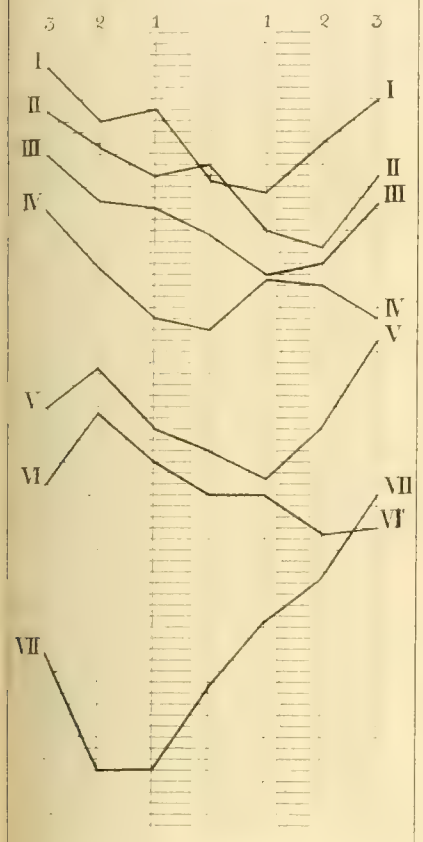


Fig. 2. **Tabl. V.**

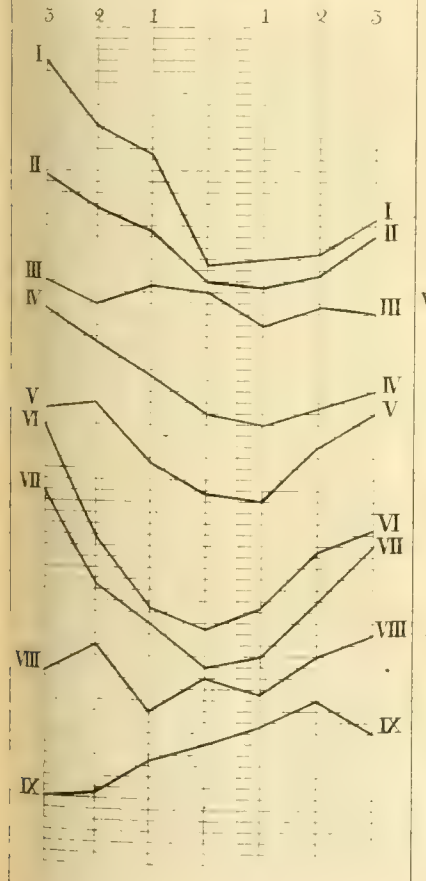
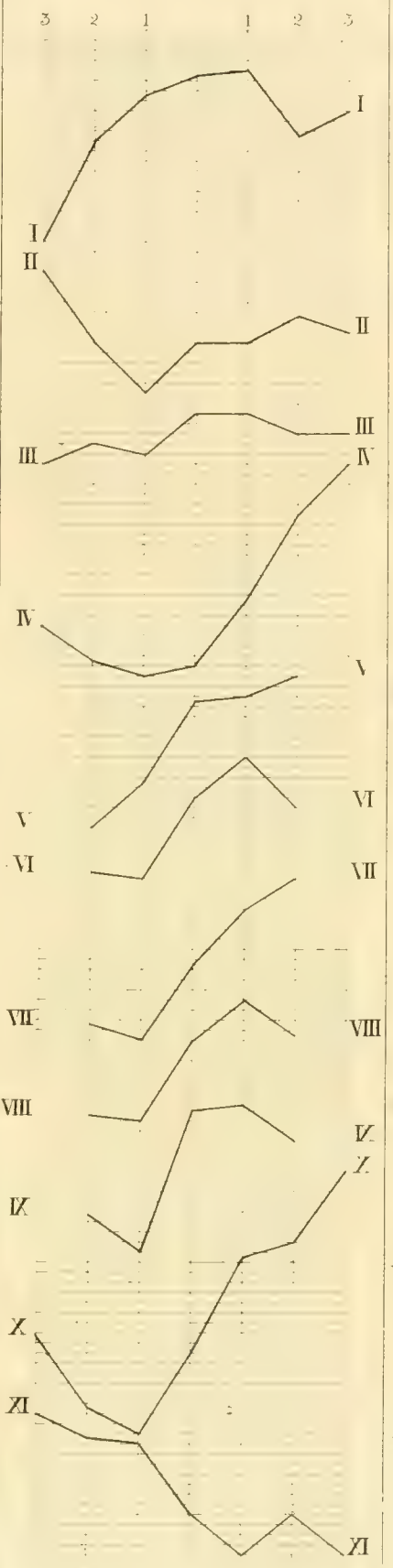
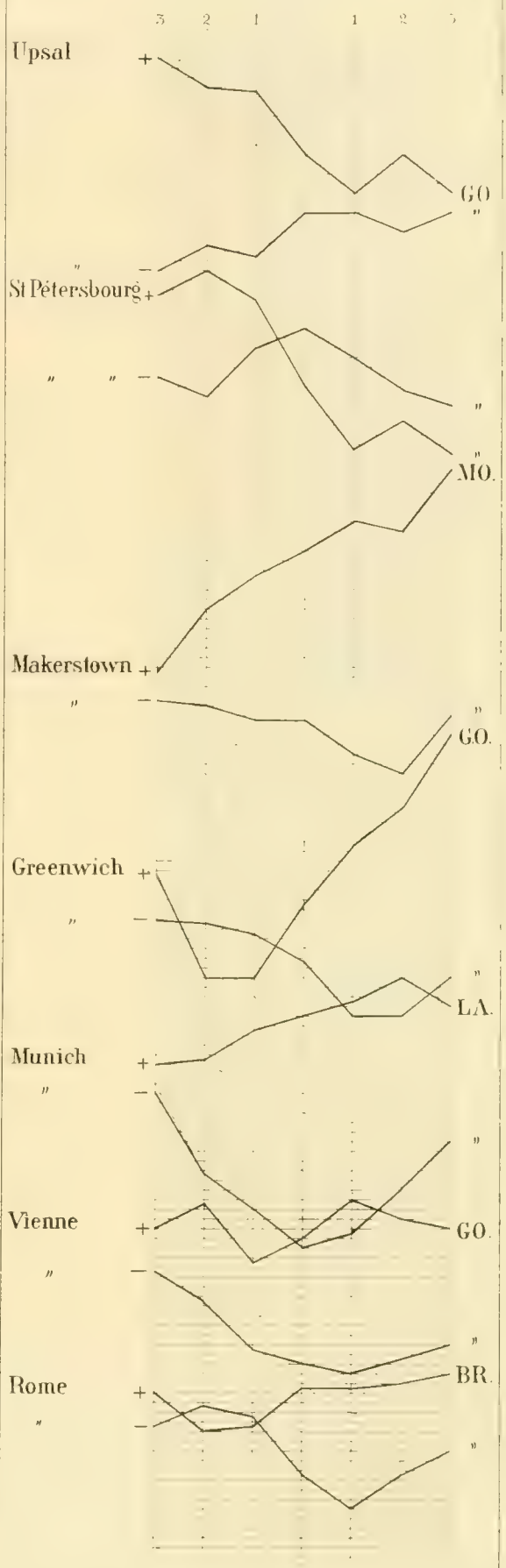


Fig. 3. **Tabl. VI.**



1 division=0.2 m m.

Fig. 4. **Tabl. VIII.**



Th. h. Schlachter & Segerdorff, Stockh.

OM

RUDBECKS FOGELBOK

AV

CARL J. SUNDEVALL.

(Inlemnad till K. Wetenskaps Societeten i Upsala den 8 Juni 1872).

UPSALA, 1872,
AKADEMISKA BOKTRYCKERIET.
ED. BERLING.

Uti båda upplagorna av Fauna Suecica citerar Linné på många ställen, med signaturen "*Rudb. pict.*", en större samling fogelplancher som blivit gjord av O. Rudbeck d. y. i Upsala i slutet av 1600- och början av 1700-talet: hvilken samling i flera hänseenden är värd att närmare kännas.

Då Linné blott på få ställen i sina speciella arbeten lemnat beskrivningar som äro fullt tillräckliga för arternas bestämmande och vanligtvis blott anfört ett och annat drag av form eller färg som han tyckt vara karakteristiskt, så maste man ofta bestämma hans arter efter de figurer och utförligare beskrivningar som han citerar från andra författares arbeten, hvilka i allmänhet äro publicerade i tryck och tillgängliga i alla större bibliotheker. Men den nyss nämnda Rudbeckska figursamlingen, som aldrig blivit publicerad måste, för att göra all den nytta som citationerna avse, upplysas och förklaras genom särskilda, allmänt tillgängliga commentarier.

En sådan förklaring, med artbestämning för alla plancherna i denna samling har redan blivit lemnad av Nilsson i Vet.-Akad:s Handlingar 1816 och 17, och då dessa bestämningar, med blott få undantag, äro riktiga, så skulle en ny förklaring av samma figurer kunna synas överflödig; men dock torde en sådan icke vara utan all nytta. Vid den nämnda tiden (1816—17) kunde man svårligen med full säkerhet bestämma alla figurerna, hvarföre, om ock detta verkligen skett, ännu något tvifvel derom kunde uppstå. I Sverige funnos vid den tiden knappt några betydliga samlingar av våra fogelarter och inga medel att få en säker kännedom om alla dem som tillhöra landet samt än mindre om deras förändringar efter kön, ålder och årstid. Det är först efter utgivandet av Nilssons skrifter[1]) och genom dem, som denna kännedom vunnits.

---

[1]) Ornithologia Suecia: I, 1817, II, 1821; — Skandin. Fauna, Foglarne, I, 1824; I & II, 1835, samt Ed. 3, 1858.

Av det Rudbeckska arbetet finnas 2:ne exemplar, som innehålla temligen samma figurer, färglagda och alldeles lika, blott olika ordnade, nämligen: *1:o* det ursprungliga eller Original-exemplaret, som nu, liksom på 1760:talet (enl. Amoen. Acad. VII, 110) tillhör bibliotheket på De Geerska bruksegendomen Leufsta i norra Upland, och som nuv. ägaren', H:r Baron C. E. DE GEER haft godheten utlåna för anställandet av den undersökning, hvars resultater härmed lemnas; — *2:o.* En av RUDBECK sjelv gjord copia av de flesta plancherna, nu tillhörande bibliotheket på Tammiska bruksegendomen Österby, strax bredvid Dannemora jerngruva i Upland, hvilket exemplar jag benäget fått tillfälle att på stället genomgå. — Dessutom finnes, *3:o* en långt sednare gjord copia med svarta figurer och blott några färglagda, tillhörande Upsala Universitets bibliothek, hvarest jag erhållit kännedom derom.

1:o ORIGINALET

eller *De Geerska*, eller *Löfsta*-exemplaret, utgöres av 272 i pergamentsband inbundna, numererade blad i stor folio: 18 verktum höga, $11\frac{1}{2}$ verktum breda, med handritade, färglagda figurer blott på ena sidan. De 55 första av dessa blad innehålla *Insekt*-figurer av alla Ordningar, till ett antal av v. p. 230. Först stå några få *larver* och *Aptera*, 3 blad; — sedan *Spindlar*, 2 bl.; — *Coleoptera* 6 bl.; — *Grylli L.* 2 bl.; — *Diptera* och *Hymenoptera*, något blandade, 5 bl.; — *Arter* av flera blandade Ordningar, 4 bl.; — *Libellulinæ* 2 bl.; — *Lepidoptera*, 96 figurer på 21 blad; — tillhopa 45 blad. De övriga 10 bladen, här och där i samlingen, äro lemnade tomma. Genera äro inom hvarje Ordning temligen omblandade. Figurerna äro i allmänhet troget och bra utförda, både till form och färg, så att de oftast kunna någorlunda väl bestämmas. Men då de icke äro benämnda och ej tjenat till upplysande av arterna i något publiceradt arbete, så förbigå vi dem här. Inga skriftliga underrättelser finnas vid dessa figurer.

Fogelfigurerna äro i allmänhet lika väl eller än bättre utförda, så att blott några få kunna kallas sämre eller daliga och endast 2 eller 3 äro svåra att bestämma. De äro altid ritade i naturlig storlek och vanligen finnes blott en figur på hvarje blad; men av småfoglarna stå ofta hanne och hona, eller stundom 2 olika arter tillhopa på ett blad. Endast det första (bl. 56) har 3 figurer. — För hvarje figur finnes en liten pappersslapp, eller sedel, på hvilken fogelns namn hos flera äldre författare, i synnerhet ALDROVAND och WILLOUGHBY samt oftast C. GESSNER och RAI, men icke någon nyare, äro skrivna. Därtill finnes ofta ett svenskt namn,

efter hvilket alltid står ordet *"sved."* samt, med blott några undantag, teckningen: "p. m. n:o..", hvilken synes betyda: pictura mea n:o..; ty det nummer som här anföres är altid detsamma som numret på det blad, hvarpå figuren står[1]). Dessa små sedlar lågo enligt Nilssons uppgift lösa mellan bladen då han begagnade arbetet, 1816 eller kort förut, men nu äro de med ena ändan fastlimmade vid bladet. Några få äro dock förlorade.

Alla dessa små anteckningar äro skrivna med samma handstil, som lärer vara Rudbecks egen, samt med likadant bläck som bladens nummer och, liksom dessa, mycket urblekta, rodnade eller stundom så bleka att de blott med någon svårighet kunna läsas. Bladens nummer äro dock väl skrivna, hvilket icke är händelsen med sedlarnes innehåll. — Dessutom finnes för hvarje figur, på sjelva bladet, ett latinskt namn med citation av "Linn. Syst. Nat." och därtill oftast ett svenskt namn, hvilka äro tillskrivna långt sednare, sannolikt av D:r LINDROTH vid Söderfors bruk, år 1758 eller 59, ty alla citationerna äro av Syst. Nat. X, 1758, men ingen enda av Fn. Sv. Ed. 2, 1761. De äro utmärkt väl skrivna med bläck som ännu håller sig fullt svart.

På en del blad finnas anteckningar om tiden då figurerna äro målade, hvilka stå vid bladets nedre kant, skrivna med ytterst fin, jämn samt vacker och väl läslig stil, samt med bättre, ehuru nu rodnadt bläck, sannolikt även av RUDBECK sjelv. De tyckas ha funnits vid alla de i början, under ett par års tid målade figurerna, men blivit bortskurna på de flesta bladen då dessa inbundos och jämnskuros; ty på ännu flera blad finnas lemningar av dylika anteckningar, som äro till större eller mindre del bortskurna, hvarigenom det nu återstående är oläsligt. Sednare torde de ha blivit utelemnade eller oftast rent av bortglömda. På 3:ne blad finnas de dock tillsatta på den lilla namnsedeln, och då, med samma, mindre vårdade stil som dennes övriga innehåll. De bibehållna och läsliga anteckningarna äro följande:

Pl. 56 figg. 1, 2; *Ups. d. 27 Aug. 1696.*
„ „ fig. 3: *Ups. d. 11 Sept. 1697.*
„ 82 (nedtill avskuret): *Juli 1696.*

---

[1]) Såsom exempel på vanliga formen för dessa sedlar anföra vi hela innehållet av följande tvänne, noggrant avskrivne. Den vid bladet 117 har: "Iynx Arist *mas.* Gessn. p. 573. Willigb. p. 95. Aldr. p. 866. — Göktyda sved. p. m. 117." — Sedeln till bl. 113 fig. 2: "Parus ater Gessn. p. 691. Aldr. p. 723. — Hvitplättuge Svartmesen Sved. p. m. 113". — Somliga sedlar innehålla dessutom åtskilliga korta anmärkningar av andra slag.

Pl. 109, på sedeln: *A:o 1696 in Aug.*
„ 110, 1: på sedeln: *Circa Ups. A:o 1698.*
„ 123, på sjelva bladet: *Ups. 1697 d. 20 Febr.* [ö. om Upsala.
„ 150, på sedeln: *1710 d. 3 Sept., in Fimbo prope Halequed* 1 $^1/_2$ mil
„ 159, på sjelva bladet: *Cuculus, Gök Ups. d. 16 Maj 1696* [är nedtill något avskuret].

Dessutom finnas oläsliga, nedifrån avskurna lemningar nederst på bladen 57, 61, 69, 75, 76, 77, 97, 98, 118 (namnet *Picus varius minimus* är tydligt, men datum bortskuret); — 124, och 188 (här är skriften förstörd mera genom fukt och ålder, än genom bortskärning). På alla de övriga saknas anteckningar och spår derefter. De finnas ej vid någon enda Simfogel och blott vid en Vadare (188) och av flera omständigheter synes det troligt att dessa större foglar i allmänhet blivit sist avbildade. De fleste Simfoglarne voro i Upsala svårare att erhålla.

Bland de bibehållna anteckningarna tyckas de på bladen 123 och 159 angivna årtalen vara 1647 och 1646, hvarigenom dessa båda sedlar synas vara 50 år äldre än de övriga; hvilket dock tydligen blott kommer därav, att ziffran 9 uti båda är så skriven att den liknar 4. Åren 1646 och 47 hade figurerna säkert icke blivit ritade på det stora, tjocka papperet av samma sort med det som begagnades på 1690:talet, och de skulle då ha varit ritade av den äldre O. RUDBECK, vid 16 à 17 års ålder, hvilket icke är antagligt. — Dessa uppgifter visa således att de flesta figurerna vid hvilka de finnas äro ritade åren 1696—98 och en enda visar, att figur-ritningen varit fortsatt ännu 1710. Troligtvis har samlingen blivit börjad under RUDBECKS lappländska resa, år 1695, med tillhjelp av 2:ne studerande som åtföljde honom, och ivrigt fortsatt af honom sjelv efter hemkomsten, 1696 och följande åren. För mig vill det synas tydligt att RUDBECK sjelv, med få undantag, målat alla figurerna. Detta tyckes framgå så väl av LINNÉS yttrande i Amoen. Acad. VII, 110, och av LINDROTHS uppgift på titelbladet till Österby-exemplaret, att "Rudbeck sjelv målat figurerna", som av det överallt lika maneret, både i teckning och färgläggning.

Denna samling tyckes vara gjord med från början fattad avsikt att hopsamla så många figurer som möjligt av svenska foglar och att därigenom grundlägga en svensk ornithologi, eller kännedom om de fogelarter som tillhöra landet. Det stora antalet och de omsorgsfullt bifogade namnen samt övriga anteckningar synas utvisa en sådan avsikt, och om än författaren icke sjelv hunnit att fullborda den, så kan man dock bestämdt antaga att hans figursamling varit ett huvudsakligt biträde åt LINNÉ, hvarigenom dennes förteckning över svenska foglarna kunnat bli så rik eller så

nära fullständig, som den är. LINNÉ, som mest syselsatte sig med växterna och ej kunde få mycken tid övrig att studera djurarterna, har säkert lärt vida mera av RUDBECKS arbete än som synes av uppgifterna i hans skrifter. Svårligen skulle han ha fått så pass säkra bestämningar av de svårbestämda fogelarterna, som han verkligen har efter de gamla författarnes skrifter, om han ej haft en så god ledning som den, hvilken RUDBECKS anteckningar lemnar. RUDBECK har känt svenska fogelarterna bättre än LINNÉ och har haft mera tid att samla dem, och hans figursamling visar bilder av många arter, som Linné icke känt, samt av några som denne icke tilltrott sig att upptaga, såsom: *Loxia pityopsittacus*. *Picus leuconotus* och *canus* Gm., samt *Charadrius minor*. Hans fogelbok utgör altså den egentliga början till Sveriges Ornithologi. hvilket är en av anledningarna att hopsamla så utförliga underrättelser som möjligt om detta arbete.

Även den systematiska ordning, hvarefter plancherna äro lagda och numererade, har sin stora märkvärdighet och utvisar en djupare kännedom om foglarnas natur samt en mera vidtomfattande avsikt med samlingen. För mig är denna ordning av särdeles interesse, emedan den följer samma huvudgrunder, hvartill egna studier för mer än 40 år sedan ledt mig. *Sångfoglarne*, eller Tättingarne, ställas främst, såsom den högst utbildade fogelklassen. *Vattenfoglarne* stå sist, och *Rovfoglarne*, som höra till de lägre utbildade foglarna, stå i grannskapet av dessa. — RUDBECK är således den förste bland mig bekanta fogelkännare, som ansett sångfoglarna för de främsta i klassen. Blott en liten del av hans anordning förefaller oriktig och besynnerlig. Mellan Hönsen och Rovfoglarna stå nämligen insatte de Kråklike foglarne: *Corvus*, *Garrulus*, *Coracias*, samt därtill *Cuculus* (Bladen 148—161; se nedanst. förteckning) svarande mot en del av LINNÉS Picæ; hvarjemte *Flädermusen*, som enligt gammalt bruk räknas till Foglarna (d. ä. enl. ARISTOTELES: till de flygande, varmblodiga djuren) ställes här i följd med de nyssnämnda. Dessa alla tyckas ha förefallit tvivelaktiga för RUDBECK, liksom för de flesta andra, och derföre blivit något undanskjutna. De Kråkartade foglarne äro bildade liksom Sångfoglarna, men de flesta människor draga i betänkande att räkna dem bland dessa och anse dem hellre för en sort rovfoglar. Det var först CUVIER, som lät dem vederfaras full rättvisa och insatte dem jämte Sångfoglarna i sin ordning "Passereaux", hvilken dock även innehåller många slägten, som icke höra dit (Alcedo, Buceros, Coracias m. fl.).

LINNÉ torde aldrig ha lärt känna RUDBECKS systematiska åsikter, som kunna vara slutligen bestämda sedan han begagnade figur-samlingen, och bibehöll ständigt, med ringa ändring, den vida mindre naturenliga anordning,

som han uppgjort och framställt i Syst. Nat. Ed. I, 1735: med Simfoglarna midt i serien, "Picæ" och "Passeres" långt atskilda och Lanius bland Rovfoglarna, som stå först o. s. v. Denna anordning är blott en något förbättrad upplaga av den hos BELON på 1500:talet. — Likväl tyckes det, av den nyss anförda nummerteckningen på de små namnsedlarna ("p. m. n:o x" etc.), som om RUDBECK redan långt förut hade uppgjort sin anordning av fogelarterna.

Original-plancherna med fogelfigurer ha utan tvivel varit avslutade långt före 1720, då RUDBECK, enligt LINDROTHS uppgift, var sysselsatt med att efterbilda dessa figurer och därigenom samla ett duplettexemplar, hvarom mera längre fram. Figurernas ordnande och numererande kan endast ha blivit gjordt av RUDBECK sjelv, eller efter hans anvisning, hvilket synes av den honom egna, från de äldre Ornithologernas, ganska skiljaktiga systematiska ordningen; och detta, liksom volumens inbindning måste ha skett sent, och efter den tid, då LINNÉ begagnade samlingen; ty denne har icke citerat något enda av bladens nummer utan blott de på de små lösa sedlarna skrivna diagnoserna eller citationerna. — LINNÉ har utan tvivel allenast begagnat detta arbete åren 1729—31. Han kom, såsom nyligen i Lund bliven student, till Upsala 1728 och blev snart bekant för RUDBECK, som genast omfattade honom med synnerlig bevågenhet och redan följande året skaffade honom förordnande att i sitt ställe hålla de offentliga föreläsningarna i Naturalhistoria. Kort därefter, blev LINNÉ Informator i RUDBECKS hus, hvarest han kvarstannade blott $1^1/_2$ år, då han bör hafva haft godt tillfälle att studera dennes planche-samling, hvilken då var längesedan färdig. Sannolikt har han vid den tiden antecknat så mycket därutur, att han sedan icke mera ansett sig behöva begagna densamma, hvilket i alla fall knappt hade kunnat ske förr än han började tänka på utgivandet av Fn. Sv. Ed. 1, som utkom 1746. Men svårligen kunde han börja att bearbeta denna förr än någon tid efter RUDBECKS död, i Mars 1740; ty han vistades utrikes 1735—38, och var praktiserande Läkare i Stockholm 1739—41. År 1742 blev han Professor i Upsala, och ännu tyckes han ha kunnat behöva någon tid för att samla materialier till en Fauna av den vidd som hans. — Såsom säkert kan man antaga, att LINNE blott begagnat RUDBECKS plancher till första upplagan av Fn. Sv.; ty i andra upplagan, av 1761, finnes intet enda tillägg och ingen ändring vid citationerna derur.

Sedan LINNÉ hade begagnat dessa fogelmålningar, således efter 1730, måste ett större antal derav ha gått förlorade, ovisst på hvad sätt. Blott ibland de 28 figurer som LINNÉ citerar, saknas 7, eller jämt fjärdedelen, och dessa måste ha varit förlorade förr än bladen numererades och blevo

inbundna, ty intet spår av någon bland dem finnes uti någotdera av de två exemplar som finnas kvar av RUDBECKS arbete. Möjligtvis kan just denna förlust av ett större antal blad ha föranledt, att hela den återstående samlingen blev numererad och inbunden. Det tyckes alltså som om förlusten skett under RUDBECKS lifstid, mellan 1731 och 1740.

Längre fram meddela vi förteckning på figurerna.

2:o DUPLETT-EXEMPLARET

eller *Grillska* eller *Österby*-exemplaret, är en samling färglagda efterbildningar efter de flesta fogelfigurerna i förra exemplaret, utom Simfoglarna, hvilka alla saknas. I allmänhet äro duplettfigurerna förbigångna, så att blott en figur, eller blott hanne och hona finnas av hvarje art, hvaremot några få arter finnas, som saknas i originalet.

Dessa figurer äro, enligt uppgift av D:r LINDROTH på det nu tillhörande titelbladet, målade av RUDBECK omkring år 1720. De äro i allmänhet, både till teckning och färgläggning alldeles lika de motsvarande i originalet och lika väl utförda som dessa. Papperet är av samma sort med det i det äldre exemplaret. År 1786 fans denna samling i Brukspatron GRILLS ägo på Söderfors järnbruk, hvarest Grill började anlägga en stor Naturalie- och Boksamling, och nämnda år blevo figurerna, eller bladen, av D:r P. G. LINDROTH numererade och lagda i ordning samt försedda med namn efter Linnei Syst. Nat. XII, skrivna på sjelfva bladen. Han tillsatte även det ännu befintliga titelbladet, hvarpå flera goda upplysningar finnas skrivna och volumen har då blivit inbunden i pergamentsband, till likhet med originalet. Genom arv efter Enkefru Anna Johanna GRILL, född GRILL, på Söderfors, kom Exemplaret i början av 1800:talet att tillhöra hennes systerson, Baron P. A. TAMM, som efter Fru Grills död, år 1809, förflyttat det, med hela bibliotheket, till Österby. Naturalsamlingarne, som under hennes vård blivit betydligen ökade, skänktes år 1821 till Kgl. Vetenskapsakademien i Stockholm, dit de sedan blevo flyttade.

Vid den här nedan lemnade förteckningen på figurerna i originalexemplaret finnes en särskild column som utvisar hvilket nummer hvarje figur har i duplett- (eller Österby-) exemplaret, och hvilka figurer som här saknas, hvika äro utmärkta med 0. Derav synes att i detta sednare exemplar saknas 55 av Original-exemplarets figurer; nämligen alla *Simfoglarna*, 43 figg., och 12 av de övriga fogelfigurerna, samt att dessa saknade figurer tillhört 20 arter Simfoglar och 7 arter av andra Ordningar; tillhopa 27

arter. — Däremot ses av den särskildt lemnade förteckningen över Österby-exemplaret, att detta innehåller 3 figurer, som saknas i det De Geerska, nämligen: 36, *Sterna arctica;* — 44, *Strepsilas interpres,* — och 108, *Hirundo riparia.*

3:o BILLBERGSKA COPIAN,

som finnes på Upsala Universitets bibliothek, är en samling, till teckningen ganska väl gjorda efterbildningar av alla figurerna i originalexemplaret med några få tillägg. Sannolikt äro de kalkerade efter de nyssnämnda; men blott några få äro färglagda; de flesta äro allenast försedda med svarta skuggningar. — De äro ritade i Stockholm år 1823, av framl. Kammarrättsrådet G. J. BILLBERG, i samma format som de båda Rudbeckska, samt lagda i ordning efter original-exemplaret, men försedda med namn efter Österby-exemplaret. På hvarje blad finnas antecknade de båda nummer som stå på motsvarande blad i de båda äldre exemplaren. Blott några små ändringar äro gjorda så vida, att hanne och hona av samma art, som på några ställen i Löfsta-exemplaret stå på skilda blad, här blifvit sammanflyttade på ett blad, hvaremot de olika arter, som uti det äldre exemplaret stå tillhopa på samma blad, här oftast (eller altid med undantag av första fogelbladet, som har n:o 56), blivit ställda på skilda blad, hvilket även stundom är händelsen med figurer av samma art, hvilka blivit ansedda för skilda arter, t. ex. Turdus musicus på bl. 106. De 3 övertaliga figurerna, som icke finnas i Löfsta-exemplaret, äro efter duplett-exemplaret, ritade med blyerts, på särskilda blad.

Insektfigurerna, som stå först, äro de samma som de uti original-exemplaret, men de äro sammanförda på 6 blad, uti 55 numererade rutor, av hvilka hvarje innehåller de på motsvarande originalblad ritade figurerna, dock med en eller annan obetydlig förändring; t. ex. att de på bladen 15 och 16, här äro hopställda i en ruta, som har n:o 15. Dessa insektfigurer äro i allmänhet något mindre väl ritade, eller tydliga, än originalerna, och äga för övrigt ingen märkvärdighet. — I början av detta exemplar finnas tillfogade register över figurerna; först över *Insekterna*, med namnbestämningar för de flesta; sedan över foglarna i originalet och sist över dem i Österby-exemplaret, hvarvid de på de små namnsedlarna i originalet skrivna synonymerna av äldre författare äro antecknade.

FÖRTECKNING PÅ FIGURERNA I DET URSPRUNGLIGA ELLER LEUFSTA-EXEMPLARET

med anförande av arternas numera allmänt kända eller antagna namn. De gamla, av Rudbeck anförda namnen återfinnas i Nilssons förteckning. Vidare anföra vi här de svenska namn som förekomma på de små, av Rudbeck sjelv skrivna sedlarna, noggrannt återgivna med samma bokstäver som där.

Bladet N:o Fig.	*Föreställer, enl. nu brukliga namn:*	*N:o i Fn. Sv. Ed. 2.*	*Svenskt namn enl. Rudbeck.*	*N:o i dupl.-ex.*
56. 1, 2	Regulus cristatus Will. et rec. ♂♀	262.		99. 1.
— 3	Sylvia trochilus (L) Lath. . . .	264.		„ 2.
57. 1, 2	— curruca Lath. et rec. . .	247.[1])	Större otofsad Kungsfogel .	100.
58.	Fringilla flavirostris L. Nilss. . .	239.	Riska	86.
59. 1	Luscinia suecica (L.) nob. ♂ . .	259.		97, 1.
— 2	— „ ♀ ?	„	(dålig figur) .	„ 2.
60.	Accentor modularis (L.) Koch . .	245.	Brunmes (d:o) .	101.
61.	Sylvia cinerea Behst. [1])	(251?)	Gråmes; Trägårdstrast; Ekeskrutta Ostrog.	91.
62. 1, 2	— atricapilla (L.) ♂♀ . . .	256.		94.
63.	— hortensis Bechst.	0.	Mindre Nättergalen. . . .	0.
64.	Luscinia philomela (Bst.) nob. .	(244).		0.
65.	Saxicola oenanthe (L.) ♂ vern. .	254.	Stensqvätta	92.
66. 1, 2	Ruticilla phoenicurus (L.) ♂ vern.	257.	Röstjert; Röhvisla Gotl. . .	95.

[1]) I Linn. Fn. Sv. råder, såsom Nilsson riktigt anmärkt, den största förvillelse och förblandning mellan n:o 247—251: *Motacilla curruca*, »*hippolais*» (för hypolais), *salicaria* och *sylvia*, enär n:o 248, M. hypolais, fått en diagnos som skiljer henne från de övriga och någorlunda passar på de nyares *S. hypolais*. eller på *S. trochilus*, men en beskrivning som allenast passar på *S. cinerea* rec. (Mot. Sylvia L.). — *Mot. salicaria* torde kunna anses för en ung *S. trochilus* (Fn. Sv. n:o 264); de övriga två beskrivas fullkomligen lika, såsom de nyares *S. curruca*. — Denna oreda tyckes härleda sig derifrån att beskrivningen vid n:o 248, M. hypolais, av misstag kommit dit, men ursprungligen varit ämnad till en av de andra, antagligen n:o 251, *M. sylvia*. — Detta tyckes bestyrkas derav att de 4 arterna i S. N. XII blivit något bättre skilda, enär den oriktiga beskrivningen blivit borttagen från *M. hypolais* och de vid *M. curruca* och *M. sylvia* anförda citationerna ur Brisson upplysa hvad som menas med dessa namn. Det är utan tvivel med ledning av dessa anvisningar som *S. curruca* och *S. cinerea* (M. sylvia L.) blivit väl bestämda, först av TENGMALM (i V. A. H. 1783, 53), sedan av BECHSTEIN, NILSSON, TEMMINCK och alla nyare. *S hypolais* är närmare bestämd av Bechstein och efter honom av alla nyare. Namnet *Mot.* (eller Sylvia) *salicaria* måste alldeles förkastas.

67.	1	Ruticilla phoenicurus hiem. [1]	258.		96.
—	2	Luscinia rubecula (L)	260.		98.
68.		Ruticilla phoenicurus juv.	258.		(96.)
69.	1, 2	Praticola rubetra (L.) ♂ ♀	255.	Midnatztytan	93.
70.	1, 2	Fringilla coelebs L. ♂ ♀	232.	Bofink	82.
71.		0.			
72.	1, 2	Fring. cannabina ♂ ♀	240.	Hempling	87.
73.	1, 2	— carduelis	236.		84.
74.	1, 2	— spinus	237.		85.
75.	1, 2	— linaria	241.	Gråsiska	88.
76.		Emberiza citrinella ♂	230.	Gröning	79.
77.		— schoeniclus hiem.	231.	Säfsparf	80.
78.		— hortulanus	229.	Lundsparf	0.
79.		Fringilla domestica ♂ ♀	242.	Tetting	89 a.
80.		— montana	243.	»Bergsparv»	90.
81.		0.			
82.		Hirundo rustica	270.	Hus Svala	107.
83.		Cypselus apus	272.	Spirsvala	0.
84.		Caprimulgus europæus	274.	Nattskæfa. it. Nattblacka; Kesi Sughan Turc. h. e. Getsugare	0.
85.		Alauda arvensis (sämre fig.)	209.	Gemena lärkan	60.
86.		Anthus arboreus ? (d:o)	—	Mindre fältlärkan	62.
87.		Alauda arborea L.	211.	Bomlärka	61.
88.	1	Fring. montifring. ♂ (sämre fig.)[2]	234.	Luleå Steglisa	83.
—	2	Emberiza lapponica (L.) Quensel Sv. Zool. 1, ♂	235.	Lappsk Steglisa	81.
89.		0.			
90.	1, 2	Ampelis garrula L. Sen. Jun.	82.	Sidensvantz	73.
91.		Fring. montifringilla æstiv ♂	233.	(Se noten 2)	78.
92.	1	Emberiza nivalis, hiem.	227.	Åkerhane, Upl. it.; Nordanväders Spink; Sniosparv. It.lapp. 199.	77.

[1]) Höst- eller Vinterdrägten av *R. phoenicurus* ♂, som är n:o 257 i Fn. Sv, Ed. 1, benämnes *M. titys* i S. N. X, och anföres i S. N. XII såsom M. phoenicurus ♀. Honan och ungen av samma art är: Fn. Sv. Ed, 1 n:o 225; = *M. erithacus* Fn. Ed. 2 n:o 258 samt S. N. X och XII.

[2]) Bl. 88 fig. 1., är enda grunden för Linnés *Fring. lulensis.* Vid denna figur finnas nu 2:ne namnsedlar, av hvilka den övre (signerad »Carduelis lulensis») är den rätta hithörande, som av Linné citeras. Den andra (sign:d Carduelis angermannica etc.) citeras av Linné vid n:o 233, *Fringilla montifringilla*, och tillhör Bl. 91, som föreställer hannen i ren sommardrägt, men den har fått den oriktiga signaturen: »p. m. 122 samt en hänvisning till Rudbecks Itin. lapponicum. Bladet 91 har redan en sedel med namnet »passer nivalis» etc,; men 2:ne sedlar finnas på flera ställen vid en figur. — Det kan anmärkas att i diagnosen till Linnés *Fr. Lulensis* (Fn. Sv. 2 n:o 234) är ordet *alis* uteglömdt och beskrivningen börjar med ordet »*Corpus*» i stället för *Caput.*

92.	2	Fring. montifring. ♂ hiem. (fig. opt.)	233.	Sniosparv; Sniötippa; Nordansväder fink	0.
93.		0.			
94.		Motacilla alba vernalis	252.[1])		0.
95.	1, 2	— flava ♂ ♀	253.	Gul Säsärla Sv. Länala Hels.	0.
96.	1, 2	Fringilla chloris ♂ ♀	226.	Swenska	0.
97.		Cinclus aquaticus Bechst.	214.	Strömstare, Forssparv	0.
98.	1, 2	Pyrrhula vulgaris Temm. ♂ ♀	225.	Domherre	76.
99.	1, 2	Loxia curvirostra L. ♂ ♀	224.		75.
100.		— pityopsittacus Bechst.	0.	(Loxiæ alia sp. p. 100)	0.
101.		0.			
102.	1, 2	Corythus enucleator (L.) Cuv. ♂ ♀	223.	Parisfogel	74.
103.	1, 2	Lanius collurio L. ♂ ♀	81.	(Merops s. Apiaster? Will.) Bifräter; al. Torndyfvelätare Sv.	14.
104.		Sturnus vulgaris ♂ vernal.	213.	Stare	63.
105.		— „ ♀	—	„ honan	64.
106.	1, 2	Turdus musicus	217.	Taltrast, then mindre, han, hon	66, 68.
107.	1, 2	— pilaris L.	215.	„ then större, mas, foem,	65.
108.		— viscivorus L.	216.	Misteltrast; stora kramsfogeln	67.
109.		— merula L. ♀	220.	(svartstare	71.
110.	1	— „ ♂	—	Amselgerm: Sved. taltrast, aliis	70.
—	2	— torquatus juv.[2])	(221).		72.
111.	1, 2	Parus cæruleus L.	267.	Blåmes, aliis blåhatt	104.
112.	1	— major L.	265.	Stora talgoxen; Gårdspinker V. G.; Gålspinker O. G.	102.
—	2	— palustris L. (pal.? v. borealis rec.)	269.	Mormes Sv. Entyta Suderm.	106.
113.	1	— cristatus L.	266.	Tofsmes	103.
—	2	— ater L.	268.	Hvitplättuge Svartmesen	105.
114.		— caudatus (dålig figur)	83.	(Lanius L.)	0.

[1]) På vidfästade sedeln står: *σεισερα* Gr. .. inde Säsara, vel dim. Säsärla. Kukeräll Hels., Kokärla Suderm.; Longhala. Gothl. longa cauda». — Ehuru äventyrlig denna derivation tyckes se ut, så torde den ej altför hastigt böra förkastas. Åtminstone är namnet *Sädesärla*, som på intet sätt passar för fogeln, säkert en i nyare tider gjord förändring av *Säsärla*, som ännu allmänt brukas bland landtfolket.

[2]) Denna är en god figur av T. torquatus, ung, i första fjäderdrägten, väl igenkännelig på de hvitaktiga fjäderspolarna på rygg, vingar och stjert, samt de tydliga mörka månfläckarna på buksidan. Rudbeck har på lilla sedeln kallat honom »Merula saxatilis Aldrov. p. 630», hvilket namn dock tillhör *Turdus saxatilis* L. (Monticola sax. rec.); men i det nyare, på sjelva bladet (av Lindroth?) tillskrivna namnet benämnes han riktigt *Turdus torquatus* Linn. S. N (ed. X) p. 170, churu Linné icke beskrivit och sannolikt aldrig känt ungdrägten. Sedan har denna fig. blivit ansedd för T. merula jun.

115.		0.			
116.	1	Sitta europæa L.	104.	Knäppa	34.
—	2	Certhia familiaris L.	106.	— (nyare tillskrivet: Bomkryparen)	35.
117.		Iynx torquilla L.	97.	Göktyda Sved.	25.
118.	1, 2	Picus minor L. ♂ ♀	102.	lilla Rödhöfda hackspiten; — ♀ lilla brokita hackspit . .	33.
119.		— tridactylus L. ♂ . . .	103.	Rar gulhufdad Hack Spit .	0.
120.		— major L. ♂	100.	Brokut hackspit then större	30.
121.		— leuconotus Bechst. ♀ . .	0.	Större brokuta Hackspit hon.	32.
122.		— „ „ ♂ . .	—	„ „ Hackspiten .	31.
123.		— canus Gm ♀	0.	(»Picus viridis foemina») .	29.
124.		— viridis L.	99.	Gröngölling hane	28.
125.		— „	—	Större Gröngölling . . .	0.
126.		0.			
127.		Picus martius L. ♀	98.	. . . . .	27.
128.		— „ ♂	—	Spilkråka	26.
129, 130, 131.		0.			
132.		Columba oenas L.	174.	blå Skogdufa	59.
133.		— palumbus L.	175.	Ringdufa	0.
134, 135.		0.			
136.	2, 1	Coturnix communis Bonnat. . .	206.	Waktel.	58.
137.		(Perdix v. Pternistes sp.) [1] . .	0.	ljusbruna el. mindre Raphönan	57.
138.		Perdix cinerea L. ♂	205.	Större Raphönan	56.
139.		— „ ♀	—	Rapphönan then större . .	0.
140.		Lagopus lapponica Gm. (Subalpina Nilsson — saliceti Temm.) ♂ hiem.	203.	Sniöripa	54.
141.		— ead. ♂, maculata, vernalis	—	Somar Sniöripa	55.
142.		Tetrao bonasia L. ♂	204.	Jerpe	0.
143—147.		0.			
148.		Garrulus glandarius (L) Vieill. .	90.	Nöttskrika	20.
149.		— „	—	vanlig Nöttskrika	21.
150.		Nucifraga caryocatactes (L.) . .	91.	Nöttkraka	0.

[1]) Denna figur har visserligen någon likhet med en Rapphönsunge i första drägten och anses så av Nilsson, men är betydligt större och vida mindre fläckig. Rudbeck kallar den »Perdix ruffa minor», utan säker citation av namn. I andra exemplaret har den av Lindroth blivit kallad »Tetrao perdix fœmina». Dock föreställer figuren icke en svensk eller europeisk fogel, utan säkert en mig obekant Frankolin-art (Pternistes) från Afrika eller Ostindien. Skada att ingen uppgift finnes hvarifrån Rudb. fått figuren eller dess original. Bland nu bekanta arter liknar den närmast *P. clappertoni* fr. Afrika, ♀ jun (utan sporrar), men är vida mindre fläckig.

151.	0.			
152.	Garrulus infaustus (L.) Vieill. . .	93.	Olycksfogel	15.
153.	Coracias garrula L.	94.	Spansk kråka	0.
154.	— „	—	. . . . .	0.
155.	Corvus monedula L.	89.	Kaja	19.
156.	— frugilegus L. juv. [1]) . . .	86, 87.	Råka	16.
157.	— cornix L. var alba	88.	hvit Kråka	18.
158.	— „ „ vulg.	—	»grintna Kråkan»	17.
159.	Cuculus canorus L. ♂	96.	. . . . .	23.
160.	— „ jun. rufomixtus . .	—	. . . . .	24.
161.	— „ „ vulg. . . .	—	Höstgöj	22.
162.	Vespertilio auritus L.	(3).	. . . . .	0.
163.	Strix passerina L. Nilss.	79.	Lilla eller minsta Stenuglan [2])	13.
164.	0.			
165.	Strix tengmalmi Gm. ♀	74.	Större Stenuglan	9.
166.	0.			
167.	Strix brachyotus Lath.	73.	»Strix tota flammea, brand-uglan»	8.
168.	— otus L.	71.	hornugla . . vel Öruglan .	7.
169.	— aluco L. rubida (stridula L.) .	77.	Skrikugla	11.
170.	— tengmalmi Gm. ♀	75.	större Stenuglan. Storöguga.	10.
171.	— aluco L. (cinerea)	72.	Grå svartögda Uglan . .	12.
172—175.	0.			
176.	Falco tinnunculus ♀	61.	Körkfalk	4.
177.	— „ junior	—	. . . . .	3.
178.	— „ ♂	—	Körkfalk hon. (förbytt m. 176)	2.
179.	— subbuteo	59.	Bomfalk	1.
180.	Astur nisus (L.) ♂	68.	. . . . .	5.
181.	— „ ♀	—	. . . . .	6.
182—187.	0.			
188.	Charadrius hiaticula L.	187.	Gulfota Strandpiper . . .	51.
189.	— minor Wolff. Mey. . .	0.	blekfota Strandpiper . . .	50.
190.	— morinellus L. hiem. . .	188.	. . . . .	52.
191.	— pluvialis L. æstiv. . .	189.	. . . . .	53.
192.	— „ hiem.	190.	. . . . .	—
193.	— „ æstiv. (god fig.) .	—	Regnpipare Sved. vel vulgo åkerhöns sed erronnee . .	—

[1]) Denna figur föreställer verkligen en ung *C. frugilegus* med kvarsittande näsborst, hvilket intygas både av namnet »*Råka*» och av de långa vingarna. Den har dock sedan blivit ansedd för en *C. corone* L. Jag är fullt övertygad, att förhållandet är detsamma med alla i Sverige funna exemplar som blivit ansedda för *C. corone*, bland hvilka ett var *C. clericus* Sparrm. Mus. Carlss. pl. 2.

[2]) Vidare tillskrivit: »In Sylva haud longe Upsalis horten dicta a me occisus et in nido ejus 4 ova exigua maculosa».

194.	Vanellus cristatus	176.	Wipa mas.	0.
195.	— „	—	— foemina	0.
196.	Tringa alpina L. autumn:[1]) . . .	181.	. . . . .	48.
197.	Actitis hypoleucos (L.) Ill. . . .	182.	Wippstjert (nyare: »Snäppa»)	46.
198.	Totanus glareola (L.) Bst. . . .	184.	. . . . .	47.
199.	— ochropus (L.) Bst. . . .	180.	(nyare tillsatt: »Horsgök») .	45.
200 A.	Machetes pugnax (L.) Cuv. ♂ vern.	175.	. . . . .	0.
200.	Totanus calidris (L) Bst.[2]) . . .	177.	(Tringa gambetta Fn. Sv. 177)	43.
201.	Machetes pugnax (L.) ♂ hiem. . .	175.	(nyare: »Scol. glottis L. Glutt»)	40.
202.	— „ ♀ hiem. . . .	—	. . . . .	49.
203.	Scolopax gallinago L. rec. . . .	173.	(nyare: »Waldsnäppa») . . .	41.
204.	Limosa lapponica (L.); rufa Briss.	174.	. . . . .	42.
205.	0.			
206.	Scolopax rusticula L.	170.	Morkulla. Myrsnipa	39.
207.	Numenius arquata (L.)	168.	Qvibo Sved.	37.
208.	— phæopus (L.)	169.	mindre Windspof.	38.
209—211.	0.			
212.	Colymbus auritus L. (Podiceps cornutus Lath.) hab. vernali	(152).	mindre, stjertlös Lom . . .	0.
213—217.	0.			
218.	(»Pullus anseris feri tripes») . . .	—	(gåsunge med 3 fötter) . . .	0.
219, 220.	0.			
221.	Uria grylle, æstiv.	148.	Grisla	0.
222.	Anas crecca ♂ hiem.	129.	Årta	0.
223.	0.			
224.	Anas crecca ♂ hab. æstivali . . .	130.[3])	Årta Sved. (mindre god fig.)	0.

[1]) På bladet 196 är sednare tillskrivet (av Lindroth?) »*Tr. littorea*, L. S. N. [ed. X] p. 149 n:o 12», hvilket så vida är rätt, att där blott anföres Fn. Sv. (ed. 1) 151 med dess diagnos, som kan tillhöra *Tr. alpina*, och att vid Fn. Sv. (1) 151 citeras diagnosen till Rudb. pict, 196. Men beskrivningen till samma n:o 121 är en ganska god och tydlig beskrivning af följande art: N:o 152, som är *Tringa glareola* Fn. Sv. ed. 2 och Syst. Nat. X och XII; de nyares *Totanus glareola*. Denna beskrivning är tydligen av misstag insatt vid n:o 151 i stället för 152. I Fn. Sv. ed 2 är n:o 185, *Tr. littorea*, med sin oriktiga beskrifning troget avskriven efter n:o 151 i ed. 1.

[2]) Vingarne äro på n:o 200 så lagda att de hvita cubitalpennorna icke synas. Dock förekomma även exemplar som ha dessa pennor fläckiga, liksom de övriga fjädrarna. Riksmuseum äger ett sådant.

[3]) Vid *Anas circia* Fn. Sv. 130, anför Linné citationen; »*Rudb. Pict.* Anas fusca, media, rostro et pedibus cinereis», hvilket är Rudbecks diagnos på bl. 242. Men Linnés beskrivning på *A. circia* passar alldeles icke till fig. bl. 242, som är en utmärkt god figur av *A. penelope* ♂ i sommardrägt. Den passar deremot temligen väl till fig. på bl. 224, med hvilken även namnet överensstämmer; ty vid bl. 224 lemnar Rudbeck ingen diagnos,

225.	0.		
226.	Anas clangula L. ♂	122.	Knipa . . . . . 0.
227.	Mergus albellus L. ♀ vel jun. . .	138.	(Mergus minutus L.) . . . 0.
228.	— serratus L. ♂	136.	Pracka Sved. mas . . . . 0.
229.	— „ ♀	—	Prackhonan . . . . . 0.
230.	Anas clangula ♂, sommar-drägt .	123.	Brunnacke hon. (sämre fig.) . 0.
231.	— boschas ♀	120 ♀ [1])	. . . . . 0.
232.	— clangula ♀ jun. (et A. glaucion L.)	123.	Brunnacke han. (god figur) . 0.
233.	— fuligula L. ♂ vern.	132.	Wigge . . . . . 0.
234.	0.		
235.	— fuligula L. (♀ el. ♂ i höst-dr.)	—	Wigge, hona ung } namnsed- 0.
236.	— „ (ung utan tofs) . .	—	„ „ äldre } larne förbytte 0.
237.	— boschas L. ♀ (ej färdig-målad)	131 *β*.	Andrake hona . . . . . 0.
238. 239.	0.		
240.	Anas strepera L. ♂	121.	. . . . . 0.
241.	— „ ♀	—	. . . . . 0.
242.	— penelope L. ♂, ren sommar-dr.	(124. jämf. nota [3]) vid bl. 224) . .	0.
243.	— marila L. ♀	111.	(sedn. tillsatt: A. ferina L.) . 0.
244.	0.		
245.	— clypeata L. ♀	119.	Slevtrut honan . . . . . 0.
246.	— „ „ ♂	—	Slevand, slevtrut . . . . . 0.
247.	— boschas ♂ hiem.	131.	Andrake . . . . . 0.
248.	0.	—	. . . . . 0.
249.	— boschas „ in transitu . . .	—	. . . . . 0.
250.	— „ „ hab. æstiv. . . .	(120 ♂: se anm. [1]) vid bl. 231) . .	0.
251.	— acuta L. ♀	126.	Spitzstjert honan . . . . . 0.
252.	— penelope ♂ perf.	124.	bläsand . . . . . 0.
253.	— acuta L. ♂ „	126.	spitzstjert . . . . . 0.
254.	— glacialis L. S. N. XII; hyemalis Fn. Sv., ♂ hiem. . . .	125.	(signata »foemina») . . . . 0.

---

utan blott namnet »Anas circia Gessneri p. 106» och ett par andra citationer. Bladet 224 är således rätta typen till Linnés *A. circia*, som säkert ensamt beror på denna figur. Den oriktiga citationen ur *»Rudb. pict.»* torde härleda sig derifrån att Rudbeck varit oviss hvilkendera fogeln vore de gamles *A. circia* och vid hvardera av figg. 242 och 224 hänvisar till den andra. Ett annat fel vid Linnés *A. circia* är att han säger: »macula alarum cærulea»; på Rudbecks fig. är den grön, såsom på *crecca*.

[1]) Linnés *Anas platyrhynchos*, Fn. Sv. 120 är allenast grundad på 2:ne av Rudbecks figurer, nämligen ♂ på bl. 250 och ♀ på bl. 231. Rudbeck sjelv har ansett dessa utgöra en egen art, som han på de små sedlarna kallat: *Anas fluviatilis rufa*, med tillagd anmärkning att de båda figurerna höra tillsamman såsom hanne och hona. De äro dock ingenting annat än *Anas boschas* ♂ och ♀, dödade om sommaren. Båda figurerna äro dessutom mindre noggranna och den på bl. 250 kan kallas temligen dålig.

255.	Anas glacialis ♂ hiem	125.	(signata »Mas») . . . . . 0.
256.	— „ ♂ jun., auctumn. . .	133.	(utan artnamn)[1]) . . . . . 0.
257.	— „ ♀ jun.[1]) „ . . .	—	d:o . . . . . 0.
258.	— fusca L. ♂	109.	Swärta mas. . . . . 0.
259.	— „ ♀	—	„ honan . . . . . 0.
260.	— mollissima L. ♀	117.	(Eider Worm. Will.) Åda sved. 0.
261.	— „ ♂	—	Ådan han, vel potius Gudungen 0.
262.	Larus canus junior[2])	153.	. . . . . 0.
263.	— fuscus L. senior, æstiv. . . .	154.	. . . . . 0.
264.	Lestris cephus (Brünn.), L. buffoni Boie? [3])	0.	. . . . . 0.
265.	Lestris parasitica (L.) tota fusca .	156.	Struntjagar foemina; Svartlasse 0.
266.	Larus canus L. senior	153.	Gråmåsen, honan . . . . 0.
267.	— „ „ „	—	„ hanen . . . . 0.
268, 269.	O.		
270.	Larus fuscus juv.	154.	Svartspräckliga gråmåsen . 0.

Om man sammanställer alla figurer av samma art och uppräknar dem i en något annan ordning, så befinnes det att Rudbecks arbete i sitt nuvarande skick innehåller figurer av följande 122 arter, nämligen:

Oscines.

	Blad.		Blad.
Luscinia philomela	60.	Turdus musicus	106.
— suecica	59.	— pilaris	107.
— rubecula	67, 2.	— viscivorus	108.
Ruticilla phoenic. . .	66, 67, 68.	— merula	109, 110, 1.
Saxicola oenanthe	65.	— torquatus jun.	110, 1.
Praticola rubetra	69.	Regulus cristatus	56.
Cinclus aquaticus	97.	Sylvia trochilus	„

[1]) De båda figurerna, bl. 256 och 257, äro typerna till: »*Anas* cauda longitudine pedum» etc., Fn. Sv. Ed. 1, 110; Ed. 2, 133, mas et femina. De äro intet annat än årsungarne av *A. glacialis* L., om hösten.

[2]) Fig. på Bl. 262 har blivit ansedd för L. tridactylus hvilket namn finnes i senare tid skrivet på sjelfva bladet, hvilket dock är alldeles orätt. — Likaså har fig. på bl. 263 orätt blifvit ansedd för L. marinus L,

[3]) Det är svårt att avgöra huruvida bl. 264 föreställer *Lestris cephus* eller den ljusa varieteten av *L. parasitica*. Den skarpt begränsade svarta färgen på huvudet och de långa mellersta stjertfjädrarne tyckas bestämdare angiva den förra, som Rudbeck väl kunde ha fått i eller från Lappland. Figuren är dock icke rätt trogen.

Sylvia curruca . . . . . 57.
— cinerea . . . . . 61.
— atricapilla . . . . . 62.
— hortensis . . . . . 63.
Motacilla alba . . . . . 94.
— flava . . . . . 95.
Anthus arboreus . . . . . 86.
Alauda arvensis . . . . . 85.
— arborea . . . . . 87.
Ampelis garrulus . . . . . 91.
Lanius collurio . . . . . 103.
Parus cæruleus . . . . . 111.
— major . . . . . 112.
— palustris . . . . . „
— cristatus . . . . . 113.
— ater . . . . . „
— caudatus . . . . . 118.

Sitta europæa . . . . . 116.
Certhia familiaris . . . . . „

Sturnus vulgaris . . . . 104. 105.
Nucifraga caryocatactes . . . 150.
Garrulus glandarius . . 148, 149.
— infaustus . . . . . 152.
Corvus monedula . . . . . 155.
— frugilegus jun. . . . . 156.
— cornix . . . . . 157, 158.

Loxia curvirostra . . . . . 99.
— pityopsittacus . . . . 100.
Corythus enucl. . . . . 102.
Pyrrhula vulgaris . . . . . 98.
Fringilla chloris . . . . . 96.
— flavirostris . . . . 58.
— cannabina . . . . 72.
— carduelis . . . . . 73.
— spinus . . . . . 74.
— linaria . . . . . 75.
— cælebs . . . . . 70.
— montifr. . . 88, 1; 91; 92, 2.
— domestica . . . . . 79.
— montana . . . . . 80.
Emberiza citrinella . . . . . 76.
— schoeniclus . . . . 77.
Emberiza hortulanus . . . . 78.
— lapponica . . . . 88, 2.
— nivalis . . . . . 92, 1.
Hirundo rustica . . . . . 82.

Volucres.

Cypselus apus . . . . . 83.
Caprimulgus eur. . . . . 84.
Cuculus canorus . . 159, 160, 161.
Iynx torquilla . . . . . 117.
Picus minor . . . . . 118.
— tridactylus . . . . . 119.
— major . . . . . 120.
— leuconotus . . . . 121, 122.
— canus . . . . . 123.
— viridis . . . . . 124, 125.
— martius . . . . 127, 128.
Coracias garrula . . . 153, 154.
Columba oenas . . . . . 136.
— palumbus . . . . . 137.

Accipitres.

Strix passerina . . . . . 163.
— tengmalmi . . . . 165, 170.
— aluco . . . . . 169, 171.
— brachyotus . . . . . 167.
— otus . . . . . 168.
Falco tinnunculus . . 176, -7, -8.
— subbuteo . . . . . 179.
Astur nisus . . . . . 180, 181.

Gallinæ.

Coturnix communis . . . . 136.
Perdix sp. exot. . . . . 137.
— cinerea . . . . 138, 139.
Lagopus lapponica . . . 140, 141.
Tetrao bonasia . . . . . 142.

Grallæ.

Charadrius hiaticula . . . . 188.
— minor . . . . . 189.
— morinellus . . . 190.
— pluvialis . . 191, -2, -3.
Vanellus cristatus . . . . . 194.

Scolopax rusticula . . . . . 206.
— gallinago . . . . 203.
Tringa alpina . . . . . 196.
Machetes pugnax . 200 A, 201, 202.
Actitis hypoleucos . . . . . 197.
Totanus glareola . . . . . 198.
— ochropus . . . . . 199.
— calidris . . . . . 200.
Limosa rufa . . . . . 204.
Numenius arquata . . . . . 207.
— phæopus . . . . . 208.

Anseres L.

Larus canus . . . . 262, 266, 267.
— fuscus . . . . 263, 270.
Lestris parasitica . . . . . 265.
— cephus? . . . . . 264.
Uria grylle . . . . . 221.
Colymbus auritus L. . . . . 212.
(Anser? pullus tripes) . . . 218.
Anas crecca . . . . . 222, 224.
— boschas 231, 237, 247, 249, 250.
— strepera . . . . . 240, 241.
— penelope . . . . 242, 252.
— acuta . . . . . 251, 253.
— clypeata . . . . 245, 246.
— clangula . . 226, 230, 232.
— fuligula . . . 233, 235, 236.
— ferina . . . . . 243.
— fusca . . . . . 258, 259.
— mollissima . . . . 260, 261.
— glacialis . . 254, -5, -6, -7.
Mergus albellus . . . . . 227.
— serratus . . . . 228, 229.

För att lemna en åskådlig bild av Rudbecks verksamhet för Ornithologien, meddela vi här en

FÖRTECKNING PÅ FIGURERNA I ÖSTERBY-EXEMPLARET AV RUDBECKS FOGELBOK.

Bladen anföras i den ordning hvari de nu finnas lagda och numererade, med anförande av numret på det blad i original-exemplaret, hvarifrån hvarje figur är efterbildad. De i följd med dessa nummer anförda tecknen + utmärka de figurer som här tillkommit, men som saknas i det äldre exemplaret. De äro blott tre.

1. Falco subbuteo . Orig. n:o 179.
2. — tinnunculus . . . 178.
3. — „ . . . . 177.
4. — „ . . . . 176.
5. Astur nisus . . . . . 180.
6. — „ . . . . . 181.
7. Strix otus . . . . . 168.
8. — brachyotus . . . . 167.
9. — tengmalmi . . . . 165.
10. — „ . . . . 170.
11. — aluco var. rubida . 169.
12. — „ „ cinerea . 171.
13. Strix passerina . . . . 163.
14. Lanius collurio ♂ ♀ . . . 103.
15. Garrulus infaustus . . . 152.
16. Corvus frugilegus juv. . . 156.
17. — cornix . . . . 158.
18. — „ alba . . 157.
19. — monedula . . . 155.
20. Garrulus glandarius . . 148.
21. — „ . . 149.
22. Cuculus canorus . . . . 161.
23. — „ . . . . 159.
24. — „ juv. . . 160.

25. Iynx torquilla . . . . 117.
26. Picus martius . . . . 128.
27. — „ . . . . 127.
28. — viridis . . . . . 124.
29. — canus . . . . . 123.
30. — major . . . . . 120.
31. — leuconotus ♂ . . . 122.
32. — „ ♀ . . . 121.
33. — minor ♂♀ . . . . 118.
34. Sitta europæa . . . . 116, 1.
35. Certhia familiaris . . . — 2.
36. Sterna arctica . . . . +
37. Numenius arqvata . . . 207.
38. — phæopus . . . 208.
39. Scolopax rusticula . . . 206.
40. Machetes pugnax . . . 201.
41. Scolopax gallinago . . . 203.
42. Limosa rufa . . . . . 204.
43. Totanus calidris . . . . 200.
44. Strepsilas interpres ♂ æstiv. +
45. Totanus ochropus . . . 199.
46. Actitis hypoleucus (med Sv. namnet *Strandstrickla*) . . 197.
47. Totanus glareola . . . 198.
48. Tringa alpina . . . . 196.
49. Machetes pugnax ♀ . . 202.
50. Charadr. minor . . . . 189.
51. — hiaticula . . . 188.
52. — morinellus . . 190.
53. — pluvialis . . . 191.
54. Lagopus lapponica . . . 140.
55. — „ . . . 141.
56. Perdix cinerea . . . . 138.
57. — sp. exot. . . . . 137.
58. Coturnix comm. ♂♀ . . 136.
59. Columba oenas . . . . 132.
60. Alauda arvensis . . . . 85.
61. — arborea . . . . 87.
62. Anthus arboreus . . . . 86.
63. Sturnus vulgaris . . . . 104.
64. — „ . . . . . 105.
65. Turdus pilaris . . . . 107.
66. — musicus? . . . 106, 1.
67. — viscivorus . . . 108.
68. Turdus musicus . . . . 106, 2.
69. Turdus pilaris . . . . 107, 2.
70. — merula ♂ . . . 110, 1.
71. — „ ♀ . . . . 109.
72. — torquatus juv. . . 110, 2.
73. Ampelis garrulus . . . 90.
74. Corythus enucleator . . 102.
75. Loxia curvir. ♂♀ . . . 99.
76. Pyrrhula vulg. . . . . 98.
77. Emberiza nivalis . . . 92, 1.
78. Fringilla montifr. . . . 91.
79. Emberiza citrinella . . . 76.
80. schoeniclus . . 77.
81. — lapponica . . 88, 2.
82. Fringilla coelebs, ♂♀ . . 70.
83. — montifringilla . . 88, 1.
84. — carduelis . . . . 73.
85. — spinus ♂♀ . . . 74.
86. — flavirostris . . . 58.
87. — cannabina ♂♀ . . 72.
88. — linaria . . . . . 75.
89. — domestica ♂♀ . . 79.
90. — montana . : . . 80.
91. Sylvia cinerea . . . . 61.
92. Saxicola oenanthe . . . 65.
93. Praticola rubetra ♂♀ . . 69.
94. Sylvia atricapilla ♂♀ . . 62.
95. Ruticilla phoenicurus ♂♂ . 66.
96. — „ ♀♀ 67, 68.
97. Luscinia suecica ♂♀ . . 59.
98. — rubecula . . . . 67, 2.
99. Regulus cristatus . . . . 56.
— Sylvia trochilus . . . . „
100. — curruca . . . . . 57.
— — ? . . . . . „
101. Accentor modularis . . . 60.
102. Parus major . . . . . 112, 1.
103. — cristatus . . . . 113, 1.
104. — cæruleus . . . . 111.
105. — ater . . . . . 113, 2.
106. — palustris L. . . . 112, 2.
107. Hirundo rustica . . . . 82.
108. — riparia . . . . +

DE AV LINNÉ CITERADE FIGURERNA ÄRO FÖLJANDE:

L. Fn. Sv. Ed. 2

vid n:o 59, FALCO SUBBUTEO : *Rudb. pict. Dendrofalco;* är Orig. bl. 179.
— „ 64, FALCO GYRFALCO : *R. p. Falco albocinereus* etc.; saknas.
— „ 70, STRIX SCANDIACA : *R. p. Bubo scandiacus;* saknas.
— „ 73, STRIX sp. : *R. p. Strix tota flammea;* är Orig. bl. 167.
— „ 74, STRIX sp. : *R. p. Noctua major* etc,; är Orig. bl. 165.
— „ 75, STRIX FUNEREA : *R. p. Noctua major* etc.; är Orig. bl. 170.
— „ 76, STRIX NYCTEA : *R. p. Noctua scandiana* etc.; saknas.
— „ 109, ANAS FUSCA : *R. p. Anas fera nigra;* motsvarar Orig.-bladen 258 och 259.
— „ 116, ANAS ERYTHROPUS : *R. p. Anser cinereus ferus* etc.; saknas.
— „ 120, ANAS PLATYRHYCHOS: *R. p. Anas fluv. rufa, mas.;* är Orig, bl. 250.
„ „ *R. p. Anas fluv. rufa* etc.; är Orig. bl. 231.
— „ 125, ANAS HYEMALIS : *R. p. Anas cauda longa* etc.; är Or. bl. 254, 255.
— „ 130, ANAS CIRCIA : se anm [3]) vid Orig. n:o 224.
— „ 133, ANAS sp. : *R. p. Anas cauda long. pedum* etc ; är Orig. bl. 256 och 257.
— „ 134, ANAS sp. : *R. p. Anas fluviat. rufa, rostro et pedib. cinereis;* saknas.
— „ 138, MERGUS MINUTUS : *R. p. Mergus minimus* etc.; är Orig. bl. 227.
— „ 163, ARDEA NIGRA : *R. p. Ardea fusca* etc.; saknas.
— „ 174, SCOLOPAX LAPPONICA: *R. p. Scol. rostro recurvo* etc.; är Or. bl. 204.
— „ 184, TRINGA GLAREOLA : *R. p. Gall. aqv. minor* etc.; är Orig. bl. 198.
— „ 185, TRINGA LITTOREA : *R. p. Gall. aqv. minima* etc.; är Orig. bl. 196.
— „ 187, CHARADR. HIATICULA : *R. p. Charadr. s. hiatic.* etc.; är Orig. bl. 188.
— „ 189, CHAR. APRICARIUS : *R. p. Pluvialis minor* etc.; är Orig. bl. 191.
— „ 233, FRINGILLA MONTIFR. : *R. p. Carduelis angerm.,* } se noten [2]) vid bl.
— „ 234, FRING. LULENSIS : *R. p. Card. lulensis* } 88, f. 1.
— „ 234, FRING. LAPPONICA : *R. p. Card. lapponica;* är Orig. bl. 88, 2.
— „ 238, FRING. FLAMMEA : *R. p.* (»*fusca, crista flammea*»); saknas.
— „ 239, FRING. FLAVIROSTRIS: *R. p.* (»*fusca rostro flavicante*»); är Orig. bl. 58.
— „ 259, MOTACILLA SUECICA ♂: *R. p. Avis carolina mas;* är Orig. bl. 59, 1.
„ „ ♀: *R. p. Avis carolina foem.;* är Orig. bl. 59, 2.

ÉTUDES

SUR LE GENRE PEPEROMIA,

COMPRENANT

LES ESPÈCES DE CALDAS, BRÉSIL.

PAR

SALOMON HENSCHEN.

AVEC 7 PLANCHES.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 9 octobre 1872).

UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1873.

Si les végétaux de la zone tropique offrent déjà bien des difficultés aux botanistes de l'Europe, ces difficultés redoublent pour les familles contenant des plantes succulentes et charnues. Les collections que l'on en a, sont ordinairement plus incomplètes que celles d'autres plantes, et leur mauvais état, conséquence naturelle de la condition charnue de ces plantes, apporte un grave empêchement à leur étude rigoureuse. La difficulté d'en donner des descriptions exactes devient naturellement encore plus sensible dans les familles formées de plantes ayant échappé par leur peu d'apparence à l'attention plus spéciale des voyageurs, et dont les organes qui serviraient à distinguer les espèces, sont, à cause de leur petitesse, exposés à des changements considérables pendant la préparation.

L'étude seule des plantes dans la nature même peut fournir une base bonne et certaine pour leur connaissance et leur disposition systématique. Les avantages qu'offre une observation directe, sont le plus souvent d'une importance telle, qu'ils ne peuvent pas être compensés par les meilleures collections et par l'analyse la plus soigneuse.

L'habitus général suffisant déjà dans plusieurs cas à faire saisir les affinités d'une plante, la facilité de comprendre ce qu'il y a de constant et de caractéristique pour chaque espèce, augmente à mesure qu'accroît l'occasion d'examiner des individus nombreux et vivants, de localités différentes.

La circonstance que les difficultés signalées ci-dessus ont été comprises il y a déjà longtemps, spécialement à l'égard du genre que nous avons à traiter plus bas, est évidemment prouvée par le passage suivant du "*Systema Vegetabilium*" de Linné (Ed. XIV, anno 1784, p. 75): "*Species Piperis, inprimis Saururi Plum., solo natali examinandæ, ut appareat utrum differant a reliquis in partibus fructificationis*".

Par toutes ces raisons, nous avons cru que tout essai de contribuer à la connaissance de ces plantes, fondé sur des observations directes dans la nature, doit être utile et bienvenu, même s'il n'enrichissait pas le système de beaucoup de nouvelles espèces. En effet, nous avons eu, pendant notre séjour au Brésil dans les années 1867—69, une excellente occasion d'observer les espèces du genre *Peperomia*, décrites ci-dessous, dans les diverses phases de leur développement et dans des localités différentes.

Le territoire, dont nous avons examiné les espèces, n'est pas d'une étendue très-considérable; il forme un circuit de 10 à 15 lieues autour de la ville de Caldas dans la province de Minas Geraës, et n'offre à cause de cela qu'un nombre restreint d'espèces en proportion de la totalité de celles de tout le genre *Peperomia*. Pourtant, nous ne trouvons dans cet espace pas moins de 24 espèces, la Flore du Brésil de MARTIUS (fasc. XI, 1852) en donnant seulement 53, nombre qui, toutefois, doit être à présent considérablement augmenté, et qui probablement s'accroîtra encore davantage dans peu de temps, à mesure que s'étendra la connaissance de la Flore Brésilienne.

Quant à la détermination des espèces, nous avons cru le plus convenable de la laisser aux savants qui font actuellement autorité dans cette famille. Deux collections identiques ont été par conséquent remises à MM. MIQUEL et CAS. DE CANDOLLE pour être soumises à leur détermination; en outre, nous avons envoyé à M. DE CANDOLLE notre manuscrit (avec figures), écrit déjà en 1869.

Les résultats auxquels sont arrivés ces Messieurs, sont communiqués plus bas sous chaque espèce, sous la rubrique "Exs."; de plus, M. MIQUEL a publié ses déterminations dans les "Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles" Tom. VI, 2ème Livraison, La Haye 1871, citées plus bas sous le titre: "Archiv. l. c." Cependant on trouvera que les déterminations de ces Messieurs sont tellement différentes l'une de l'autre, que nous nous croyons en droit de donner notre avis dans la question. Voilà la cause de la publication de ces pages.

Nous voulons donc premièrement faire un court exposé de la localité, puis présenter un aperçu critique de la description générale des espèces et de la classification systématique qu'ont donnée les auteurs. Nous essayerons en outre d'exposer et de discuter la valeur relative des divers organes pour la distinction des espèces, et les changements auxquels ces plantes sont soumises pendant leur préparation. Les modifications que nous avons cru devoir faire dans l'arrangement systématique, ne concernent que les espèces de Caldas, mais nous espérons pouvoir signaler aussi certains côtés peu corrects de la méthode actuelle.

Les descriptions des espèces qui closent ce travail, sont faites entièrement d'après des plantes vivantes, l'auteur ayant suivi les plantes pendant leur développement et observé avec soin les variations que produisent les différences du terrain et des localités. Ces études nous amenèrent bien des fois à délimiter les espèces d'une manière différente de celle admise par les auteurs nommés ci-dessus. Il nous a été de même inévitable de donner aux descriptions une longueur qui paraîtra peut-être surabondante, pour comprendre en outre toutes les formes aberrantes sous les diagnoses.

Nous avons ajouté à ces observations des remarques sur quelques espèces, décrites par M. O. SWARTZ, mais à présent peu connues ou méconnues par les auteurs; ces observations ont été faites par contre sur les échantillons originaux de ce savant, qui se trouvent aux Musées de Stockholm et de l'Université d'Upsal.

Relativement à la synonymie et aux auteurs cités, nous nous sommes généralement borné à citer les auteurs originaux et les ouvrages de MM. MIQUEL et CAS. DE CANDOLLE, où l'on trouvera la synonymie la plus complète.

Hors des espèces nommées plus bas, M. le docteur REGNELL à Caldas, en a trouvé près de cette ville une que M. MIQUEL nomme *Peperomia arifolia* Miq.; M. C. DE CANDOLLE la considère comme une espèce nouvelle: "*Pep. Verhuellioe* C. DC in Prodr. N. 23 *proxima*". Ne l'ayant jamais examinée dans la nature, nous n'en donnons pas la description plus bas. Cette espèce est le représentant d'une section particulière du genre.

La ville de **Caldas** est située dans la province de **Minas Geraës** (Mines Générales), entre le 21° et 22° de Lat. mérid. et entre le 3° et 4° de Long. Ouest de Rio de Janeiro. Ses environs, qui sont parmi les points les plus élevés de cette province, peuvent mesurer de 750—900 mètres au-dessus de la mer, et appartiennent à la région que M. MARTIUS a nommée "*regio montano-campestris*". En effet, ils forment un vaste plateau ondulé, ouvert, traversé de dépressions nombreuses, boisées, et environné de chaînes de montagnes, qui dominent les terres voisines d'une altitude de 300 à 450 mètres. Ainsi ces montagnes ont une hauteur considérable; leurs sommets s'élèvent sous la forme de rochers nus, gris, couverts d'une végétation maigre de mousses et de lichens, contrastant d'une manière remarquable avec la riche verdure des forêts qui couvrent les flancs et les pentes des montagnes mêmes.

Dans ces régions, les Pépéromiées appartiennent principalement aux forêts. On les y voit orner les arbres, en couvrant les troncs perpendiculaires, ou formant de petits bouquets, comme les Orchidées, contentes de la faible

nourriture que peut offrir l'écorce des arbres. Pourtant un groupe spécial des Pépéromiées, celui des Rhyncophores, préfère la terre féconde des forêts vierges, où les représentants de ce groupe parviennent à un développement plus riche; aussi leur aspect change généralement beaucoup et prend des formes très-caractéristiques. Sur des rochers nus, exposés au soleil ardent, on cherchera ordinairement en vain des représentants de ce genre. On n'y trouvera que la *Peperomia oreophila;* quelquefois la *P. trineura* y descend aussi des rameaux des arbres voisins, pour changer en même temps son habitus.

SUR LA DESCRIPTION GÉNÉRALE DES ESPÈCES.

L'habitus général des Pépéromiées marque le plus souvent très-distinctement les limites des espèces, même où elles manquent d'autres caractères distinctifs et constants. Il est évident qu'il est à-peu-près impossible d'étudier dans les herbiers l'habitus de ces plantes et d'en tirer tous les avantages s'offrant à l'observateur qui les voit dans la nature même. A cet égard, nous voulons indiquer quelques espèces confondues l'une avec l'autre. Ce sont les *P. oreophila* et *P. fimbriata β pilosior*, *P. circularis* et *delicatula*, *P. reflexa* et *Minensis*, *P. myrtifolia* et *Martiana*, *P. blanda* var. *Langsdorffii* et *increscens*, *P. alata*, *augescens*, *nuda* et *Velloziana*, — nombre très-grand en proportion de la totalité des espèces décrites ci-dessous.

Les caractères de la **tige** échappent le plus souvent aux auteurs, qui ne peuvent travailler que sur des échantillons secs; cela concerne surtout toutes les espèces fort charnues. La tige change aussi très-souvent pendant la préparation; ainsi les tiges rondes deviennent sulcées ou anguleuses, etc.; — de là, la confusion entre les *P. alata* et *augescens:* celle-ci manque tout-à-fait d'ailes.

La longueur des **entre-noeuds** est de peu d'importance pour la description; nous aurons plus bas l'occasion d'indiquer des différences à cet égard, en établissant les variétés que produisent les localités différentes. En effet, nous observerons généralement deux formes de chaque espèce, une *forma laxa* et une *forma stricta:* celle-ci croissant dans les lieux arides, celle-là sur un terrain plus fécond et ombreux.

Les **noeuds** montrent chez quelques espèces des singularités remarquables, surtout chez les espèces du *Micropiper.*

Les caractères des **feuilles** ont toujours fait la base de la description des espèces appartenant à ce genre; ils doivent donc être soigneusement

observés et correspondre à ceux de la plante vivante. Cependant les feuilles sont généralement sujettes à des changements considérables pendant l'exsiccation. Nous observons à cet égard:

a) quant à la **forme**: les feuilles épaisses, charnues se contractent pendant la préparation et changent même de forme; la base obtuse devient aiguë, etc.; dans plusieurs espèces, ces circonstances peuvent causer beaucoup de confusion, par exemple dans le groupe auquel appartient la *P. augescens;* par la même raison, la *P. Minensis* perd beaucoup de l'habitus qui lui est caractéristique.

b) La **consistance** et l'épaisseur, qui donnent à la plante vivante un aspect singulier, ne peuvent être reconnues sur la plante sèche. Les espèces suivantes offrent à cet égard des caractères remarquables: les *P. Campinasana*, *rhombea*, *Martiana*, *loxensis*, *tenera* etc. Le plus souvent, la consistance présente une certaine relation avec le terrain, comme nous le verrons en étudiant les variétés.

c) La **pubescence**, qui donne parfois de bons caractères, semble être d'une importance plus faible. La *P. oreophila*, dont il existe des formes à peu près lisses, entremêlées de formes tout-à-fait velues, est fort remarquable à cet égard. Les auteurs admettent généralement, mais le plus souvent, à tort, selon nous, que cette différence est fondée sur divers états de développement.

d) La **ponctuation** n'est pas la même à l'état vivant qu'à l'état sec. Souvent les feuilles charnues ne se présentent ponctuées à points transparents qu'à l'état sec; les points glanduleux changent aussi de couleur.

e) La **nervure**, qu'on décrit si scrupuleusement, doit être observée dans la plante vivante, où elle présente des caractères importants qui se perdent plus ou moins pendant la préparation. La *P. trineura* fournit un excellent moyen de voir à quelle confusion on peut arriver en négligeant un caractère si important. Chez la *P. augescens* et ses espèces affines, la nervure présente aussi des différences remarquables.

f) Le **nombre des feuilles** dans les verticilles doit être examiné avec beaucoup de soin. Nous avons constaté plusieurs fois, dans les descriptions, que le nombre décrit ne correspond pas au véritable; — de là résulte beaucoup de confusion dans la délimitation des espèces; nous avons noté ces circonstances plus bas sous quelques espèces, comme par exemple les *P. delicatula*, *increscens.* Toute cette confusion provient de la circonstance que des feuilles se détachent souvent de la tige à l'exsiccation de la plante; pourtant on pourrait, quoique avec peine, trouver le nombre véritable, en examinant avec soin les cicatrices des pétioles dans les noeuds.

Il arrive aussi parfois qu'une feuille, en se détachant du verticille, change de place dans la tige; ainsi, une espèce à trois feuilles dans chaque verticille, paraît avoir des feuilles opposées, entremêlées de feuilles solitaires; ces dernières tombent quelquefois; il arrive même que le verticille se dissout tout-à-fait; de cette manière, une espèce à feuilles typiquement verticillées apparaît à feuilles alternes.

Si les parties végétatives offrent déjà des difficultés dans la description de la plante sèche, il y en a bien davantage à l'égard des organes de la fructification. Les échantillons des herbiers, présentant le plus souvent la plante seulement à un certain état de son développement, ne permettent pas à l'observateur de distinguer ce qui est essentiel ou variable dans ces parties. Un coup d'oeil sur les descriptions de ces organes chez les auteurs, nous convaincra bientôt que les mêmes échantillons ont été décrits d'une manière essentiellement différente, et en conséquence classés dans des groupes différents. Cela concerne spécialement la description du stigmate, celle de l'ovaire, de la baie et du pédicelle, caractères sur lesquels on a fondé la disposition systématique de ce genre.

Nous allons pour cette cause examiner soigneusement ces organes.

L'insertion du chaton a une certaine relation avec l'âge et l'habitus de la plante. Souvent la jeune plante présente un chaton terminal et solitaire, environné de chatons axillaires seulement dans un état plus avancé; de même on trouvera généralement le chaton terminal dans la plante dressée, tandis que dans la rampante il se change en axillaire. Par suite, la même plante présente des différences à cet égard, d'où l'on voit qu'il ne faut pas établir des espèces seulement sur des circonstances de cette nature, comme, p. ex. la *P. urocarpa* Fisch. et Mey. Fl. Bras.

La longueur du pédoncule donne à la plante mûre seule un caractère constant; sa relation avec le chaton prend ainsi beaucoup d'importance; nous croyons même avoir observé qu'il existe certains groupes caractérisés par des différences à cet égard. Ces circonstances paraissent être très-négligées par les auteurs, principalement dans les figures.

Relativement à la disposition des fleurs sur le chaton, il y a des différences considérables dans les divers états de son développement; encore jeune, le chaton se présente généralement densiflore, à fleurs imbriquées, montrant une surface aréolée. Ces circonstances changent bientôt; chez la plante mûre, on trouvera enfin à cet égard des propriétés caractéristiques, qui paraissent avoir un certain rapport avec l'épaisseur du chaton.

Dans la plante sèche on cherchera ordinairement en vain le rapport qui existe entre l'épaisseur du pédoncule et celle du chaton; pourtant il y a là des signes excellents qui peuvent servir à la distinction des espèces.

Souvent on a négligé tous les caractères ci-dessus, en en préférant d'autres plus variables, parmi lesquels nous remarquerons:

1) L'immersion des fleurs dans le rachis est tellement difficile à observer sur la plante sèche, et change même si fort pendant le développement du fruit, qu'on ne devrait ni risquer de baser sur elle la distinction des espèces, ni accepter ce caractère comme distinctif. La jeune fleur est généralement immergée, et plus ou moins couverte de la bractée peltée, qui y est ordinairement unie. Pourtant il y a des exceptions à cette règle; chez la *P. major* (voir notre figure), la bractée est fixée dans une fovéole particulière au-dessous de la fleur. A mesure que le fruit se forme, le sommet de l'ovaire forme saillie à la surface du chaton; la baie demi-mûre est ainsi seulement incluse à la base dans la fovéole du rachis (voir nos figures). La baie reste dans cet état jusqu'à la maturation; mais à ce temps entrent soudain d'autres changements, qui ne paraissent pas avoir été observés par les auteurs. Il se forme rapidement, au fond de la fovéole où le fruit est attaché, une éminence charnue qui augmente considérablement en longueur et en épaisseur, et qui apparaît bientôt comme une espèce de pédicelle, sur lequel est attachée la fleur ou plutôt la baie mûre avec les cicatrices des étamines (voir les figures). Ce pédicelle prend souvent une forme caractéristique; chez la *P. major* nous le trouvons presque globuleux et peu proéminent, mais dans la plupart des espèces il est plus ou moins étiré. Le fruit développé, les étamines tombent, et l'on en voit seulement les cicatrices comme deux petites éminences entourant la base de la baie. Cependant le fruit est arrivé au point de sa maturité et tombe alors à l'attouchement le plus léger, d'autant plus que sa surface est couverte d'un liquide visqueux, qui lui permet de s'attacher aux objets avec lesquels il entre en contact. On cherchera donc le plus souvent en vain des baies mûres dans les herbiers; ce qu'on a décrit comme des baies mûres, n'a été que des ovaires à demi-mûrs ou peut-être même les pédicelles qui leur ressemblent. La direction de la baie varie en général d'une manière caractéristique suivant les espèces; dans quelques-unes, les fruits sont dirigés horizontalement en dehors, dans d'autres au contraire, ils sont plus ou moins pressés contre le rachis, différence au reste impossible à observer sur des échantillons secs.

Etudié au microscope, le pédicelle dont nous avons parlé, se présente comme un tissu de cellules allongées, parcouru par un faisceau vas-

culaire, qui, entrant au sommet du pédicelle dans la baie, en forme l'insertion.

La présence d'un pédicelle paraît être parfaitement constante. Nous l'avons observé dans toutes les Pépéromiées vraies, à l'exception des *P. circularis*, *oreophila*, *Campinasana*, *rhombea* et *alata*. Mais nous supposons qu'il y en a aussi chez ces espèces, d'autant plus que nous ne les avons jamais recueillies dans un état parfaitement mûr, et que ce pédicelle, comme nous l'avons dit ci-dessus, ne se développe qu'au moment même de la maturité de la baie. Nous ne pouvons expliquer que ces circonstances n'aient pas été observées auparavant, que par la difficulté d'examiner, surtout à l'état sec, des organes si petits, et parce que le fruit tombe presque au moment même où le pédicelle se forme; au reste, cet organe ne semble pas se développer chez la plante cultivée; du moins les auteurs ne l'y ont pas observé. Nous admettons, par suite, que toutes les Pépéromiées vraies ont la baie pédicellée.

Il y a pourtant des circonstances anomales dans lesquelles le pédicelle ne se forme pas; c'est quand le fruit est attaqué par des insectes. Nous avons observé quelques espèces exposées par préférence à ces anomalies. Ce sont les espèces affines à la *P. augescens;* dans nos figures (tab. V, fig. 1 f.), nous avons dessiné un fruit de ce genre. L'insecte en perçant le péricarpe dans ou près de l'ouverture du stigmate, dépose ses oeufs entre le péricarpe et l'ovule. Le fruit prend donc des formes étranges; son volume accroît considérablement, et sa surface se couvre de gros poils. Nous craignons que ces baies anomales n'aient été quelquefois décrites comme de vrais fruits.

Bien différente de celle des Pépéromiées vraies, est la construction des organes de la fructification chez la *P. tenera;* cette espèce a le chaton filiforme, presque sec ou fibreux, ou du moins non charnu, à fleurs sessiles, émergées, seulement couvertes chacune de sa bractée; au temps de la maturité du fruit, la partie inférieure de l'ovaire se contracte et se transforme en une espèce de pseudo-pédicelle qui tombe avec la baie mûre et en est la continuation; ce pseudo-pédicelle est, à son extrémité inférieure, articulé avec le chaton. Cette espèce se distingue conséquemment de toutes les autres que nous avons examinées, et a causé, comme on le verra bientôt, beaucoup de confusion dans le système.

La forme et la consistance des bractées sont observées et décrites le plus souvent avec le soin le plus minutieux par les auteurs; nous, par contre, n'y avons point trouvé des différences assez importantes pour former des caractères spécifiques d'espèces affines; elles sont presque toujours peltées, orbiculaires, quelquefois crénelées au bord, plus ou moins membraneuses ou quelque peu charnues; cependant ces différences varient avec les

circonstances, et se modifient avec l'état de dessiccation de la plante. Quant à la persistance des bractées, M. Miquel distingue entre des bractées caduques et des bractées persistantes; nous ne les avons jamais trouvées caduques, mais dans quelques espèces elles sont pressées contre le rachis ou même cachées dans ses fossettes, et peuvent échapper ainsi à l'observateur, comme c'est le cas, p. ex., dans la *P. reflexa*. Elles offrent à cet égard des différences remarquables et constantes.

3) Relativement aux **étamines**, nous n'y avons pas trouvé de caractères d'une importance assez grande pour mériter d'être signalés dans les descriptions. Leur forme, leur couleur, etc., varient avec les phases de développement; cependant on trouve ces parties décrites avec un soin si grand, que les distinctions établies ne peuvent pas être reconnues même chez la plante vivante.

Par contre, on néglige trop les caractères de la **baie** et surtout ceux de son péricarpe, qui, à notre opinion, fournissent à la description des signes constants et importants. Etudions donc, pour nous en convaincre, leur forme et leur structure au microscope. La loupe à la main, nous pouvons déjà distinguer deux sortes de fruits, l'une représentée par celui de la *P. nuda*, l'autre par celui de la *P. reflexa* (voir tab. VI, fig. 1 *b*, et tab. II, fig. 2 *b*), celle-ci le type de la section *Micropiper*, celle-là l'un des représentants de la section *Rhyncophorum*. En voici la description.

La baie des Micropipères a la forme d'une bouteille tantôt parfaitement symétrique, tantôt un peu oblique; la baie est ellipsoïde ou ovoïde, à base arrondie; le sommet, parfois court, obtus et épais, parfois plus ou moins allongé, se termine par le stigmate apicilaire. Elle offre une surface singulière; sous la loupe, le péricarpe semble entouré à la base d'une espèce de cupule visqueuse, qui s'étend presque jusqu'au milieu de la baie, et qui se termine par un bord bien marqué; la partie supérieure présente une surface lisse, sans glandes ni viscosités. Ces différences extérieures des parties inférieures et supérieures, correspondent aux différences de la construction microscopique. La membrane extérieure de la partie inférieure est constituée par des cellules petites, serrées et très-anguleuses, — tissu qui devient plus lâche au milieu de la baie, où les cellules sont plus grandes, polygonales et à angles moins aigus; de plus, la partie inférieure, qui a une couleur plus prononcée, est couverte d'un liquide visqueux, qu'on peut enlever sans difficulté. Il existe des différences correspondantes dans la membrane intérieure du péricarpe, même à l'égard de son épaisseur; en effet, les cellules inférieures sont plus épaisses et plus colorées (voir tab. I, fig. 1).

Les baies des Rhyncophores présentent une autre construction. La baie, plus ou moins globuleuse, se termine par un disque oblique celluleux, au milieu ou à la base duquel on voit le stigmate plongé. Le péricarpe est constitué par des cellules polygonales, minces, presque hyalines, plus grandes que dans les Micropipères, entremêlées de grosses cellules glanduleuses (voir tab. I, fig. 2). Toute la surface devient ainsi verruqueuse et visqueuse, et ne présente pas de différences dans la construction des parties apicilaires et basilaires du péricarpe.

En connexion avec ces caractères divers du péricarpe, l'ovaire offre des signes importants, dont nous parlerons ci-dessous.

La forme de la baie, qui est caractéristique pour chaque espèce, est peu connue des auteurs. Ce sont surtout les baies mûres qui présentent les différences principales à cet égard. Nous avons cru cette circonstance assez importante pour valoir la peine de dessiner les baies des espèces de Caldas.

Nous avons fait ci-dessus une revue critique des organes des plantes précitées; nous avons recherché les changements que subissent ces organes pendant la préparation, et nous croyons avoir montré que ces changements sont d'une importance si considérable, qu'une description basée sur la plante sèche peut à peine être considérée comme correcte, ou qu'elle sera du moins incomplète dans la plupart des cas. Quant à la valeur relative des organes pour les descriptions spécifiques, nous avons trouvé que les auteurs, tout en négligeant bien souvent des organes importants et constants, qui ont été difficiles à observer dans les herbiers, ont fait servir à leurs diagnoses des caractères de parties qui ne présentent point de différences assez remarquables pour mériter une mention spéciale.

SUR LA DISPOSITION SYSTÉMATIQUE.

Si nous avons réussi ci-dessus à signaler les difficultés que présente la description de ces plantes, on comprendra sans peine que leur classification ait donné lieu à une assez grande diversité d'opinions. Quoique nous n'ayons eu l'occasion d'examiner dans la nature qu'un petit nombre d'espèces, nous nous sommes cru en droit d'exposer les résultats auxquels nous sommes arrivé sur l'arrangement général de ce genre; en effet, les espèces décrites plus bas paraissent représenter des types des principales sections du genre.

Dans le *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis* (Pars XVI, I, p. 392), M. CAS. DE CANDOLLE a divisé le genre *Peperomia* en deux sections, savoir:

§. 1. à ovaire stylifère;

§. 2. à ovaire sans style.

Toutes nos espèces appartiennent à la seconde section.

Nous croyons que ces caractères, la présence ou l'absence d'un style, ne sont pas d'une importance assez essentielle pour déterminer la division principale d'un genre aussi vaste que celui de *Peperomia*: d'un côté, parce qu'il est bien difficile de décider s'il existe un style ou non chez une certaine espèce, de l'autre, parce qu'une division semblable du genre sépare des espèces affines.

En examinant les *Peperomia Mandonii* CDC., *P. tenera* MIQ., *P. hispidula* (SW.), nous comprendrons la vérité et l'importance de ces deux raisons. Ces trois espèces sont tellement affines, que les deux dernières ont déjà été réunies sous le même nom par la plupart des auteurs; quant à la première, on sera peut-être bientôt forcé de la joindre aux autres. Cependant, nous trouvons dans le *Prodromus* la première sous le §. 1, à ovaire stylifère, les deux autres sous le §. 2 entre les espèces qui n'ont pas de style. De plus, il faut observer que même les auteurs originaux ont décrit, comme il nous semble avec raison, un style chez les deux dernières (voir tab. II, fig. 5 de ce travail et les figures de MM. SWARTZ et MIQUEL, citées plus bas sous les espèces de *P. tenera* et *hispidula*).

Il en est de même de la *P. diffusa* et de la *P. Loxensis*, espèces que je ne sais comment distinguer (selon des échantillons déterminés par MM. C. DE CANDOLLE et MIQUEL). Les deux espèces ont un style, peut-être un peu plus allongé chez la *P. diffusa*; cependant la *P. Loxensis* est par son habitus, comme par ses autres caractères, très-affine aux espèces qui manquent de style. De même, les *P. reflexa*, *Sellowiana*, *quadrifolia* et *Minensis* sont des espèces très-voisines, dont quelques-unes ont un style et d'autres en sont privées (voir les figures).

Les espèces à ovaire stylifère, se divisent d'après la disposition de leurs feuilles, dans les trois sections suivantes:

A. Espèces à feuilles alternes;

B. „ „ „ opposées;

C. „ „ „ verticillées.

Les limites entre ces trois genres de feuilles sont quelquefois difficiles à déterminer, ce dont nous avons un exemple intéressant dans la *P. blanda* (JACQ.) et ses espèces affines.

La *P. blanda* est renfermée dans la section à feuilles verticillées; en effet, elle a trois feuilles dans chaque verticille; cependant il arrive souvent qu'un verticille se dissout, deux feuilles restant à la même place qu'auparavant, la troisième allant se placer en dessous ou en dessus, ou même tombant; ainsi se forme une sorte d'arrangement intermédiaire entre l'opposé et le verticillé. Ces circonstances sont reproduites déjà sur la figure originale donnée par M. JACQUIN (Icon. pl. rar., vol. II, tab. 218). En proche affinité avec la *P. blanda*, se trouve la *P. dissimilis* H. B. K.; M. C. DE CANDOLLE la considère comme une variété de la *P. blanda*, M. MIQUEL, par contre, comme une espèce distincte; cependant cette espèce possède des feuilles opposées, et les inférieures mêmes sont alternes. En basant la classification sur l'arrangement des feuilles, on serait donc obligé de la faire entrer dans une section différente de celle de la *P. blanda*. De plus, il existe une forme, la *P. Langsdorffii* MIQ., dont M. C. DE CANDOLLE dit dans le *Prodromus* (l. c., p. 444), qu'elle est: "*verisimiliter forma Pep. blandæ*"; cette forme présente un cas pareil à celui de la *P. blanda*. Les auteurs lui donnent en général des feuilles opposées ou alternes; l'étude de la plante vivante nous a montré qu'elle possède à la règle des feuilles verticillées, trois à chaque verticille. Toutefois, les feuilles sont sujettes aux mêmes variations que dans la *P. blanda*; dans les herbiers, surtout, l'une ou l'autre de ses feuilles est sujette à tomber, de sorte qu'elle apparaît à feuilles opposées; en effet, on la place généralement entre les espèces, à feuilles opposées, en l'ôtant de sa place naturelle dans le système, et en déchirant l'ordre naturel. La *P. increscens* MIQ. a été décrite comme une variété de la *P. Langsdorffii*; dans cette espèce, par contre, nous trouvons des feuilles véritablement opposées, preuve de plus qu'on ne doit pas attribuer dans la classification une importance trop grande à la disposition des feuilles.

La synonymie de la *P. rotundifolia* (MIQ. Syst. Pip., p. 62) et de ses espèces affines nous est un appui ultérieur à cet égard.

Nous ne voulons pas, en faisant ces remarques, enlever à la disposition des feuilles la grande valeur qu'elle a dans la classification des espèces; mais nous croyons qu'il faut chercher les différences qui peuvent constituer les divisions principales, dans des organes plus importants que les feuilles, savoir dans ceux de la fructification, même s'il était plus difficile d'examiner les espèces d'après un système basé sur ces derniers caractères.

En effet, M. MIQUEL a fondé (dans le *Systema Piperacearum*, Roterod. 1843) la disposition des espèces sur l'organisation des parties de la fructification. Les espèces ci-dessous décrites ont été rapportées aux genres

Acrocarpidium et *Peperomia*. Dans les derniers ouvrages qui nous sont parvenus, M. MIQUEL a réuni ces deux genres sous le genre commun *Peperomia*, divisé par lui, dans la Flore du Brésil, en sections dont trois sont représentées par les espèces décrites ci-dessous, savoir *Micropiper*, *Acrocarpidium* et *Rhyncophorum*. M. MIQUEL les distingue par les caractères suivants (voir Fl. Bras., fasc. XI, p. 10 etc.):

MICROPIPER: "*Amenta filiformia sæpe remotiflora, bracteis herbaceis pedicellato-peltatis vulgo deciduis, ovario ovoideo vel oblongo, stigmate terminali penicillato, deciduo, baccis remotis sessilibus, axi post florescentiam haud incrassato, facile deciduis.*" — — —

ACROCARPIDIUM: "*Amenta densiflora vel rarius remotiflora, longe pedunculata. Bracteæ persistentes. Ovarium oblongum sessile, stigmate terminali minuto, vel obliquum stigmate subantico. Baccæ maturæ basi constricta pseudo-pedicellatæ patentes.*" — — —

RHYNCOPHORUM: "*Flores densissimi, rhacheos foveolis immersi. Bracteæ persistentes pedicellato-peltatæ carnosæ. Ovarium ovatum vel angulosum scutulo glanduloso ad apicem antice acutum, cui stigma exile immersum. Baccæ sessiles, plus minusve immersæ, scutulo rostellatæ.*" — — —

Ainsi, M. MIQUEL a caractérisé ses sections non seulement par les signes de l'ovaire et du fruit, mais aussi par ceux du chaton et des bractées.

Nous avons déjà montré l'importance relativement inférieure que, surtout dans l'état actuel de nos connaissances sur les espèces, il faut attribuer aux caractères du chaton et des bractées; nous avons indiqué spécialement que nous n'avons trouvé aucune différence remarquable quant à la consistance des bractées, et qu'il n'existe point de bractées caduques. Il ne reste donc, comme caractères distinctifs, que ceux des organes de la fructification.

Quant à la construction de ces derniers organes, M. MIQUEL a distingué la section *Acrocarpidium* par sa baie pseudo-pédicellée. Selon ce que nous avons dit déjà (voir plus haut), la *P. tenera* est la seule espèce dont la baie soit véritablement construite comme la décrit M. MIQUEL chez l'*Acrocarpidium*. En effet, cette espèce se distingue par ce caractère de toutes nos autres espèces; on l'en sépare facilement, en outre, par tout son habitus, par sa gracilité, par ses feuilles membraneuses, transparentes, par son chaton filiforme, à rachis non tuméfié, et sur lequel des fleurs sessiles sont attachées, mais non plongées. Ainsi, cette espèce nous semble marquée par des caractères assez importants pour en former une section spé-

ciale du genre. Sans doute, on sera dès lors obligé d'y renfermer aussi les *P. hispidula* (SW.) et *P. Mandonii* CDC., dont les baies sont construites parfaitement de la même manière que celles de la *P. tenera.*

Les autres espèces attribuées à la section *Acrocarpidium*, savoir les *P. nummularifolia* et *major*, doivent en être exclues à cause de la construction différente du pédicelle de leurs baies, et transférées dans la section de *Rhyncophorum.* De plus, elles se distinguent, par leur habitus, de la *P. tenera.*

Les deux sections *Micropiper* et *Rhyncophorum*, se distinguent, selon nos observations, uniquement par l'insertion du stigmate, la forme de l'ovaire et de la baie, et la construction du péricarpe; les autres caractères par lesquels on a voulu les séparer, sont inconstants ou même fautifs. A cet égard, nous ferons observer que les fleurs des Micropipères sont très-souvent fort nombreuses, et serrées de manière à recouvrir tout le chaton, comme dans la *P. reflexa* et la *P. oreophila.* Le même fait s'observe à l'égard des baies; au reste, le chaton se présente tuméfié, les Rhyncophores présentant à cet égard des caractères opposés.

L'application de ces caractères aux espèces, entraîne les modifications suivantes dans l'arrangement de M. MIQUEL (voir Fl. Bras. l. c.); il faudra transférer:

1) de la section de *Micropiper* à celle de *Rhyncophorum*, les espèces suivantes: *P. alata* et toutes les espèces affines, *P. blanda* var. *Langsdorffii*, *P. increscens* et *P. galioides*;

2) de *Rhycophorum* à *Micropiper*, la *P. circularis*;

3) d'*Acrocarpidium* à *Rhyncophorum*, les *P. nummularifolia* et *major.*

Ces modifications opérées, nous obtenons une disposition de nos espèces, qui satisfait aux exigences d'un système naturel, c.-à.-d. dans laquelle les caractères essentiels, tirés des organes de la fructification, correspondent à des différences extérieures, ou, en d'autres termes, à l'habitus des espèces. En effet, après cet arrangement, le *Micropiper* contient principalement de petites espèces, rampantes ou grimpantes, charnues et succulentes, à feuilles petites, le plus souvent épaisses et à pétiole court. Les Rhyncophores, au contraire, sont en général plus ou moins dressées, à tiges plus allongées, à feuilles plus grandes, plus planes et plus membraneuses. Ces différences nous paraissent présenter une certaine relation avec les localités qu'habitent les espèces des deux sections. Les Micropipères croissent sur les troncs et les rameaux des arbres, les Rhyncophores préfèrent la terre féconde des forêts.

Les *P. nummularifolia*, *major* et *Martiana* de la dernière section, se rapprochent dans leur habitus plus des Micropipères que des Rhyncophores; en effet, elles croissent, en harmonie avec ce fait, dans les mêmes localités que les premières.

En résumant ce que nous avons dit ci-dessus, nous trouvons que les sections *Acrocarpidium*, *Micropiper* et *Rhyncophorum* peuvent être distinguées par de bons caractères, auxquels correspondent l'habitus des espèces respectives et la nature des localités où naissent ces espèces. Nous avons, par suite de leur affinité plus prononcée, réuni plus bas les deux dernières sections sous le nom d'*Eupeperomia*.

Ces sections se distinguent par les caractères suivants:

I. ACROCARPIDIUM: *flores sessiles, emersi; amentum filiforme, non carnosum; bacca matura in pseudo-pedicellum brevem, cum bacca continuum, inferne contracta, sessilis.*

II. EUPEPEROMIA: *amentum carnosum, in foveolis rhacheos flores immersos, sessiles fovens; bacca pedicello carnoso demum imposita, facile caduca.*

A. MICROPIPER: *ovarium apice summo stigmatiferum; bacca ovoidea v. ellipsoidea, apice stigmatifera, basi pseudo-cupula viscida cincta, lævis.*

B. RHYNCOPHORUM: *ovarium apice oblique carnoso-incrassatum, oblique infra apicem stigmatiferum; bacca subglobosa, apice verruca obliqua, stigmatifera aucta, undique papillosa, viscida. (Excipienda* P. MAJOR, *cujus bacca ellipsoidea, longe rostrata).*

Nous venons d'indiquer la base de la classification des espèces du genre *Peperomia*. Quant à la disposition spéciale et plus détaillée de ces sections, nous ne voulons pas risquer d'en proposer une; l'étude soigneuse de toutes les espèces du monde pourra seule nous l'offrir. A l'égard des espèces que nous décrirons ci-dessous, l'arrangement qui suit nous semble le plus naturel.

GEN. PEPEROMIA.

I. ACROCARPIDIUM.

1. P. TENERA.

II. EUPEPEROMIA.

A. MICROPIPER.

a) *Foliis alternis.*

2. P. MYRTIFOLIA *var.* CALDASIANA: *quodammodo Rhyncophoris analoga.*

b) *Foliis oppositis.*

3. P. DELICATULA: *herba glaberrima; amento ebracteato.*
4. P. CIRCULARIS: *herba pubescens; amento 2-bracteato.*

c) *Foliis verticillatis.*

α) *Stirps* P. REFLEXÆ: *amentum breve, pedunculo multo crassius, densissime florigerum, pedunculum longitudine æquans v. 2 (vix 3)-plo superans, pubescens v. erosum.*

*) *Caule tereti.*

5. P. SELLOWIANA: *foliis typice 3-nis, obovato-ellipticis.*
6. P. REFLEXA: *foliis 4-nis, subrhombeis.*

** *Caule angulato v. sulcato.*

7. P. OREOPHILA: *foliis rotundato-subrhombeis.*

β) *Stirps* P. QUADRIFOLIÆ: *amentum parum incrassatum, pedunculum 2—4-plo superans; rhachis glabra.*

* *Caule tereti.*

8. P. MINENSIS: *foliis rotundato-obovatis; bacca rostrata.*
9. P. CAMPINASANA: *foliis ellipticis v. obovato-ellipticis; bacca rostrata* (?).
10. P. RHOMBEA: *foliis lanceolatis; bacca erostrata.*

** *Caule angulato-sulcato.*

11. P. QUADRIFOLIA: *foliis obovatis v. spathulato-obovatis, emarginatis; bacca rostrata.*

γ) *Stirps* P. TRINEURÆ: *amentum pedunculo non crassius, remotiusculiflorum, breviter pedunculatum; rhachis glabra; caulis angulatus v. sulcatus.*

12. P. TRINEURA: *foliis elliptico-rhomboideis, nervis 3, subtus crasso-elevatis.*
13. P. LOXENSIS: *foliis cuneato-obovatis, subenervibus.*

B. RHYNCOPHORUM.

† *Bacca matura subglobosa, apice verruca obliqua breviter mucronata.*

a) *Folia in singulis verticillis plura.*

14. P. GALIOIDES: *quodammodo Micropiperibus analoga.*

b) *Folia in singulis verticillis 3-na, v. 2-na opposita.*

15. P. INCRESCENS: *foliis 2-nis, rhombeo-rotundatis.*
16. P. BLANDA *var.* LANGSDORFFII: *foliis 3-nis, rhomboideo-obovatis v. oblongis.*

c) *Folia alterna.*

α) *Folia elongata, non rotundata.*

17. P. ALATA: *caule 3-quetro-alato.*
18. P. AUGESCENS: *stolonifera; caule aptero; foliis ovato-lanceolatis; floribus anuliformi-dispositis.*

19. P. DIAPHANA: *caule aptero; foliis præced.; amento remotifloro.*
20. P. NUDA: *innovationibus erectis; caule aptero; foliis obovato-ellipticis.*
    β) Folia rotundata.
21. P. MARTIANA: *foliis emarginatis; amento incrassato.*
22. P. NUMMULARIFOLIA: *foliis non emarginatis; amento non incrassato.*
    †† *Bacca ellipsoidea, longe rostrata.*
23. P. MAJOR: *foliis subcordatis.*

De même que nous considérons les espèces à feuilles verticillées comme le type et le centre de la section *Micropiper*, de même nous regardons celles à feuilles alternes comme le type de la section *Rhyncophorum*. En effet, les premières ne sont pas seulement les plus nombreuses dans la première section, mais elles offrent en outre entre elles aussi l'affinité la plus prononcée; il en est de même dans la section Rhyncophorum, où les espèces affines avec la *P. augescens* sont bien difficiles à distinguer. Au reste, comme l'indique l'arrangement donné plus haut, on trouve dans les deux sections des espèces plus ou moins analogues au point de vue de la disposition des feuilles.

Annexe. Depuis la mise en presse de ces pages, M. CAS. DE CANDOLLE a publié dans le Journal "*Linnæa*" (Band XXXVII, Heft III, = Neue Folge, Band III, Heft III, p. 333. Berlin 1872), cité plus bas sous le titre: "CDC. *in Linnæa*", ses observations et ses déterminations relatives à quelques-unes des espèces décrites ci-dessous. Cela nous a amené à faire quelques modifications à notre travail, et à échanger les noms originairement employés par nous contre ceux donnés par M. DE CANDOLLE.

GEN. PEPEROMIA RUIZ et PAVON.

Syn. *Peperomia* RUIZ et PAVON Prodrom. Fl. Peruv. et Chilens. p. 8; CDC. in Prodrom. Syst. nat. Pars XVI. 1. p. 392.
Acrocarpidium et *Peperomia* MIQ. Syst. Pip. pp. 51 et 63.

I. ACROCARPIDIUM MIQ. p. p.

Rhachis amenti filiformis, subexsucca (non carnoso-tumida). Flores emersi, sessiles. Ovarium sessile. Bacca matura pseudo-pedicellata.

Descr. Herbæ teneræ, non carnosæ. Folia submembranacea. Amentum remotiflorum, rhachi filiformi, non incrassata. Flores bractea peltata tecti, adulti sessiles, emersi (non ut in sectione subsequ. rhachi immersi seu impressi). Stamina 2, patentia, filamentis clavatis, antheris 2-locularibus. Pistillum sessile, subcylindraceum; ovario ellipsoideo in stylum crassum, cylindraceum, duas ovarii partes æquantem, apice obtusum transeunte. Stigma e fasciculo pilorum minutorum compositum, apicale. Bacca ellipsoidea, basi in pedicellum brevem spurium contracta, stylo persistente mucronata, matura globoso-ellipsoidea.

Syn. *Acrocarpidii sp.* MIQ. Syst. Pip. p. 51; Illustrat. Pip. p. 9.
Piperis sp. SWARTZ Fl. Indiæ occid. tom. I. p. 63; Prodrom. p. 15.
Peperomiæ sp. MIQ. in MART. Fl. Bras. fasc. XI p. 18; CDC. in Prodrom. Pars XVI. 1. p. 397; GRISEB. Fl. West Ind. Islands p. 165.

1. P. tenera MIQ.

P. gracilis, erectiuscula; caulis glaber; folia alterna, trianglari- v. reniformi-rotundata, pellucida, nervis 3—5, utrinque sparse setulosa; bacca ellipsoidea.

Descr. Herba læte virens, ad basin subsimplex, deinde remote et laxe dichotome ramosa, e nodis infimis radicans.

Caulis teres, striis 2-nis approximatis inter nodos vicissim currentibus, plano-sulcatus, glaberrimus, nodis setulosis, plerumque plus minus rubro-adspersus.

Folia alterna, ad apices 3—4-natim approximata, forma varia, plerumque triangulari- v. reniformi-rotundata, (interdum ovata, late cordata, basi subtruncata, v. subrotundata v. transverse subovalia), acumine brevissimo, ob-

tusissimo, basi rotundato-truncata, ad petiolum levissime marginata, tenera, pellucida, plana, supra læte viridia, subtus pallidiora, nervis 3—5, ramosis, medio percurrente.

Petiolus longiusculus, $^1/_2$ folii v. folium æquans, semiteres, setulosus.

Amentum gracile, pedunculo 1—2-plo brevius, remotiflorum; pedunculo angulis 5—6 salientibus sulcato-angulato.

Flores rhachi non immersi, bractea angulato-orbiculari, sessili, peltata ad basin tecti.

Pistillum lanceolato-cylindraceum, glaberrimum; ovarium ellipsoideum v. subcylindraceum, stylo cylindraceo, apice obtuso stigmatiferum; stigma lilacinum.

Bacca ellipsoidea, setis patentibus obsita, matura globoso-ellipsoidea, setis longioribus.

Pl. circ. 200 mm. alta; fol. limb. 10—20 mm. long., 10—15 mm. lat.; pet. 5—10 mm.; ament. 30 mm.; pedunc. 15 mm.

Variat a) *minor*, foliis latioribus, rotundatis v. reniformibus.
b) *major*, foliis angustioribus, magis ovatis, basi rotundatis.

Syn. *P. tenera* Miq. in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 19 (sub *Acrocarpidio*).
P. hispidula CDC. p. p. in Prodrom. l. c. p. 397 (exclud. Griseb. flor. w. Ind. p. 165, *Piper hispidulum* Sw. prodr. p. 15, icon. t. 4, flor. Ind. occ. v. 1. p. 63, *Acrocarpidium hispidulum* Miq. syst. p. 54).
Acrocarpidium sellovianum Miq. Syst. Pip. p. 55; Illustrat. Pip. p. 9.

Fig. Miq. Illustrat. Pip. Tab. III. A; in Mart. Fl. Bras. l. c. tab. 1. fig. I. (excl. fig. analyt. 6, 6 l, 6 a, ad *P. repentem* pertinentes).
Nostra Tab. II. fig. 5.

Exs. III. 1106 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*P. hispidula* A. Dietr. var." a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 168.

Hab. In truncis putridis et ad terram in umbrosis ad Caldas passim. Floret mens. Dec.—Jun.

Observ. *Piper hispidulum* Swartz ll. cc., sec. specim. orig., in Jamaica lecta, et mscr. Swartzii in herb. Holmiensi, differt: habitu graciliore, foliis subtus glaberrimis, nigro-punctatis, apice retusis, rotundatis, minoribus. Quoad hirsutiem ovarii baccæque differentia vix ulla inter *Pip. hispidulum* Sw. et *Pep. teneram* Miq. adest; describit enim Swartzius ovarium hispidum, sed specimina ejus glabrum præbent; in nostra specie ovarium est glabrum, bacca autem pilis longis demum obsita.

Plantæ, nominibus *Pep. Mandonii* CDC., *tenerœ* Miq. et *hispidulœ* (Sw.) descriptæ, vix nisi formæ ejusdem speciei seu stirpis nobis videntur. Differentia in forma foliorum diversa constat, habitu enim parum discrepant. *Piper hispidulum* Sw., quod formam alpestrem, pusillam præbere videtur, magis ab aliis, habitu laxiore gaudentibus, recedit quam hæ inter se; præsertim forma nostra *major Peperomiæ Mandonii* proxima

videtur. Quum autem formas intermedias numquam viderimus, has tres etiamnunc pro speciebus, intime affinibus, olim verisimiliter jungendis, habere cogimur. In organis fructificationis discrepantiam vix ullam conspicere licet; stylus in tribus adest, in *P. Mandonii* forsan parumper melius efformatus. Notæ, quibus distinguuntur, tum fiunt:

P. Mandonii: folia ovata (rotundato-ovata), apice obtusa, basi rotundata v. subtruncato-rotundata, glabra v. pilis raris obsita, epunctata, amentis sæpe 3-nis;

P. teneræ: folia triangulari-rotundata (nunc latiora, nunc angustiora, imo ovata), obtusa v. acumine brevissimo, utrinque setulis sparsis, epunctata;

P. hispidulæ (SW.): folia subrotundata, basi et apice emarginulata vel retusa, supra sparse setulosa, punctata.

II. EUPEPEROMIA.

Rhachis amenti plus minus carnosa. Flores foveolis rhachis immersi seu impressi, sessiles. Ovarium sessile. Bacca matura pedicello, e foveolo enato, demum imposita.

Descr. Herbæ plerumque carnoso-crassæ, succulentæ. Pistillum plerumque ovoideum v. obovoideum, stylo brevi, brevissimo v. plerumque nullo, stigmate nunc apicali, nunc infra-apicali vel subantico, penicillato. Bacca ovoideo-cylindracea, ellipsoidea, late ovoidea vel globosa, nunc lævis, nunc papillosa, plerumque mucronulata.

A. Micropiper MIQ. p. p.

Ovarium apice summo stigmatiferum, læve. Bacca plus minus ovoidea, acuta v. rostrata, pericarpio lævi, e basi ad tertiam partem v. ad medium pseudo-cupula glutinosa cincta.

Herbæ minores, 1—1 $^1/_2$-spithameæ, foliis sæpissime verticillatis; vulgo in arboribus, raro ad terram habitant.

2. P. myrtifolia MIQ. var. Caldasiana CDC.

P. e basi repente ramosa caules erectiusculos emittens; caulis teres, minutissime pubescens; folia alterna, ovato- v. obovato-elliptica v. latiora rotundato-ovata v. obovata, glaberrima, carnoso-subcoriacea, supra grosse punctata, subtus punctulata; amenta terminalia, solitaria, subæquicrassa, densiflora, pedunculo crassiora, pedunculum teretem 2—4-plo superantia; ovarium oblique obovoideum, utroque acutum, stigmate subapicali; bacca lævis, ovoideo-ellipsoidea, rostro brevi crasso, apice latere interno oblique truncata.

Descr. Herba habitu *P. Martianæ*, inferne longe repens, radicans, subaphylla, caules præsertim apices versus foliigeros, internodiis brevioribus, emittens, obscure viridis.

Caulis teres, pilis patentissimis subtilissime pubescens, maculis rubris plerumque adspersus.

Folia alterna, typice subelliptica, nunc angustiora, ovato- v. obovato-elliptica, nunc, præsertim inferiora, latiora subrotundata (rotundato-ovalia—obovata), apice obtusissima v. sæpissime retusa, basi subacuta v. obtusiuscula, 3-nervia; nervis 2 lateralibus gracilibus, medio valido percurrente, ramoso, reticulo contra lucem conspicuo, glaberrima, apice ciliolata, plana, supra punctis grossis impressis, subtus punctulis albo-luteis nitidis, supra obscure viridia, subtus pallidiora.

Petiolus longiusculus, supra canaliculatus, subtilissime patenter pubescens, $^1/_2$—$^1/_4$ folii partem æquans.

Amenta sicut bracteæ erecto-patentes punctata; pedunculus subtilissime pubescens.

Flores immersi, sessiles, bracteis minoribus, erosulis, orbicularibus tecti.

Ovarium inæquilaterum, stigmate sublineari, latere interno sito, rimæ longitudinali impresso, subapicali, læve.

Bacca breviter rostrata, rostro oblique truncato, lævis, basi pseudocupulifera, pedicello conico, elongato demum imposita.

Fol. limb. 15—20 mm. long., 10—12 mm. lat.; pet. 3 mm.; ament. 30 mm.; pedunc. 15—20 mm.

Syn. *P. Caldasiana* CDC. in Linnæa Band XXXVII. Heft III p. 365.
P. myrtifoliæ Miq. forma; Syst. Pip. p. 92; in Linnæa Band XX. p. 122; in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 11.
P. Estrellensis CDC. in Prodrom. l. c. p. 421 forma.

Fig. Nostra Tab. I. fig. 3.

Exs. III. 1110 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. Caldasiana* CDC. mns." a C. de Candolleo, "*P. Martiana* Miq. var." a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 173.

Hab. in truncis arborum et supra saxa inter muscos præsertim in silvis jugorum sat frequens. Flor. mens. Oct.—Jun.

Observ. I. Species habitu, colore quodammodo præsertim in herbariis *P. Martianam* referens, sed cum illa minime confundenda; fructus foliorumque forma has species in diversas sectiones sejungit. Caulis teres, nec 4-gonus.

II. Figuras Miquelii et descriptiones in Linnæa et in Fl. Bras. ll. cc. examinanti facile apparebit, formas foliis et amentis sat diversas amplecti hanc speciem. Non dubitamus igitur nostram cum *P. myrtifolia* jungere, quamquam foliis apice retusis diversa est; habitu aliisque notis (foliis punctatis cet.) bene conveniunt hæ formæ.

III. Specimina WIDGRENIANA (N:o 1252) et FREYREISII, ad Rio de Janeiro lecta, in herb. Holmiens. asservata: "*Pep. flexicaulis* WAWRA? β *microphylla* WAWRA, CDC. in Prodr. n. 213" a C. DE CANDOLLEO, "*P. estrellensis* CDC. var. *distans* MIQ." a MIQUELIO nominata, *P. myrtifoliæ* aliam repræsentant formam, habitu laxiore foliisque angustioribus, acutioribus diversam. Cfr. Archiv. l. c. p. 171.

3. P. delicatula n. sp.

P. repens, glaberrima; caulis teretiusculus, sulcatus v. striatus; folia orbicularia, plerumque carnosa, petiolum 2-plo superantia; amenta terminalia, solitaria, remotiusculiflora, pedunculum angulato-sulcatum, ebracteatum, 2—3-plo superantia; ovaria sursum crassiora, obtusa; bacca e basi late ovoidea, oblique acuta, lævis.

Descr. Herbula pusilla, repens, truncis arborum arcte appressa, ramulis terminalibus erectiusculis, læte virens, tota glaberrima v. uno alterove pilo ad caulem et folia obsita, habitu *Linnæam borealem* L. pusillam referens.

Caulis subtilis, filiformis, ramosus, nodis approximatis, conspicue tumescentibus, glaberrimus, pluri-sulcatus v. striatus.

Folia opposita (v. in apicibus ramulorum verticillis 2-nis confertis 4-na verticillata), glaberrima v. parcis ciliis minutis præsertim ad apicem marginata, pusilla, orbicularia (v. ovato- v. ovali-orbicularia), nunc carnosa utrinque convexa, nunc tenuiora supra concaviuscula, utrinque ad lentem fusco-punctata, nervis 3, contra lucem conspicuis v. evanescentibus.

Petiolus longiusculus, $^1/_2$—$^1/_3$ folii æquans, semiteres, supra late canaliculatus, ad lentem sulcato-angulatus, glaber.

Amenta gracilia, terminalia, rarius lateralia, solitaria, filiformia, pedunculis vix crassiora, vix carnosa, æquicrassa, erectiuscula, remotiusculiflora.

Pedunculus angulato-sulcatus v. striatus, ebracteatus, longiusculus, amentum æquans v. 2—3-plo brevior.

Flores sessiles, foveolis rhachis immersi, bracteis peltatis tecti.

Pistillum crassum, subæquicrassum, utroque obtusum, sæpe lutescens, torulosum, apice suboblique stigmatiferum, foveolo oblique affixum.

Bacca late ovoidea, oblique acuta, patenti-erecta, apice stigmatifera, lævis, basi pseudo-cupulifera, pedicello conico-elongato, exserto oblique demum imposita.

Bracteæ carnosulæ, demum erecto-patentes.

Fol. limb. 4 mm. long., 3—4 mm. lat.; pet. $1^1/_2$—2 mm.; ament. 15—25 mm.; pedunc. 5—8 mm.

Fig. Nostra Tab. I. fig. 4.

Exs. III. 1107 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. circinata* Link. CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 266" a C. de Candolleo, "*P. exilis* Miq.-Griseb." a Miquelio nominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 169.

Hab. in truncis arborum ubique frequens. Flor. mens. Sept.—Dec.

Observ. I. A specie subsequenti notis maximi momenti constantibusque discrepat nostra species; de qua re vide infra sub *P. circulari.*

II. Hæc species, quam *P. circinatam* Linkii C. de Candolleus dicit, *P. exilem* Miq. Miquelius, neutra harum certo est. Hæc foliis alternis, illa, quam Linkius ipse in Jahrb. Tom. I. 3 p. 63 eandem ac *P. circularem* Desfont. affirmat, quam Miquelius in Syst. Pip. p. 62 nomine *Acrocarpidii rotundifolii* descripsit, pubescentia, bracteis 2, ovario sursum attenuato facile dignoscitur; attamen est concedendum, descriptionem Miquelii *Acrocarpidii exilis* in Syst. Pip. p. 56 tam bene ad nostram convenire, ut ambas libenter eandem speciem putarem, nisi innumera vidissem specimina foliis constanter oppositis, versus apices ramulorum, 2-nis verticillis junctis, verticillatis prædita. Quum igitur auctores, et Miquelius et C. de Candolleus et Grisebachius, *P. exilem* foliis semper alternis describant, eidem ac Miquelius confusioni locum dare non audemus, quum in Syst. Pip. p. 62 *P. circularem* et *P. rotundifoliam* Auctt., species foliorum dispositione diversas, eodem nomine jungit. Nostram igitur speciem *P. exili* analogam putamus, dum formæ intermediæ inveniantur. Patria *P. exilis* (Jamaica) hanc nostram opinionem probare videtur; nostra autem species in prov. Minas Geraes sat frequens invenitur. Et quidem species, habitu valde affines, sed re vera diversas, in hoc genere occurrere, e specie Swartziana *P. emarginellæ*, cujus speciei, adhuc fere ignotæ, descriptionem hic inserere lubet, plane apparet.

Peperomia emarginella (Sw. in herb. Holmiens.),

sec. specim. orig. Swartzii, in herb. Holmiensi asservata, descripta, quibus hæc verba Swartzii adjecta sunt: "*P. emarginellum, fol. orbiculatis planis antice emarginatis glabris margine hirtellis, caule repente filiformi.*"

Glaberrima, uno alterove setulo adspersa; caulis repens, filiformis, ramulis florigeris erectis; folia alterna, orbiculata apice emarginulata v. orbiculari-obcordata, pellucide punctulata, petiolum duplo superantia; amenta solitaria, terminalia, filiformia, pedunculos superne incrassatos 2—3-plo superantia; ovarium apice stigmatiferum, obovoideum; bacca ovoidea, lævis.

Descr. Herba pusilla, gracillima, densissime ramosa, e caule capillari ramulos suberectos, pollicares emittens.

Caulis plantæ-siccæ teretiusculus, sulcatus v. angulosus, vivæ verisimiliter teres, glaberrimus, parce foliosus, e nodis fibrillas gracillimas et ramulos foliigeros emittens, internodiis ramulorum 2—4 mm. longis.

Folia alterna, minuta, orbiculata (nunc ovali- nunc obcordato-orbicularia v. obverse reniformia), basi rotundata v. subacuta, apice acute emarginata vel præsertim in foliis obcordatis retusa, sicca submembranacea (viva verisimiliter carnosula), glaberrima, supra margine apiceque uno alterove setulo obsita, ad lentem pellucido-

punctulata, subtus verrucis albis punctata, obsolete 3-nervia v. enervia, medio nervo, 1—2 ramulis prædito, percurrente.

Petiolus longiusculus, limbum foliorum inferiorum subæquans, superiorum 2-plo brevior, supra concavus, glaberrimus.

Amentum terminale, filiforme, floribus vix densis, immersis, glabrum.

Pedunculus quam amentum 2—3-plo brevior, sursum in amentum incrassatus, ad basin foliolo facile caduco præditus, glaber.

Flores juniores imbricati, ceteri remotiusculi, bractea luteo-glandulosa peltata, orbiculari, margine erosula tecti.

Stamina 2, filamento sursum incrassato, loculis sejunctis, albidis.

Ovarium obovoidem v. pyriforme, inferne acutum, apice obtusissimo stigmate punctiformi præditum.

Bacca (unica reperta, num huc referenda?) ovoideo-ellipsoidea, lævis, nitida, apice stigmatifera (?).

Fol. limb. 3—4 mm. long., 3 mm. lat.; pet. $1^1/_2$—$2^1/_2$ mm.; ament. 8—12 mm.; pedunc. 4—6 mm.

Syn. *Piper emarginellum* Sw. vide supra; WIKSTRÖM, Öfversigt af Ön Guadeloupe's Flora, in Vet. Akad. Handl. 1827, p. 56; MIQ. Syst. Pip. p. 550; *Peperomia emarginella* CDC. in Prodrom. l. c. p. 437.

Fig. Nostra Tab. I. fig. 6.

Hab. in "Ins. Guadeloupe" (Herb. Holmiens.).

Observ. De baccæ natura dubito, quid putem, quum unam dubiam repererim. Ob notas supra allatas *P. exili* valde affinis, habitu *P. delicatulam* nostram referens. Foliis emarginellis facile distincta.

4. P. circularis (Herb. WILLD.).

P. pubescens (excepto amento); caulis filiformis, repens, radicans, teres; folia opposita, suborbicularia v. ovato-orbicularia, brevissime petiolata, subplana; amenta terminalia, solitaria, subdensiflora, pedunculum crassum teretem, 2-bracteatum multoties superantia; ovarium sursum attenuatum; baccam haud vidi.

Descr. Herba pusilla, firma, arboribus arcte appressa, tota (amentis, raro foliis, exceptis) pilis brevibus pubescens.

Folia opposita, apice plerumque paullulum protracta, basi rotundato-truncata v. retusa, juniora ovata v. late ovata, præsertim supera pagina pubescentia, carnoso-crassiuscula, subplana v. supra concaviuscula, ad lentem punctata, nervis 3—5, contra lucem conspicuis, medio percurrente.

Petiolus brevis, firmus, supra concaviusculus, ad v. infra marginem folii insertus.

Amenta raro ad nodos inserta, erecta, firma, carnosa, sensim attenuata, glabra, glanduloso-punctata, subdensiflora.

Pedunculus brevissimus, crassitie amentum vix æquans, puberulus, parte media bracteis 2, spathulatis v. lineari-teretibus instructa.

Flores sessiles, foveolis rhachis immersi, bracteis orbicularibus, appressis tecti.

Pistillum sessile, basi oblique affixum, cereum, oblique ovoideum, ad basin torulosum, superne teretiusculum, apice stigmatiferum, stigmate penicillato.

Anthera albida, filamento brevi.

Bacca mihi ignota.

Fol. limb. 4—6 mm. long. et lat.; pet. 1 mm.; ament. immatur. 25—30 mm.; pedunc. 5 mm.

Syn. *Piper circulare* Herb. WILLD. sec. descript. MIQUELII in Syst. Pip. p. 62.
Peperomia circinata LINK Jahrb. Tom. I. 3 p. 64; MIQ. Syst. Pip. p. 179; in Linnæa Band XX. p. 127; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 21; CDC. in Prodrom. l. c. p. 444.
Acrocarpidium rotundifolium MIQ. Syst. Pip. p. 62 (exclud. *Piper rotundifolium* LINN., SWARTZ Observ. p. 20, *Peperomia rotundifolia* H. B. K. Nov. Gen. l. c. p. 65).

Fig. Nostra Tab. I. fig. 5.

Exs. III. 1656 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*P. circinata* LK." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 169.

Hab. in truncis arborum; ad oppidum Jacotinga prope Caldas semel legi. Floret mens. Oct.

Observ. I. A præcedente differt: hirsutie, caule tereti, foliis brevius petiolatis, majoribus, amento brevissime pedunculato, 2-bracteato. Ceterum hanc speciem numquam ad Caldas legi, ubi sp. præced. frequentissima occurrit.

II. Ad descriptionem *P. circularis* l. c. bene convenit nostra; item non male ad *P. circinatam* ll. cc., sed caulis nostræ teres, folia punctata.

III. *Piper rotundifolium* SW. Observ. p. 20 a C. DE CANDOLLEO et sub hac specie et sub *P. nummularifolia* citatur.

5. **P. Sellowiana** MIQ.

P. erectiuscula, 1—2 pollicaris, ramosa, nodis approximatis; caulis teres, minutissime pubescens; folia typice 3-na, elliptica v. obovata, apice rotundata, nitida, glabra, margine ciliolata, 1- v. enervia, breviter petiolata; amenta terminalia, solitaria, pedunculis teretibus, pubescentibus, amentum superantibus, crassiora, densiflora, superficie erosa; pistillum obovoideum, apice obliquo stigmatiferum; bacca ovoidea, acuta; bracteæ appressæ v. impressæ.

Descr. Herba pusilla, plerumque contracta, colore saturate viridi, nitida, e radice fasciculum caulium emittens, erectiuscula v. basi decumbens, e nodis imis radicans, subdichotome ramosa.

Caulis pilis patentissimis subtilissime pubescens, firmus, succulentus, plerumque rubro-adspersus.

Folia verticillata 3-na (raro 2—5-na), obovata, nunc magis rotundato-obovata, nunc angustiora obovato-elliptica v. raro ovata, basi obtusa, supra grosse punctata, subtus punctulis nitidis, albidis (in specim. sicc. nigris) puncticulata, crassiuscula, subplana v. convexiuscula, 1-(v. 3-)nervia, nervo supra vix conspicuo, subtus linea notato, ramis contra lucem conspicuis.

Petiolus brevis, $^1/_3$—$^1/_4$ folii æquans, glaber v. minutissime pubescens, semiteres.

Amenta erecta, brevia, superficie inæqualiter erosa, floribus impressis areolata, juniora apicem versus attenuata, matura subæquicrassa, pedunculo breviora, incrassata.

Pedunculus teres, patenter pubescens, apice vulgo incrassatus.

Flores minuti, foveolis rhachis carnosæ immersi, densissimi, areolate dispositi, bracteis minutis, crenulatis, subimpressis tecti, sessiles.

Pistillum obovoideum, oblique acutum.

Bacca ovoidea, erostrata, lævis, basi pseudo-cupulifera, pedicello exserto, elongato-conico demum imposita.

Fol. limb. 8—10 mm. long., 5—8 mm. lat.; pet. $1^1/_2$—2 mm.; ament. 10—12 mm.; pedunc. 10—15 mm.

Syn. *P. Sellowiana* MIQ. Syst. Pip. p. 161; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 16.
P. Deppeana CDC. in Prodrom. l. c. p. 457.

Fig. MIQ. in MART. Fl. Bras. l. c. Tab. 2. fig. IV.
Nostra Tab. I. fig. 7.

Exs. III. 1550 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. Deppeana* SCHLECHT. et CHAM., CDC. in Prodr. v. 16. 1. n. 329" a C. DE CANDOLLEO, "*P. Selloviana* MIQ. Syst. P." a MIQUELIO nominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 173.

Hab. in lucis et sylvis ad truncos arborum non raro. Floret mens. Oct.—Jan.

Observ. Species *P. reflexæ* sat affinis, foliis 3-nis, nitentibus amentoque diversa. *P. Deppeana* SCHLECHT. et CHAM. in Linnæa forma major, foliis latioribus videtur; formas intermedias me ad Caldas legisse puto. Planta sicca a viva foliis ad basin acutis recedit, unde folia sicca magis obovata quam in planta viva exstant.

6. **P. reflexa** (L. Fil.).

P. laxe ramosa, pendula v. decumbens v. erectiuscula, tota pubescens; caulis filiformis, teres, ad nodos tumescens; folia verticillata 4-na,

rotundato-rhombea (variant rotundata, elliptica v. obovato-elliptica), brevissime petiolata, marginibus saltem pubescentia, 3- v. enervia, utrinque punctata; amenta terminalia, solitaria, subæquicrassa, pedunculo crassiora, pubescentia, densissime areolateque florigera, pedunculum subæquantia; pistillum obovoideum, apice stigmatiferum; bacca ovoideo-cylindracea, breviter crasseque rostrata, patentissima; bracteæ appressæ.

Descr. Herba spithamea, e basi fasciculate ramosa, nunc erectiuscula, nunc divaricata, ramis solitariis v. oppositis, internodiis longiusculis.

Caulis rigidulus, pilis longioribus v. minutis patenter, superne densius, inferne parcius v. obsolete pubescens, exsuccus, teres, lævis v. striolatus, inferne striatus et interdum obsolete angulatus.

Folia 4-na, raro 3-na, typice rhombea, nunc (juniora) rotundato-elliptica, nunc late ovata, basi rotundata, apice obtusa, patentia, nunc carnoso-crassa subtus convexa, nunc tenuiora subplana, margine subreflexo, utrinque vel saltem marginibus pubescentia, utrinque puncticulata, punctis subtus minoribus, lutescentibus, nunc (folia plana) 3-nervia, nervis sæpe lineis albis notatis, nunc (folia crassiora) enervia.

Petiolus brevissimus, gracilis, supra canaliculatus, pubescens, erectus.

Amenta pedunculo 2—3-plo crassiora, carnosa, patenter pubescentia; pedunculus filiformis, teres, apice non incrassatus, crassitie caulis, pubescens.

Flores rhachi profunde immersi, sessiles, primo dense imbricati, deinde areolate dispositi.

Bacca apice in rostrum brevissimum, crassum, truncatum, stigmatiferum contracta, lævis, basi pseudo-cupulifera, demum patentissima, matura pedicello conico imposita.

Bracteæ orbiculares, submembranaceæ, majusculæ.

Fol. limb. 8—14 mm. long., 5—8 mm. lat.; pet. 1 mm.; ament. 15 mm.; pedunc. 10—12 mm.

Variat: a) locis apricis, erecta, contracta, pallida, foliis minutis, crassis, rotundatis;
b) locis umbrosis, laxior, foliis angustioribus, planis;
c) in sylvis primævis, pendula, foliis majoribus, rhomboideo-ellipticis, planis, saturate viridibus.

Syn. *Piper reflexum* L. Fil., Supplem. plant. 1781. p. 91; L. Syst. Veget. ed. XIV. p. 75, 24; Sw. Observ. p. 23.

Peperomia reflexa Miq. Syst. Pip. p. 169; in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 17; CDC. in Prodrom. l. c. p. 451.

P. valantoides Miq. in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 17.

Fig. MIQ. in Comment. phytogr. Tab. V. fig. B; in Linnæa Band XX. Taf. I. fig. 3 a; in MART. Fl. Bras. l. c. Tab. 2. fig. V.

Nostra Tab. II. fig. 2.

Exs. II. 259 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. reflexa* A. DIETR. CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 305 v. *valantoides* CDC. p. 452" a C. DE CANDOLLEO, "*P. reflexa* DIETR. var. *tenera* MIQ." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 174.

Observ. Species polymorpha; *P. valantoides* MIQ. l. c., forma junior, locis apricis in arboribus campestribus frequenter ad Caldas legitur. Specim. THUNBERGIANA e Cap. Bonæ Spei et HOOKERIANA ex India Orient. a nostris non discrepant. Caulis plantæ siccæ canaliculatus v. sulcatus, vivæ teres.

7. P. oreophila n. sp. [1]).

P. robusta, 1—2-spithamea, ramosa v. subsimplex, carnoso-crassa, nunc glaberrima, nunc patenter incano-villosa; caulis inferne teretiusculus v. obtusangulus, superne teretiusculus v. pluri-angulato-sulcatus; folia verticillata 4-na (v. 5-na), brevissime petiolata, rhombeo-rotundata, v. superiora angustiora ovato- v. ovali-rhomboidea, utroque obtusa, carnoso-crassa, nervis 3, vix conspicuis, utrinque puncticulata; amenta præcedentis, pedunculo subangulato 2-plo crassiora, pedunculum 1—3-plo superantia, rhachi floribus densissimis, imbricatis tecta; pistilla tota immersa, ovoidea, apicem versus angulata; bacca (maturam non vidi) cylindracea, breviter rostrata.

Descr. Suffruticulosa, firma, quam *P. reflexa* multo grossior, nunc erecta, nunc decumbens, e radice fasciculate ramosa, ramis verticillatis v. solitariis, apices versus sæpe aggregatis.

Caulis crassus, ad nodos tumescens, fragilis, plerumque obtusangulus.

Folia plus minus rhombea v. rhomboidea, apice obtusa v. retusa, subtus convexiuscula, nervis 3—5, contra lucem conspicuis, supra impresso-punctata, subtus punctulis albidis densius adspersa, nunc glaberrima, nunc pilis densis, longis, incanis, patentibus villosa, facile decidua.

Petiolus brevis, $^1/_5$—$^1/_6$ folii metiens, semiteres, supra leviter canaliculatus.

Amenta erecta, rigida, terminalia, solitaria, æquicrassa (non attenuata), apiculo sæpissime mucronata, densissime florigera.

Flores sessiles, imbricati, foveolis rhachis profunde immersi, bracteis majoribus, rhombeo-orbicularibus, rhachin obtegentibus tecti.

[1]) Deriv.: ὄρος = mons.

Pedunculus teretiusculus v. sulcato-angulatus, amento 1—3-plo brevior, apice non incrassatus.

Pistillum crassum, apice truncato stigmatiferum.

Bacca lævis, apice rostello brevi, crasso, subangulato terminata, basi pseudo-cupulifera.

Bracteæ baccis prorumpentibus subpatentes.

Fol. limb. 10—12 mm. long., 7—10 mm. lat.; pet. 1 mm.; ament. 15—40 mm.; pedunc. 10—12 mm.

Fig. Nostra Tab. II. fig. 1.

Exs. III. 1657 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli).

Hab. ad rupes apricas jugorum et cacuminum Caldensium, 1000—1500 p. supra oppidum, quo silvæ non scandunt. Flor. mens. Apr.—Jun.

Observ. I. Species pubescentia mirum in modum varians, nunc glabra, nunc tota incano-villosa. A præcedente olim forsan oriunda, ob locum natalem singularem, non solum habitu, sed etiam notis gravibus nunc ab illa dignoscitur; quamquam *P. reflexa* in iisdem jugis frequens occurrit, numquam formas vidi intermedias; hæc arbores, illa rupes nudas præfert.

II. *P. fimbriata* Miq. *β pilosior* CDC. in Prodrom. l. c. p. 450, quam nostram esse C. de Candolleus opinatur, differt: foliis 3-nis v. 2-nis, minoribus, orbicularibus, baccis globosis; præterea Miquelius *P. fimbriatam P. circinatæ* maxime affinem dicit et sub *Rhyncophoro* ponit; nostra autem ab hac valde recedit. Cfr. Mart. Fl. Bras. l. c. p. 20 et Tab. 2. fig. III.

8. **P. Minensis** n. sp. [1]).

P. repens; caulis teres, filiformis, piloso-pubescens; folia verticillata 3—4-na, obovato-rotundata, basi acuta v. cuneata, crassiusculo-coriacea, plana, petiolum 2—3-plo superantia, subtus pubescentia v. glabrata, 3-nervia, nervis subtus prominulis, punctata; amenta terminalia, pedunculo vix crassiora, sursum parumper attenuata, pedunculum teretem 2-plo superantia, remotiusculiflora; pistillum ovoideum, oblique attenuatum; bacca late ovoidea, oblique rostrata; bracteæ demum patentes.

Descr. Herba longe repens, e nodis radicans, parce remoteque ramosa, apicibus erectiusculis, rigidula.

Caulis subexsuccus, pilis inferne longioribus, superne brevioribus subpatenter pubescens.

[1]) e nomine Provinciæ "Minas", ubi legitur hæc species, deriv.

Folia verticillata 3—4-na, juniora rhombeo-rotundata v. obovata, basi acuta, cetera typice obovato-rotundata, apice rotundata, truncata v. retusa, subtus præsertim ad nervos parcius pubescentia, supra glabrata, supra puncticulata, nervis 3, contra lucem conspicuis, ad apicem percurrentibus, sæpe lineis albis notatis, reticulo nullo, subcoriacea, longiuscule petiolata; petiolo pubescente, supra subplano, $^1/_2$—$^1/_3$ folii æquante.

Amenta solitaria, erectiuscula, glabra, vix incrassata.

Pedunculus pubescens, rigidulus, crassitie caulis.

Flores rhachi carnosæ semi-immersi, conspicue distantes (nec areolate dispositi ut in præced.), bracteis semi-tecti.

Pistillum ovoideum v. subcylindraceum, apice obtuso stigmatiferum.

Bacca lævis, basi pseudo-cupulifera, pedicello conico, subexserto demum imposita, erecto-patens.

Fol. limb. 10—15 mm. long., 8—10 mm. lat.; pet. 3—4 mm.; ament. 30—45 mm.; pedunc. 15—25 mm.

Fig. Nostra Tab. III. fig. 1.

Exs. III. 1631 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. filiformis* RUIZ et PAV." a C. DE CANDOLLEO, "*P. reflexa* DIETR. var. *tenera* MIQ.?" a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 174.

Hab. in truncis arborum sylvarum primævarum sat raro. Flor. mens. Nov.—Jun.

Observ. I. Planta sicca facie externa *P. reflexæ* sat similis; viva vero ab hac notis magni momenti habituque diverso facile distincta, videlicet foliis basi cuneatis, longiuscule petiolatis, amento glabro quam pedunculo vix crassiore, subremotifloro, bacca rostrata cet.

II. Specim. sicca a vivis recedunt foliis minoribus, basi magis acuta; referunt igitur plane figuram *P. filiformis* RUIZII et PAVONIS in Flora Peruviana Tab. XLVII. fig. b, cui plantam nostram esse identicam cum C. DE CANDOLLEO sine dubio putarem, nisi descriptio et figura amenti plane obstaret; affirmant enim hi auctores, tabulas suas omnes secundum naturam delineatas esse; nostra autem planta talia numquam fert amenta, quibus *P. filiformem P. reflexæ* affinem esse MIQUELIUS recte dicit (Syst. Pip. p. 174).

9. P. Campinasana CDC.

P. glaberrima, radicans, ramosa, rigida, exsucca; caulis teres; folia verticillata 4-na, elliptica v. obovato-elliptica, apice rotundata, basi acuta, longiuscule petiolata, nitida, 3-nervia; amentum filiforme, crassitie pedunculi teretis, remotiusculiflorum, pedunculum 2—3-plo superans; pistillum e basi ovoidea cylindraceum, truncatum, apice stigmatiferum; baccam non vidi.

Descr. Herba glaberrima seu ad lentem fortem subtilissme et parcissime patenter puberula, remote ramulos, sæpe pendulos, proferens.

Caulis ad nodos interdum obliterate pluri-angulatus, siccus.

Folia 4-na (raro 2—3-na), plerumque erecto-conniventia, elliptica, nonnumquam subrotundata, apice rotundata v. levissime retusa, coriaceo-rigida, utrinque punctata, sicca pellucido-punctata, nervis 3, ad apicem concurrentibus, sæpe lineis albis notatis, medio crassiusculo, reticulo nervulorum conspicuo.

Petiolus longiusculus, $^1/_2$ folii æquans, semiteres, supra leviter canaliculatus, glaberrimus.

Amenta terminalia, solitaria, sursum sensim attenuata, in pedunculum teretem transeuntia, erectiuscula, sicut bracteæ punctata.

Flores subimmersi, sessiles, bracteis orbicularibus tecti.

Ovarium læve.

Fol. limb. 10—15 mm. long., 4—10 mm. lat.; pet. 3—8 mm.; ament. 40—60 mm.; pedunc. 20—25 mm.

Syn. *P. Campinasana* CDC. in Linnæa Band XXXVII. Heft III. p. 381.

Fig. Nostra Tab. III. fig. 2.

Exs. III. 1552 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "verisimiliter *Pep. ovalifolia* Hook. forma *glabra*" a C. de Candolleo denominata.

Hab. ad Caldas, et prope urbem Campinas prov. St. Pauli, ubi ad truncos arborum hanc plantam conspicuam bis legi. Flor. mens. Jul.—Oct.

Observ. Cum fig. Hookeri *P. ovalifoliæ* (Flora Exot. Tab. 165) non convenit nostra planta; species Hookeriana grossior, foliis latioribus, brevius petiolatis, amentis congestis diversa, tamen nostræ affinis habituque non dissimilis.

10. P. rhombea Ruiz et Pav.

P. glaberrima, tota badia, glanduloso-viscida; caulis teres; folia verticillata 4-na (raro 3-na), ovato- v. oblongo-lanceolata v. lanceolata, e medio in acumen obliquum, truncatum v. retusum angustata, coriacco- v. carnoso-crassiuscula, 3-nervia, nervo medio percurrente, breviter petiolata; amenta terminalia v. subterminalia, solitaria et 2-nata (rarius plura), parum incrassata, subattenuata, densiflora, glanduloso-punctata, pedunculum teretem 3—4-plo superantia; pistillum subovoideum; bacca (maturam non vidi) subellipsoidea, utroque acuta, non rostrata.

Descr. Herba glaberrima, maculis badiis, glanduloso-viscidis dense adspersa v. punctata, nunc contracta, erecta, caulibus fasciculatis, foliis

minoribus, non nisi e nodis imis radicans, nunc laxa, divaricato-decumbens v. pendula, e nodis sæpe radicans, 1—2-spithamea.

Caulis teres v. teretiusculus, firmus, nodis tumidis.

Folia 4-na (raro 3-na), typice plus minus rhomboideo-circumscripta, nunc angustiora lanceolata, nunc latiora oblonga, e basi subacuta fere ad medium marginibus convexis dilatata, deinde marginibus concavis in acumen obliquum, truncatum v. retusum contracta, minora carnosula, nervis 3—5, medio supra impressione notato, subtus crassiusculo, vix prominulo, lateralibus 2 proximis infra apicem evanidis, glaberrima, apice ciliolis paucis marginata, utrinque glanduloso-punctata, viscida.

Petiolus brevis, foliis multoties brevior, supra canaliculatus.

Amenta pedunculo parumper crassiora, sursum sensim attenuata, erecta, firma, superficie areolata.

Flores immersi, bracteis minutis, subimpressis, carnosis, orbicularibus tecti, sessiles.

Pistillum ovoideo-subæquicrassum, truncatum, apice crasso stigmatiferum, colore badio.

Bacca (immatura) pseudo-cupula ad medium cincta, semi-immersa.

Bracteæ subappressæ.

Fol. limb. 15—45 mm. long., 6—14 mm. lat.; pet. 3 mm.; ament. 30—40 mm.; pedunc. 10—15 mm.

Formæ hujus speciei duæ ad Caldas occurrunt:

a) *contracta*, erecta, foliis minoribus, 15—20 mm. long., crassioribus, latioribus;

b) *laxa*, diffusa, foliis longioribus, ad 45 mm. long., tenuibus, planis.

Syn. *P. rhombea* RUIZ et PAV. Fl. Peruv. et Chilens. Tom. I. p. 31.

Fig. RUIZ et Pav. l. c. Tab. XLVI. fig. b.
Nostra Tab. II. fig. 3.

Exs. III. 1551 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*P. Myrtillus* MIQ. CDC. in Prodr. v. 16, 1. n. 294" a C. DE CANDOLLEO, "*P. Regnelliana* MIQ. n. sp." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 173.

Hab. ad truncos arborum et saxa in sylvis primævis sat raro. Flor. mens. Oct.

Observ. *P. Myrtillus* pubescentia amentisque remotifloris cet. differt. *P. Regnelliana* MIQ. l. c. est forma nostra *contracta*. Cum figura RUIZII in Fl. Peruv. l. c. nostra planta viva non male convenit; hæc nostra opinio verbis RUIZII: "*Caules geniculati, folia purpurascentia, spicæ purpureæ, folia post exsiccationem papyrum tingunt*" firmatur. In planta sicca basis foliorum multo angustior redditur; plerumque unum alterumve folium ex verticillis imis cadit, quare folia opposita v. 3-na describuntur.

11. P. quadrifolia (L.).

P. glabra, nunc decumbens, radicans, nunc erecta; caulis plurianguIato-sulcatus; folia verticillata 4—6-na, spathulata v. elliptico-obovata, apice rotundata, emarginata, basi in petiolum brevem sensim angustata, 3-nervia; amenta terminalia, pedunculo crassiora v. æquicrassa, densissime florigera, pedunculum sulcatum $1^1/_2$—2-plo superantia; pistillum ovoideo-cylindraceum, truncatum; bacca late ovoidea, rostellata; bracteæ demum subpatentes.

Descr. Herba spithamea, subglabra, succulenta, læte viridis, nunc pendula, nunc decumbens, truncis arborum appressa, remotiuscule ramosa, nunc erectiuscula, contracta, ramis approximatis.

Caulis inferne obliterate angulatus v. teretiusculus, superne 4—6-angulatus, grosse sulcatus, angulis obtusis, subtilissime patenter pubescens v. glaberrimus.

Folia erecta, erecto-patentia v. patentia, obovato-elliptica v. imo subspathulata, basi cuneata, glaberrima, apice minute ciliolata, supra parce fusco-punctata, subtus punctis albidis punctículata, juniora tenuiora plana, cetera carnoso-crassiuscula, subtus convexa, 3-nervia, nervo medio percurrente, supra impressione notato, reticulo contra lucem conspicuo.

Petiolus brevis, $^1/_4$—$^1/_5$ folii æquans, supra canaliculatus.

Amenta erecta, firma, solitaria, apice obtusa v. apiculata; floribus densissimis, immersis, arcolate dispositis; bracteis erecto-patentibus minoribus.

Pedunculus anguloso-sulcatus, punctatus, amento $1^1/_2$—2-plo brevior, firmus.

Pistillum e basi ovoidea cylindraceum, apice stigmatiferum.

Bacca lævis, basi pseudo-cupulifera, pedicello conico denique imposita.

Fol. limb. 10—20 mm. long., 6—10 mm. lat.; pet. 3 mm.; ament. 30 mm.; pedunc. 15 mm.

Variat: a) *contracta*, erecta, minor, foliis crassioribus;
b) *laxa*, grandior, diffusa, foliis planis, nunc latioribus, nunc angustioribus.

Syn. *Piper quadrifolium* L. Syst. Veget. ed. XIV. p. 75, 23; Sw. Observ. p. 22.
Peperomia quadrifolia H. B. K. Nov. Gen. Tom. I. p. 69; Miq. Syst. Pip. p. 159; CDC. in Prodrom. l. c. p. 454.

Fig. Plumier Icon. 242. fig. 3.
Velloz. Fl. Fluminens. I. Tab. 62.
Nostra Tab. IV. fig. 6.

Exs. III. 1105 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): *Pep. quadrifolia* H. B. K. a C. DE CANDOLLEO et MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 174.

Hab. ad truncos arborum sat frequens. Flor. mens. Dec.– Jun.

12. P. trineura MIQ.

P. glabra; caulis pluri-sulcato-costatus; folia verticillata 4—6-na, rhomboideo-elliptica v. rhomboideo-lanceolata, basi cuneata, e media parte contracta, nervis 3 subtus crasso-elevatis carinata; amenta longa, remotiusculiflora, crassitie pedunculi, pedunculum teretem 3—5-plo superantia; pistillum subovoideum, subæquicrassum, truncatum; bacca ovoidea, crasse breviterque rostellata; bracteæ subpatentes.

Descr. Glaberrima, gracilescens, obscure viridis, nunc contracta, erecta, fasciculate ramosa, nodis imis radicantibus, nunc laxior, decumbens, divaricato-ramosa, tota radicans, apicibus solummodo erectiusculis.

Caulis profunde sulcatus, subexsuccus, plerumque fragilis.

Folia typice rhomboideo-circumscripta, basi in petiolum attenuata, e medio marginibus concavis in apicem obtusiusculum contracta, glaberrima, utrinque punctata, supra scabriuscula, nervis 3, supra impressionibus levibus notatis, in infera pagina crassis, elevatis, medio ad apicem percurrente, lateralibus 2 infra apicem evanidis, reticulo vix conspicuo, nunc carnosa supra concava, nunc tenuiora subplana.

Petiolus brevis, $^1/_4$ folii æquans, supra canaliculatus, subtus nervis folii 3 decurrentibus 3-costatus, glaberrimus v. minute puberulus.

Amenta terminalia, solitaria, glabra, sursum vix attenuata; floribus immersis, distantibus; bracteis minoribus, carnosulis, demum subpatentibus.

Pedunculus brevis, glaber.

Pistillum oblique ovoideum, sursum crassum, apice stigmatiferum.

Bacca lævis, basi pseudo-cupulifera, pedicello conico denique imposita.

Fol. limb. 10—15 mm. long., 5—7 mm. lat.; pet. 2 mm.; ament. 70 mm.; pedunc. 15—20 mm.

Variat: a) *contracta*, erecta, ramis brevioribus, foliis approximatis, in singulis verticillis pluribus, crassioribus;

b) *laxa*, diffusa, decumbens, foliis tenuioribus, planioribus, internodiis elongatis.

Syn. *P. trineura* MIQ. Syst. Pip. p. 175; in Linnæa Band XX. p. 126; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 18; CDC. in Prodrom. l. c. p. 454.

Fig. Miq. in Linnæa l. c. Taf. I. fig. 3 b; in Mart. Fl. Bras. l. c. Tab. 2. fig. VI. Nostra Tab. II. fig. 4.

Exs. III. 1104 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*P. rubioides* Kunth" a C. de Candollleo, "*P. trineura* Miq." a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 174.

Hab. in silvis jugorum Caldensium, in truncis arborum nec non ad rupes apricas, sat vulgaris. Flor. mens. Mart.—Jun.

Observ. Foliis 3-carinatis a ceteris diversa, qua nota a *P. rubioide* facile dignoscitur. Figura Miquelii habitum totius plantæ bene reddit, formam foliorum non item.

13. P. Loxensis H. B. K.

P. erecta v. decumbens, radicans, succulento-carnosa; caulis teretiusculus, pluri-sulcato-angulatus; folia verticillata 5-na (raro 4-na v. plura), cuneato-obovata, apice rotundata v. obtusa, basi in petiolum brevissimum contracta, plerumque carnoso-trigona, enervia, supra concava, (raro tenuiora subplana); amenta longa, pedunculum firmum multoties superantia, subdensiflora; pistillum e basi ovoidea cylindraceum, truncatum; bacca ovoideo-cylindracea, rostellata; bracteæ subappressæ.

Descr. Herba carnoso-crassa, locis apricis erecta, contracta, caulibus fasciculatis, locis umbrosis plerumque laxa, decumbens, e nodis remotis radicans.

Caulis crassus, carnosus, leviter pluri-angulato-sulcatus, glaber v. subtilissime patenter pubescens.

Folia 5-na, rarius 4-na, v. 2-nis verticillis confluentibus plura, plus minus cuneata, nunc cuneato-obovata v. cuneato-oblonga, nunc rhomboideo-oblonga, apice rotundata (rarissime retusa), basi attenuata, plerumque carnosa, trigona, (sicca coriacea, supra conduplicato-concava), glaberrima v. parce minuteque apice ciliolata, utrinque punctata, enervia, v. rarius (tenuiora) 3-nervia, nervis apicem versus evanescentibus.

Petiolus brevissimus, $^1/_4$—$^1/_5$ folii æquans, supra leviter canaliculatus.

Amenta terminalia, solitaria, glabra, superficie areolata, apicem versus vix attenuata.

Pedunculus brevissimus, $^1/_5$—$^1/_8$ amenti metiens, teres, glaberrimus, in amentum sensim transiens.

Pistillum e basi ovoidea, subtrigona, (ovarium constituente), in cylindrum (stylum) contractum, apice truncato stigmatiferum.

Bacca apice rostrata, lævis, pseudo-cupulifera, pedicello conico, brevi denique imposita.

Bracteæ minutæ, carnosulæ, orbiculares, flores foveolis rhachis immersos obtegentes.

Fol. limb. 10—12 mm. long., 5—8 mm. lat.; pet. 1—2 mm.; ament. 50—80 mm.; pedunc. 10 mm.

Formæ duæ, sat diversæ, occurrunt:

a) *contracta*, erecta, ramis congestis, foliis cuneiformibus; ad formas præcedentis erectas quodammodo accedens; in arboribus apricis;

b) *laxa*, decumbens, ramis divaricatis, foliis subplanis, *P. quadrifoliæ* formas umbrosas admodum referens; in umbrosis.

Syn. *P. Loxensis* H. B. K. Nov. Gen. Tom. I. p. 70 fide MIQUELII; MIQ. Syst. Pip. p. 158; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 16.

P. Regnelliana CDC. in Linnæa Band XXXVII. Heft III. p. 381.

Fig. Nostra Tab. III. fig. 3.

Exs. III. 1428 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. Regnelliana* CDC. mns." a C. DE CANDOLLEO, "*P. loxensis* H. B. K." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 173.

Hab. In truncis arborum lucorum et sylvarum primævarum vulgaris. Flor. mens. Jun.

Observ. Fide MIQUELII nostram plantam *P. Loxensem* appellamus, cui secundum descriptionem KUNTHII l. c. non male convenit nostra; attamen observandum, C. DE CANDOLLEUM nostram novam speciem judicare. Mirum est, nostram cum speciminibus in herb. Holmiensi, a C. DE CANDOLLEO *P. diffusa* denominatis, plane congruere; vix nisi modo exsiccationis discrepant.

B. Rhyncophorum MIQ. p. p.

Ovarium disco carnoso, obliquo, in centro stigmatifero apice auctum. Bacca globosa v. subglobosa, pericarpio toto glutinoso, papilloso. (*P. major* bacca ellipsoidea recedit).

Herbæ majusculæ, usque 4-spithameæ, erectiusculæ, rarius repentes, terrestres, rarius dendrophilæ.

14. P. galioides H. B. K.

P. erecta, 1—2 spithamea; caulis firmus, basi simplex, superne oppositc v. verticillate ramosus, teretiusculus, superne minutissime pubescens; folia verticillata 5-na (4—7-na), lanceolato-oblonga, inferiora latiora, apice obtusiuscula, subglabra; amenta terminalia, unum vere terminale, 2—5

axillaribus cinctum, filiformia, pedunculum brevem, teretem multoties superantia, remotiusculiflora; pistillum apice in discum crassum, obliquum incrassatum; bacca globoso-ellipsoidea; bracteæ erecto-patentes.

Descr. Herba majuscula, erecta v. rarius decumbens, nunc gracilior subsimplex, nunc firmior ramosa v. ramosissima, ramis sæpe divaricatis.

Caulis basi carnoso-crassus, ad nodos tumescens, inferne teretiusculus, obsolete angulatus, glabratus, superne teres.

Folia patentia, superiora lanceolata v. lanceolato-oblonga, inferiora latiora, sæpe ovato-oblonga v. elliptica, rarius ovato-rotundata, basi obtusa, apice obtusiuscula, apice ad lentem subtilissime pubescentia, subtus pallidiora, sicca pellucido-punctata, nervis 3, medio ramoso, percurrente, lateralibus obsoletis, nunc carnoso-crassiora, nunc tenuiora, supra plerumque longitudinaliter concaviuscula.

Petioli brevissimi, semiteretes, subtiliter pubescentes.

Amenta erecta, æquicrassa, subremotiflora, gracilia, crassitie pedunculi.

Pedunculus teres, subtilissime pubescens, amento multoties brevior.

Flores sessiles, foveolis rhachis immersi, bracteis minoribus tecti.

Pistillum e basi ovoidea, apice disco obliquo stigmatifero auctum.

Bacca glutinoso-verrucosa, verruca apicali oblique stigmatifera acuta, pedicello conico, subexserto denique imposita.

Bracteæ, baccis prorumpentibus, demum erecto-patentes.

Fol. limb. 10—15 mm. long., 4—5 mm. lat.; pet. 1—2 mm.; ament. ad 80—90 mm.; pedunc. 5—10 mm.

Variat: a) *aprica*, carnoso-crassa, foliis minoribus, verticillis approximatis; b) *umbrosa*, foliis tenuioribus, majoribus, elongatis, verticillis remotis.

Syn. *P. galioides* H. B. K. Nov. Gen. Tom. I. p. 71; Miq. Syst. Pip. p. 156; Illustrat. Pip. p. 22; in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 15; CDC. in Prodrom. l. c. p. 463.

Fig. H. B. K. l. c. Tab. XVII.
Miq. Illustrat. Pip. Tab. XX; in Mart. Fl. Bras. l. c. Tab. 2. fig. II.
Nostra Tab. IV. fig. 3.

Exs. III. 1103 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*P. galioides* H. B. K. var. *polymorpha* Miq." a Miquelio nominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 172.

Hab. ad terram et inter saxa jugorum Caldensium vulgaris. Flor. mens. Dec.—Mart.

Observ. Species quoad formam foliorum polymorpha; fig. H. B. K:ii l. c. bene cum nostra congruit, fig. Miquelii minus. Folia ima innovationum sæpe rotundata, superiora anguste oblonga, marginibus folii plantæ vivæ subparallelis, siccæ apicem versus divergentibus, quare folia obovato-oblonga in herbariis exstant; verticilli florales foliis multo longioribus, ut in *P. inæqualifolia* H. B. K., sæpe gaudent.

15. P. increscens MIQ.

P. erecta, simplex, rarius superne parce ramosa, dense pubescens; caulis teres; folia 2 opposita, breviter petiolata, obovato- v. ovali-rhombea, inferiora minora rotundata, novissima ovata, superiora nervis 3, subtus prominulis; amenta terminalia, 3, filiformia, remotiflora, pedunculum teretem multoties superantia, crassitie pedunculi; pistillum sursum incrassatum; bacca subglobosa.

Descr. Herba spithamea, superne rarius opposite ramosa, ramis simplicibus, ad basin stolones breves proferens, tota (excepto amento), præsertim caulis, densius pubescens v. hirsuta, sicca nigrescens.

Caulis firmiusculus, teres, succulentus, sicut foliorum inferiorum pagina infera, sæpe ruber.

Folia opposita (v. summa 4-na, verticillis 2 confluentibus), inferiora orbiculata v. obovato-rotundata, apice sæpe retusa, superiora nunc subrhombea, nunc latissime ovalia v. latissime obovata, basi rotundata v. late cuneata, apice obtusiuscula, novissima 2—4 ovata, sæpe apice subattenuata, utrinque pilis articulatis densius pubescentia, inferiora carnoso-crassa, plano- v. concavo-convexa, nervis plantæ vivæ vix conspicuis, superiora tenuiora, 3-nervia, nervis supra subimpressis, subtus crasso-prominulis, medio percurrente, reticulo conspicuo.

Petiolus brevis, semiteres, supra concaviusculus, $^1/_3$—$^1/_4$ folii metiens, dense pubescens.

Amenta erecta, terminalia, sæpissime 3 (unum vere terminale, axillaribus 2 junioribus brevioribus circumdatis), longa filiformia, subæquicrassa, glabra, fusco-punctata.

Pistillum e basi ovoidea in discum obliquum, crassum, in centro stigmatiferum incrassatum.

Bacca matura ellipsoideo-globosa, scutulo parvo, obliquo, stigmatifero mucronata, pedicello conico denique imposita, dense papilloso-glutinosa.

Fol. limb. 20—25 mm. long., 15—20 mm. lat.; pet. 4—5 mm.; ament. 90—100 mm.; pedunc. 10—15 mm.

Syn. *P. increscens* MIQ. in Linnæa Band XX. p. 124.
P. Langsdorffii MIQ. var. *increscens* MIQ. in MART. Fl. Bras. l. c. p. 13; CDC. in Prodrom. l. c. p. 444.

Fig. Nostra Tab. IV. fig. 1.

Exs. III. 1429 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. Langsdorfii* MIQ. *β increscens* CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 262" a C. DE CANDOLLEO, "*P.*

Langsdorffii Miq. Syst. var. *β increscens* Miq. in Fl. brasil. p. 13" a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 172.

Hab. locis petrosis lucorum rarior. Flor. mens. Febr.—Jun.

Observ. Auctt. hanc cum specie insequente vulgo jungunt; ad Caldas, ubi utriusque vidi specimina numerosa, formas intermedias numquam inveni. Quum habitu, tum notis magis ad *P. polystachyam* Dietr. accedere videtur nostra species. Cfr. observ. sub spec. insequ.

16. **P. blanda** (Jacq.) var. **Langsdorffii** (Miq.).

P. erectiuscula, denique decumbens, superne vulgo opposite ramosa, tota hirsuta; caulis teres; folia typice verticillata 3-na, rhomboideo-obovato-oblonga, breviter et oblique acuminata, basin versus sensim attenuata, inferiora obovato-lanceolata v. subspathulato-lanceolata, plana, vix carnosa, nervis 3, subtus elevatis; amenta terminalia plura et axillaria solitaria, filiformia, remotiflora, pedunculum multoties superantia; pistillum semi-immersum; bacca ellipsoideo-globosa.

Descr. Herba 2—3 spithamea, primo firma erecta, demum laxa procumbens, junior subsimplex, deinde sursum parce opposito-ramosa, ad basin innovationes valde villosas, erectas emittens, tota (excepta amenti parte florigera) hirsuta.

Caulis teres inferne crasso-succulentus, sicut foliorum inferiorum pagina infera, sæpe ruber.

Folia typice verticillata 3-na, v. præsertim inferne, uno alterove verticillo soluto, 2-na unilateraliter opposita, tertio fugitivo solitario v. caduco (terminalia, verticillis 2-nis confluentibus, non raro 4-na, quorum 2-na majora) forma variant: infima lata, sæpe obovato-rotundata, retusa, basi attenuata, proxima longiora subspathulato-lanceolata, apice rotundata, media obovato-lanceolata, subattenuata, superiora obovato-oblonga, sæpe rhomboideo-circumscripta, acumine brevi, obtusiusculo, obliquo, basi plerumque anguste cuneata, inferiora crassiuscula, subtus sæpe convexa, obliterate 3-nervia, superiora tenuiora, plana, nervis 3, crassis, subtus elevatis, supra impressis, medio percurrente, lateralibus 2 usque ad apicem sæpe percurrentibus.

Petiolus foliorum superiorum longiusculus, semiteres, supra canaliculatus, inferiorum brevior, teretiusculus, densius hirsutus.

Amenta, unum vere terminale, longius, axillaribus 2—4 minoribus cinctum, erectiuscula, æquicrassa, crassitie pedunculi teretis, glabra, fusco-punctata; pedunculus pubescens.

Flores foveolis rhachis levibus semi-immersi.

Pistillum sessile, e basi ovoidea in discum crassum, obliquum, in cujus centro stigma penicillatum est impressum, incrassatum, verruculosum.

Bacca scutulo parvo, stigmatifero, obliquo mucronata, pedicello conico exserto denique imposita.

Bracteæ demum erecto-patentes.

Fol. limb. 55 mm. long., 25 mm. lat.; pet. 10 mm.; ament. 100 mm.; pedunc. 15 mm.

Syn. *P. Langsdorffii* MIQ. Comment. phytogr. p. 52; Syst. Pip. p. 116; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 13; CDC. in Prodrom. l. c. p. 443.

Fig. MIQ. Comment. phytogr. Tab. VIII. fig. F.
Nostra Tab. IV. fig. 2.

Exs. III. 1430 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*P. Langsdorffii* MIQ. CDC. in Prodr. v. 16. 1. n. 262" a C. DE CANDOLLEO, "*P. Langsdorffii* MIQ. var." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 172.

Hab. ad terram petrosam lucorum Caldensium passim. Flor. mens. Febr.—Maji.

Observ. I. Nostra a descriptione MIQUELII l. c. differt: foliis 3-nis, inferioribus quam superioribus minoribus nec vice versa, baccis viscidis, subglobosis.

II. Speciminibus numerosis simul cum figuris *P. blandæ* (JACQ.), *dissimilis* H.B.K. et *Langsdorffii* MIQ. inter se comparatis, fateri quidem est necesse, has tres, pro speciebus distinctis olim habitas, non nisi formas ejusdem speciei vel saltem ejusdem stirpis esse. De dispositione foliorum diversa, qua ex causa C. DE CANDOLLEUS in sectiones diversas *P. blandam* et *Langsdorffii* digessit, jam supra diximus; hic tantum est addendum, iconem JACQUINI (in icon. plant. rar. Tom. II. Tab. 218) diligenter examinanti facile apparere, *P. blandam* folia typice 3-na præbere et, ubi 2-na opposita adsint, unum e verticillo ereptum ceteraque unilateraliter nec vere opposita esse, et, ubi plura, 2 verticillos in unum esse congestos. Ejusmodi *P. Langsdorffii* sese habet; aliter quidem *P. increscens*, saltem nostra, ubi folia vere opposita sunt. Hanc igitur ab aliis longius distare putamus et ad aliam stirpem v. typum, forsan *P. polystachyæ* DIETR., accedere, si quidem descriptiones MIQUELII et figuram in Commentariis phytogr. Tab. VIII. fig. G sequimur, ubi folia opposita esse dicuntur; C. DE CANDOLLEUS autem folia describit 3-na; at folia re vera sunt 2-na opposita, sed interdum, verticillis 2-nis approximatis, plura in singulis verticillis exstant.

Quoad formam foliorum animadvertendum, *P. dissimilem* foliis inferioribus apicem versus latioribus formam inter *P. blandam* et *Langsdorffii* quodammodo intermediam esse.

17. P. alata RUIZ et PAV.

P. 2—3 spithamea, erectiuscula, ramosa, glabra; caulis inferne teres, sursum foliis decurrentibus 3-quetro-alatus; folia ovato-lanceolata

longe et oblique acuminata (inferiora latiora), basi in petiolum brevem, 3-quetro-canaliculatum attenuata, tenuia, nervis 3 (3—7) subtus elevatis, mediis 3 supra basin solutis; amenta terminalia 2 et axillaria solitaria, longa, sensim attenuata, densiflora, pedunculum crassum, brevem multoties superantia; pistillum e basi ovoidea apice incrassatum; bacca scutulo minuto oblique acuminata, globosa.

Descr. Herba suffruticulosa, caulibus e radice fasciculatis, erectiusculis, glaberrima.

Caulis basi firmus, carnosus, e nodis imis radicans, sursum ramosus, inferne teres nullis alarum vestigiis, superne 3-quetro-alatus, alis angustis, membranaceis (majoribus 2 e foliis decurrentibus, tertia ex angulo caulis acuto formatis), caule inter alas obtusangulo, superne flexuosus, viridis, superne sæpe rubescens.

Folia alterna, ovato- v. oblongo-lanceolata, longiuscule et oblique acuminata, inferiora ovato-elliptica, acute acuminata, submembranacea, reticulo nervorum conspicuo, glabra, apice ciliolata, ad lentem utrinque punctata.

Amenta terminalia 2, quorum junius est brevius, et axillaria solitaria, crassitie pedunculi, rubro-puncticulata.

Pedunculus brevissimus, firmus.

Flores approximati, interdum anulate dispositi, foveolis levissimis rhachis semi-impressi, sessiles, bractea minuta, crassiuscula, subappressa tecti.

Pistillum apice disco obliquo, stigmatifero auctum, verruculosum.

Bacca globosa, rhachi parum impressa, disco exiguo mucronulata, glutinoso-papillosa; maturam non vidi.

Fol. limb. 70—90 mm. long., 30—35 mm. lat.; pet. 5 mm.; ament. 70—120 mm.; pedunc. 5—7 mm.

Syn. *P. alata* Ruiz et Pav. Fl. Peruv. et Chilens. Tom. I. p. 31; Miq. Syst. Pip. p. 87; CDC. in Prodrom. l. c. p. 418.
P. pterocaulis Miq. Syst. Pip. p. 86; in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 11.

Fig. Ruiz. et Pav. l. c. Tab. XLVIII. fig. b.
Nostra Tab. IV. fig. 5.

Exs. III. 1553 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. alata* Ruiz et Pav." a C. de Candolleo, "*P. pterocaulis* Miq." a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 170.

Hab. ad oppidum Jacotinga prov. Minarum, et prope oppidum St. João de Jaguary prov. St. Pauli, locis umbrosis, quam Caldas calidioribus, rara. Flor. mens. Oct.

Observ. *P. alata* R. et Pav. et *P. pterocaulis* Miq. formæ ejusdem speciei sunt, minime ut species distinguendæ; hæc forma junior foliis angustioribus, illa adulta

foliis latioribus; utramque locis supra citatis legimus. C. DE CANDOLLEUS et MIQUELIUS in his formis describendis inter se plane discrepant.

18. P. augescens MIQ.

P. erectiuscula, 2-spithamea, subsimplex, e basi longe stolonifera, glabra; caulis teres; folia alterna, ovata v. ovato-lanceolata longiuscule acuminata (inferiora et stolonum latiora, subrotundata, plana), crassiuscula, subcoriacea (sicca coriacea), nervis 3 (3—5), crassis, subtus elevatis, jam e basi folii divergentibus; amenta terminalia v. subterminalia 1—2, longissima, filiformia, pedunculum teretem multoties superantia, floribus sæpissime in anulis remotiusculis dispositis; pistillum præcedentis; bacca globosa, oblique acuminata; bracteæ subappressæ.

Descr. Herba admodum variabilis, $1^1/_2$—4-spithamea, erectiuscula, e parte inferiore radicante stolones longos, ex apicibus innovationes erectas evolventes, emittens, subsimplex v. sursum ramos parcos proferens, glabra, firmo-coriacea.

Caulis teres, costulis 2 parum elevatis instructus, firmus, inferne, sicut foliorum pagina infera, ruber.

Folia alterna, caulina forma variant: superiora nunc late ovata—ovato-lanceolata, nunc elliptica, apice nunc acuminata, nunc acuta v. obtusiuscula, basi rotundata v. attenuata (sicca plerumque contracta angustiora, margine revoluta), inferiora latiora, magis obtusa, stolonum subrotundata v. obovato-rotundata, apice acuta, obtusiuscula v. emarginata, crassiuscula, plana, nervis 3 (3—5) supra impressionibus notatis, subtus elevatis, medio percurrente, lateralibus 2 apicem versus evanescentibus, glabra, apicem versus ciliolata, utrinque ad lentem fusco-puncticulata.

Petiolus supra canaliculatus.

Amenta terminalia v. subterminalia 1—2 et axillaria solitaria, crassitie pedunculi, puncticulata.

Flores immersi, approximati, bracteis minoribus, crassiusculis tecti.

Pistillum e basi ovoidea, apice in discum obliquum, stigmatiferum incrassatum.

Bacca scutulo oblique acuminata, papilloso-viscida, globosa, pedicello non exserto imposita.

Fol. limb. 40—50 mm., rarius ad 100 mm. long., 20 mm., rarius ad 50 mm. lat.; pet. 8—10 mm.; ament. 150—200 mm.; pedunc. 15—20 mm.

Variat: a) *stricta*, erecta, simplex, foliis angustioribus, elliptico-lanceolatis v. lanceolatis, attenuato-acuminatis, monostachya, stolonibus brevibus, pallidior; locis petrosis, siccis;

b) *normalis*, erectiuscula, apice parce ramosa, e nodis imis stolones longos, foliis rotundatis, minutis vestitos, emittens, foliis caulinis ovato-lanceolatis; inter præced. et insequ. intermedia.

c) *laxa*, ramosa, decumbens v. scandens, radicans, stolonibus majoribus, foliis caulinis multo latioribus, ovatis v. elliptico-ovalibus v. ovalibus, obtusis, saturate viridibus, longius petiolatis, amentis sæpe axillaribus; in sylvis primævis.

Syn. *P. augescens* Miq. Archiv. l. c. p. 171.

Fig. Nostra Tab. IV. fig. 4.

Exs. III. 1432 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. alata* Ruiz et Pav. γ *angustifolia* CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 129" a C. de Candolleo, "*P. augescens* Miq. n. sp." a Miquelio denominata.

Hab. locis umbrosis ad terram vulgaris. Flor. mens. Mart.—Jun.

Observ. I. Species, quamvis valde polymorpha, viva facile, in herbariis ægrius distincta; notæ essentiales: stolonifera (foliis stolonum rotundatis), foliorum consistentia et nervatio, et dispositio florum.

II. Descriptio Miquelii non nisi formam nostram (a) *strictam* amplectitur ideoque manca est; C. de Candolleus nostram cum *P. alata* perperam confundit; ab hac caule aptero nervisque foliorum facile dignoscitur.

III. *P. Portobellensis* Beurling, Flora Portobellensis (in Kongl. Vet. Akad. Handl. Holm. 1854, p. 147) secundum descriptionem et specimina orig. in herb. Holmiensi nostræ formæ *laxæ* identica videtur; tamen descriptio organorum fructificationis manca et specimina, quoad amenta et fructus verisimiliter monstrosa, ne id pro certo affirmemus, obstant.

19. P. diaphana Miq.

P. erecta, simplex v. sursum squarrose ramosa, glabra v. parce pubescens, tota obscure viridis, e basi breviter stolonifera; caulis teres; folia alterna, ovata v. lanceolato-ovata, acuminata, acutiuscula (inferiora latiora), submembranacea, nervis 3, subtus prominulis, ad basin folii concurrentibus, reticulo insigni, glabriuscula, margine ciliata; amenta terminalia 1—2 et axillaria solitaria, demum squarrosa, filiformia, remotiflora, pedunculum teretiusculum 3—5-plo superantia; pistillum globoso-ovoideum, scutulo parvo, obliquo auctum, parum immersum; bacca globosa, pedicello exserto, elongato-conico demum imposita; bracteæ demum patentes.

Descr. Herbacea, vix spithamea, subsequente et præcedentibus gracilior, parte inferiore plerumque rubra, foliis supera pagina secundum nervos plerumque albo-variegatis, subtus pallidis, erecta, junior simplex, denique parce squarroso-ramosa.

Caulis teres, costulis 2 parumper elevatis, glaber v. præsertim sursum parce puberulus.

Folia alterna, petiolata, caulina ovato-acuminata, obtusiuscula, v. lanceolato-ovata, acuta, basi rotundata, rarius acutiuscula, inferiora et stolonum rotundata v. rotundato-ovata, plana, glabriuscula, margine e medio apicem versus ciliolata, juniora supra subtusque parce puberula, ad lentem pellucido-punctata, nervis 3, jam e basi folii solutis, supra subimpressis, subtus prominulis, medio percurrente; folia superiora demum decidua.

Petiolus longiusculus, canaliculatus, glaber.

Amenta primo erecta, demum squarrosa, saturate viridia, crassitie pedunculi, vix attenuata.

Flores foveolis levibus vix immersi, sessiles, bracteis crassiusculis tecti.

Pistillum globoso-ovoideum, apice in scutulum obliquum, stigmatiferum attenuatum, mox post foecundationem emersum, verruculosum.

Bacca globosa, papilloso-verrucosa.

Antheræ sæpe rubescentes.

Fol. limb. 35—40 mm. long., 15 mm. lat.; pet. 10 mm.; ament. 70 mm.; pedunc. 20 mm.

Syn. *P. diaphana* MIQ. Archiv. l. c. p. 170; CDC. in Linnæa Band XXXVII. Heft III. p. 373. Fig. Nostra Tab. V.

Exs. III. 1109 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*P. diaphana* MIQ. n. sp." a MIQUELIO denominata. Nomen, a C. DE CANDOLLEO impositum, quum novum sit, excludimus.

Hab. ad terram et ad arborum radices locis umbrosis passim. Flor. mens. Mart.—Jun.

Observ. I. Nomen "*diaphana*" ad siccam, pejus ad vivam, quæ obscure viridis est, convenit. Planta junior habitu *P. augescentem* juniorem, deflorata amentis squarrosis, defoliatis speciem insequentem refert.

20. P. nuda CDC.

P. junior erecta, firma, florens procumbens, 2-spithamea, demum squarrose ramosa, glabra, e basi innovationes erectas, robustas, apice dense foliigeras, emittens, demum pallida, foliis omnibus deciduis; caulis

teres; folia alterna, rhomboideo-oblonga, inæquilatèra, basi in petiolum longiusculum attenuata, breviter acuminata (rarius lanceolata, obtusiuscula), tenuia, 5—9-nervia, nervis supra basin v. altius sensim solutis, medio valido subtus elevato; amenta terminalia et axillaria, demum squarrosa, filiformia, densiflora, pedunculum teretem multoties superantia; pistillum, bacca et bracteæ P. augescentis.

Descr. Herbacea, suffruticulosa, usque pedalis, demum tota pallens, decumbens, amentis squarrosis.

Caulis teretiusculus (v. obsolete sulcato-angulatus), costulis 2, parum elevatis, succulento-carnosus, inferne aphyllus.

Folia inferiora mox, omnia demum decidua, alterna, solitaria v. in axillis sæpe gemina magnitudine inæqualia, typice rhomboideo-circumscripta, oblonga—obovato-lanceolata, oblique acuminata, acuta v. (nova) obtusiuscula, (innovationum infima rotundata, breviter acuminata, sequentia obovata, suprema rhomboideo-elliptica) omnia plana, vix carnosa, sicca membranacea, glaberrima, ad lentem punctata, 5—7—9-nervia, nervis supra subimpressis, medio subtus prominulo, ad apicem percurrente, nervis ceteris gracilibus, a basi ad tertiam folii partem inferiorem sensim e nervo medio solutis.

Petioli canaliculati, post defoliationem cicatrices tumescentes relinquentes.

Amenta primo erectiuscula, demum patentia v. squarrosa, elongata, sensim attenuata, pedunculis vix crassiora.

Flores densi, non anulate dispositi, foveolis immersi, bracteis tenuioribus tecti.

Pistillum sessile, e basi ovoidea apice disco obliquo, stigmatifero auctum.

Bacca globosa, pedicello conico, crasso denique imposita, glutinoso-papillosa.

Bracteæ demum subappressæ v. erecto-patentes.

Fol. limb. 80 mm. long., 30 mm. lat.; pet. 15—20 mm.; ament. 120 mm.; pedunc. 15—20 mm.

Syn. *P. nuda* CDC. in Linnæa Band XXXVII. Heft III. p. 368.

Fig. Nostra Tab. VI.

Exs. III. 1431 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. nuda* CDC. mns" a C. de Candolleo, "*P. Velloziana* Miq. var. *subnovemplinervia* Miq." a Miquelio nominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 170.

Hab. ad terram v. in truncis putridis scandens sat frequens. Flor. mens. Mart.—Maji.

Observ. Evolutione singulari, supra descripta, insignis; nomen "*nuda*" statum plantæ defoliatæ bene exprimit. Specimina, a Widgrenio ad Rio lecta, nunc in herb.

Holmiensi asservata, quæ MIQUELIUS *P. Vellozianæ* formam normalem exprimere dicit, ad nostram plantam separandam nos cogunt; illam enim ad *P. alatam* accedere cum C. DE CANDOLLEO opinamur; nostra species ad *P. Cubanam* CDC. quodammodo convenire videtur, præsertim in ætate juniore. *P. obliqua* RUIZ et PAV. Fl. Peruv. et Chilens. Tom. I. p. 32, Tab. LI. fig. c. nostræ valde affinis est.

21. P. Martiana MIQ.

P. glabra, basi radicante aphylla, apicibus erectiusculis, foliigeris; caulis internodiis brevibus, teres; folia rotundata v. obovato-rotundata v. obovata, basi acuta, apice rotundata, emarginata, carnoso-rigida, nervis 3(3—5) supra impressis, medio percurrente, supra profunde immerso; amenta terminalia, solitaria, densissime florigera, incrassata, pedunculum subæquantia v. parum superantia; pistillum disco carnoso, magno, obliquo auctum; bacca præced., sed scutulo majore; bracteæ demum subpatentes.

Descr. Herba e basi repente, caules 1—2-pollicares, erectiusculos, apice foliigeros emittens.

Caulis teres, costulis 2 elevatis, nodosus, punctatus, glaberrimus.

Folia apicem versus congesta, rotundato-obovata (nunc magis rotundata, nunc rotundato-obovata, imo late ovalia), basi late cuneata, apice semper rotundata, emarginata, crassa, carnosa, rigida, plana, (sicca coriacea), supra saturate, subtus pallide viridia, nitida, glaberrima, margine ciliolata, nervis 3—5, subtus vix prominulis, lateralibus infra apicem evanescentibus, reticulo plantæ vivæ vix conspicuo.

Petiolus canaliculatus, gracilis.

Amenta pedunculis 2-plo crassiora, æquicrassa, plus minus obtusa, punctata.

Flores subimbricati, rhachi carnosæ immersi.

Pistillum apice scutulo magno, stigmatifero, obliquo valde incrassatum.

Bacca globosa, dense glutinoso-papillosa, scutulo oblique acuminata, pedicello conico, crasso, subexserto imposita.

Bracteæ puncticulata.

Fol. limb. 15—25 mm. long., 12—15 mm. lat.; pet. 5 mm.; ament. 20 mm.; pedunc. 20 mm.

Syn. *P. Martiana* MIQ. Syst. Pip. p. 189; in MART. Fl. Bras. l. c. p. 23; CDC. in Prodrom. l. c. p. 422.

Fig. MIQ. in MART. Fl. Bras. l. c. Tab. 1. fig. III.
Nostra Tab. VII. fig. 1.

Exs. I. 413 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. Regnelli): "*Pep. Guadaloupensis* CDC. in Prodr. n. 121. γ *emarginulata* CDC. mns." a C. de Candolleo, "*P. Martiana* Miq.!" a Miquelio denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 173 et Linnæa Band XXXVII. Heft. III. p. 373.

Hab. in truncis et ad radices arborum et supra saxa inter muscos, ubique frequens. Flor. mens. Oct.—Maji.

Observ. Species habitu et notis gravibus optime distincta, ratione quadam *P. myrtifoliæ* sectionis *Micropiperis* analoga. Cum *P. Guadaloupensi* non confundenda.

22. P. nummularifolia (Sw.).

P. longe repens; caulis filiformis, glabratus, teres; folia alterna, rotundata (sæpe rotundato-ovata v. rotundato-ovalia), subplana, carnoso-crassa (sicca subcoriacea), subenervia, v. nervis 3, contra lucem conspicuis, longiuscule petiolata; amenta terminalia, solitaria, crassitie pedunculi, filiformia, pedunculum teretem aliquoties superantia; pistillum disco obliquo, stigmatifero apice auctum; bacca globosa, minute verruculosa.

Descr. Herbacea, in ramis arborum repens.

Caulis debilis, radicans, minute puberulus, subexsuccus.

Folia dissita, forma variant: plerumque subrotundata, nunc (inferiora) late ovalia obtusa, nunc (juniora) rotundato-ovata v. orbiculata, basi rotundata v. truncata, subplana, v. supra concaviuscula subtus convexiuscula, glaberrima v. pilis minutissimis, præsertim ad margines inspersis, puberula, utrinque ad lentem punctata, sæpe albo-verrucosa.

Petiolus teres, supra canaliculatus, gracilis, ad v. infra marginem folii insertus, $^1/_2$—$^1/_3$ folii æquans.

Amenta erectiuscula, remotiusculiflora, gracilia.

Pedunculus teres, glaber.

Flores bracteis appressis, demum erecto-patentibus, tecti.

Pistillum e basi ovoidea apice incrassatum, oblique stigmatiferum.

Bacca matura globosa, apice scutulo verrucæformi aucta, pedicello conico, carnoso demum imposita.

Fol. limb. ad 12—17 mm. long., ad 9—12 mm. lat.; pet. ad 5 mm.; ament. 30—40 mm.; pedunc. 10—12 mm.

Syn. *Piper nummularifolium* Sw. Fl. Ind. occid. 1797. Tom. I. p. 72.
Piper rotundifolium L. Spec. plant. 1753. Tom. I. p. 30.
Peperomia nummularifolia H.B.K. Nov. Gen. Tom. I. p. 66; Miq. in Mart. Fl. Bras. l. c. p. 18; CDC. in Prodrom. l. c. p. 420; Griseb. Fl. West Ind. Islands p. 164.
Acrocarpidium nummularifolium Miq. Syst. Pip. p. 52.

Fig. Nostra Tab. VII. fig. 2.

Exs. III. 1108 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. nummularifolia* KUNTH, CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 141" a C. DE CANDOLLEO, "*P. rotundifolia* H. B. K., *P. nummularioides* CDC." a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 169.

Hab. in ramis arborum vetustarum non raro. Flor. rarius, mens. Sept.—Nov.

Observ. Quamquam vix dubitari licet, quin species LINNÆANA, *Piper rotundifolium* Spec. plant. l. c., ubi fig. PLUMIERI (Amer. p. 52, Tab. 69) citatur, cum nostra identica sit, i. e. typus speciei, quæ nunc *Pep. nummularifolia* Auctt. vocatur, tamen hic animadvertendum, SWARTZIUM et KUNTHIUM ll. cc. nominibus *Pep. rotundifoliæ* et *nummularifoliæ* duas distinguere species, et GRISEBACHIUM eandem opinionem secutum esse. Quorum quum auctoritate impellimur, ut has species vere diversas admittamus, tum specimina originalia SWARTZIANA, in Jamaica lecta, nomine *Piperis rotundifolii* in herb. Musei Upsaliensis aliaque, ex eadem insula ex herb. LAMBERTI in herb. FRIESII advecta, hanc nostram opinionem firmare videntur. Haud ineptum igitur putavimus hanc speciem suspectam, licet e speciminibus siccis, illustrare, eo magis quod auctores specimina SWARTZIANA numquam examinasse videntur.

SWARTZIUS (Fl. Ind. occid. l. c.) *Pip. nummularifolium* a *P. rotundifolio* caule divaricato, foliis orbiculatis, convexo-concavis differre monet, *P. rotundifolio* (Observ. p. 20) folia subrotunda, terminalia oblongiuscula, plana ferente, quas ad notas *Pep. rotundifoliæ* GRISEBACHIUS l. c. folia ovalia cet. addit. Hi characteres minoris quidem ponderis viderentur, nisi *Pip. rotundifolium* habitu a *P. nummularifolio* admodum differret; formæ intermediæ, si umquam inveniantur, utrum hæc differentia constans sit an non, decernant.

Characteres hic addere liceat:

Pep. nummularifolia (Sw.); caulis totus repens, divaricatus; folia omnia dissita, longius petiolata (foliis petiolum 1—2-, raro 3-plo superantibus), crassa, carnosa, convexo-concavis, typice rotundata, terminalia quam inferiora multo minora, omnia alterna, sparse punctata, nervis vix conspicuis; amenta longe pedunculata; viva læte viridis, ut quidem vidimus.

Pep. rotundifolia (Sw.); caulis, ut videtur, ramulos novellos erectiusculos emittens, quorum folia approximata; folia breviter petiolata, præsertim ramulorum novellorum, quorum folia 4—6-plo v. pluries petiolum superant; folia terminalia ramulorum ovalia v. elliptica, inferiora rotundata, multo minora, summa 2-na oblique opposita, punctis glandulosis, fusco-rubris, densis perforata, obsolete 1-nervia, nervo percurrente, plana, submembranacea (viva, ut videtur, vix carnosa); amenta brevia, graciliora, pedunculata, floribus minutis.

Species, ut videtur, obscure viridis, foliis minoribus (inferioribus) 3—5 mm., sæpe latioribus quam longioribus, apice sæpe retusis, superioribus 8—11 mm. long., 4—6 mm. lat., apice obtusis v. retusis, nervo medio præsertim subtus conspicuo, ramoso, petiolis supremis 1 mm., inferioribus 2 mm. long., amentis subremotifloris, sicut pedunculis glanduloso-punctatis, filiformibus, ovariis scutulo obliquo, stigmatifero apice incrassatis, bracteis eroso-lobatis, glandulosis; baccam non vidi.

Specimina, supra descripta, tota rufescenti-pubescentia; tamen hirsuties secund. auctt. valde variat.

Mirum videtur, quod SWARTZIUS (Observ. l. c.) sub *Pip. rotundifolio* Systema Veget. LINNÆI p. 74, 17 citat. Notæ KUNTHII l. c. quam GRISEBACHII et SWARTZII minus perspicuæ.

23. P. major (MIQ.).

P. repens, radicans; caulis teres, pubescens; folia alterna, late cordata, acutiuscula v. obtusa, basi retusa v. late cordata, 5-nervia, plana, subcoriacea, supra puberula, subtus glabra; amenta solitaria, densiflora, pedunculum teretem 2—3-plo superantia; pistillum ovoideum, apice disco obliquo, mucronato, antice stigmatifero auctum; bacca ellipsoidea v. cylindraceo-ellipsoidea, parce papillosa, rostro longo, oblique affixo, subfiliformi, dense papilloso munita, pedicello brevi, crasso, subgloboso imposita, demum patentissima.

Descr. Herba obscure viridis.

Caulis longe repens, minute pubescens, parce ramosus, ramis junioribus densius pubescentibus.

Folia alterna, subtus pallidiora, vix carnosa, ovato-cordata, late cordata v. rotundato-ovata, basi nunc cordata, nunc truncata v. retusa, (novissima ovata), apice acutiuscula v. obtusa, nervis 5—7 (mediis 3 ad apicem percurrentibus), supra impressionibus levibus notatis, subtus crassis, prominulis, reticulo contra lucem conspicuo, pellucido-punctata, nervis subtus sæpe pubescentibus.

Petiolus longiusculus, folium æquans v. superans, semi-teres, supra canaliculatus, subglaber, foliorum novorum puberulus.

Amenta ramulos monophyllos terminantia, foliis opposita, carnosa, densiflora, sursum subattenuata.

Pedunculus crassitie amentum vix æquans, teres, pubescens, ad basin foliolo angusto plerumque instructus.

Flores rhachi semi-immersi, bracteis parvis, foveolis propriis infra flores insertis, vix tecti.

Pistillum ovoideum, basi immersum, minute verruculosum, apice oblique incrassatum.

Bacca majuscula, matura horizontaliter patentissima, parcius v. ad basin densius papillosa, rostro densissime papilloso, baccam subæquante, munita; stigma ad basin rostri insertum.

Fol. limb. circ. 35 mm. long. et lat.; pet. 30—40 mm.; ament. 30—50 mm.; pedunc. 15—20 mm.

Syn. *Acrocarpidium majus* MIQ. Syst. Pip. p. 60.
Peperomia major CDC. in Prodrom. l. c. p. 432.
P. hederacea MIQ. in MART. Fl. Bras. l. c. p. 20.

Fig. Nostra Tab. VII. fig. 3.

Exs. III. 1102 (specim. descr.) in herb. Holmiens. (ex Herb. brasil. REGNELLI): "*Pep. major* CDC. in Prodr. v. 16, 1 n. 197" a C. DE CANDOLLEO, "*P. hederacea* MIQ. Fl. Bras., *P. major* DC. Junior" a MIQUELIO denominata. Cfr. Archiv. l. c. p. 169.

Hab. ad terram et radices arborum locis umbrosis non raro. Flor. mens. Jun.—Nov.

Observ. Folia sat variant; amenta geminata non vidimus; cum affinibus ob baccam rostratam cet. subsectionem propriam sub *Rhyncophoro* constituere videtur.

EXPLICATIO TABULARUM.

Figuræ omnes, nisi aliter indicatum est, ad naturam sunt delineatæ.

Signa communia:

Numero, qui plantam magnitudinis naturalis repræsentat, sunt adjectæ litteræ:
a = flos v. pistillum;
b = bacca matura;
c = amenti v. ejus segmenti sectio transversalis, foveolam, ubi flos sessilis v. bacca cum pedicello est innixa, exhibens.
Figuræ analyticæ 33-es auctæ.

TAB. I.

Fig. 1. Peperomia reflexa: pericarpii stratum externum, a = apicem, b = basin versus, differentiam texturæ inter partem basilarem et apicalem præbens; fig. valde aucta.
„ 2. P. nuda: fig. pericarpii structuram cum cellulis ovalibus glandulosis, ubi nulla inter partem basilarem et apicalem conspicitur differentia, præbet; fig. valde aucta.
„ 3. P. myrtifolia var. Caldasiana: 3a = pistillum e latere interno, amenti rhachin spectante, visum.
„ 4. P. delicatula: fig., ad specimina, in spiritu vini conservata, delineata, folia superiora minora et amenta crassiora quam plantæ vivæ repræsentat; 4b = bacca cum pedicelli elongati parte.
„ 5. P. circularis: planta florens.
„ 6. P. emarginella: fig. ad specimen Swartzii delineata.
„ 7. P. Sellowiana: specimen magnum;
7c = amenti sectio, ubi margo erosulus et foveolæ profundæ cum pedicellis elongatis, in apicibus cicatrices staminum et baccæ præbentibus, conspiciuntur; in centro fasciculorum vasorum orbis.

TAB. II.

Fig. 1. P. oreophila: fig. ad specimina sicca et in spiritu vini conservata delineata; 1c = folium inferius latius et superius angustius cum folii sectionibus longitudinali et transversali.
„ 2. P. reflexa: 2c = amenti pubescentis segmentum cum pedicello.
„ 3. P. rhombea: 3b = bacca vix matura.
„ 4. P. tenera: 5a = flos cum bractea, e latere interno visus;
5c = amenti sectio.

TAB. III.

Fig. 1. P. MINENSIS.
„ 2. P. CAMPINASANA: 2 d = fólium 4-es auctum.
„ 3. P. LOXENSIS: 3 a (fig. super.) = pistillum e latere externo visum; in fig. infer. ovarii latera externum et internum simul conspiciuntur; 3 c = amenti segmentum cum pedicello brevi, crasso.

TAB. IV.

Fig. 1. P. INCRESCENS.
„ 2. P. BLANDA var. LANGSDORFFII.
„ 3. P. GALIOIDES.
„ 4. P. AUGESCENS.
„ 5. P. ALATA.
„ 6. P. QUADRIFOLIA: 6 b & c = amenti sectio transversalis, pedicellos plures et bracteam unam præbens; pedicello bacca matura est innixa.

TAB. V.

P. DIAPHANA: figuræ majores secundum specimina sicca et in spiritu vini conservata delineatæ;
fig. superior = planta adulta;
fig. inferior = planta deflorata;
1 f = bacca ictibus insectorum monstrosa; fig. pluries aucta;
a′ = stigma, ubi intravit insectum;
b′ = basis baccæ;
c′ = ovarium.

TAB. VI.

P. NUDA: planta, post florescentiam foliis supremis privata, cum innovatione erecta, firma; fig. secundum specimina sicca et in spiritu vini conservata delineata.
1 c = amenti sectio transversalis, tuberculum (pedicellum) cum cicatricibus staminum baccæque præbens;
1 d = amenti baccæque sectio transversalis, ubi pedicellus formari incipit; delineatio cellularum schematica.

TAB. VII.

Fig. 1. P. MARTIANA: 1 b = segmentum amenti in sect. transvers., ubi dextrorsum bractea, sinistrorsum bacca, pedicello conico imposita, conspiciuntur; delineatio cellularum schematica;
1 c = segmenti amenti sectio transversalis cum flore sessili et pedicello, cicatices 3 præbente; in centro fasciculi 4 vasorum.
„ 2. P. NUMMULARIFOLIA.
„ 3. P. MAJOR: 3 b = bacca tuberculo innixa;
3 e = amenti sectio longitudinalis cum pistillo et bractea, foveolæ propriæ innixa.

INDEX SPECIERUM.

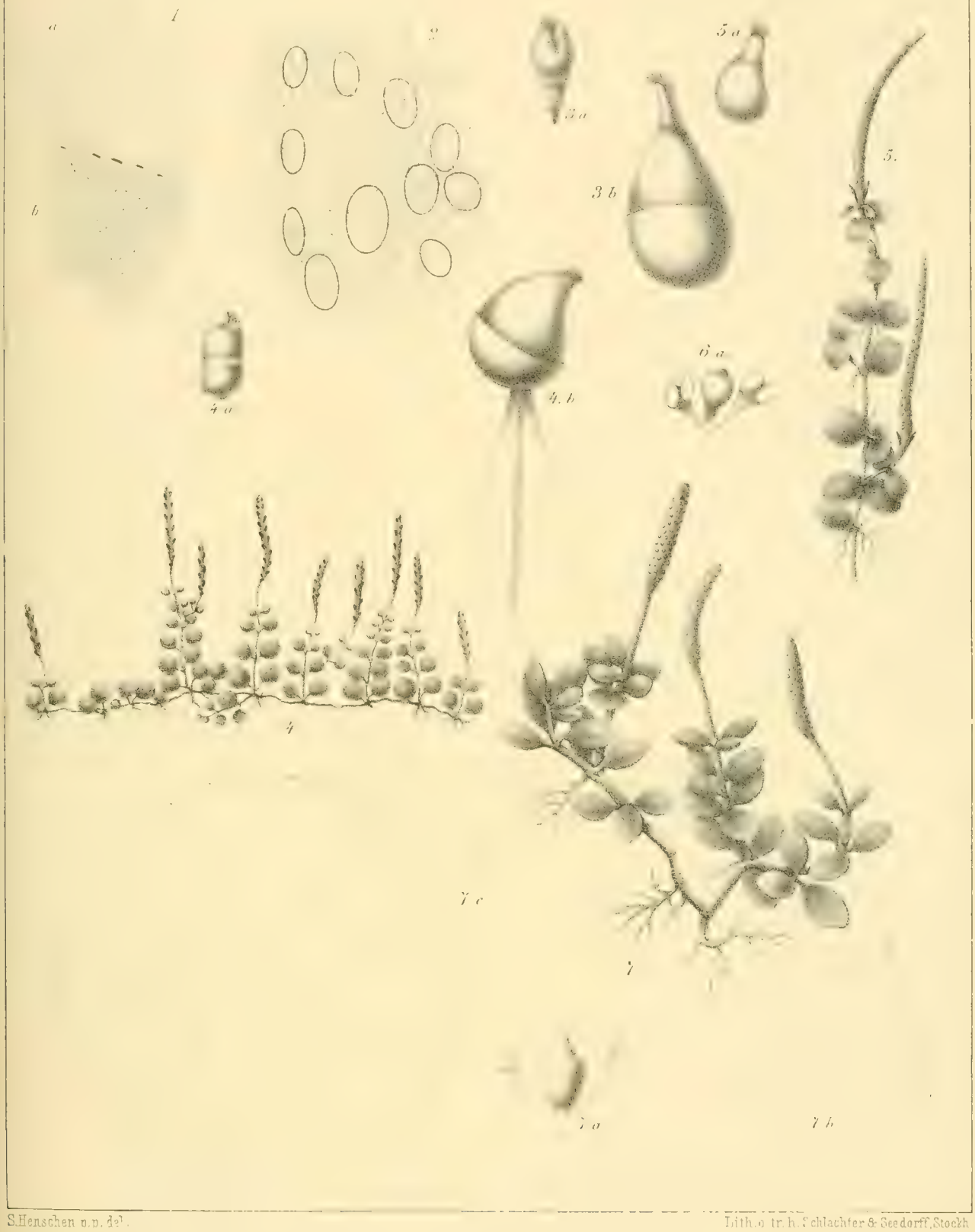
Numerus major paginam, ubi uberius species illustratur, significat.

Acrocarpidium exile . . . . . 23.
hispidulum . . . . . 19.
majus . . . . . 50.
nummularifolium . . . 47.
rotundifolium . . . 23, 25.
Sellowianum . . . . 19.
Peperomia alata 4, 8, 14, 16, **40**, 41, 43, 46.
„ var. angustifolia . . 43.
augescens 4, 5, 8, 16, 17, **42**, 43, 44.
arifolia . . . . . 3.
blanda . . . . . 11, **12**, **40**.
„ var. Langsdorffii 4, 14, 16, **39**.
Caldasiana . . . . . 21.
Campinasana . 5, 8, 16, **30**, 31.
circinata . . . . 23, 25, 29.
circularis 4, 8, 14, 16, 23, **24**, 25.
Cubana . . . . . 46.
delicatula . 4, 5, 16, **22**, 24.
Deppeana . . . . . 26.
diaphana . . . . 17, **43**, 44.
diffusa . . . . . 11, 36.
dissimilis . . . . . 12, 40.
emarginella . . . . **23**, 24.
Estrellensis . . . . . 21.
„ var. distans . . . 22.
exilis . . . . . **23**, 24.
filiformis . . . . . 30.
fimbriata . . . . . 29.
„ var. pilosior . . 4, 29.
flexicaulis var. microphylla . 22.
galioides . . 14, 16, **36**, 37.
„ var. polymorpha . 37.
Gouadaloupensis . . . . 47.
„ var. emarginulata . 47.
hederacea . . . . . 40.
hispidula . . 11, 14, 19, **20**.
inæqualifolia . . . . . 37.
increscens 4, 5, 12, 14, 16, **38**, 40.
Langsdorffii . . . . **12**, 40.
„ var. increscens . 38, 39.
Loxensis . . . 5, 11, 16, **35**, 36.
Peperomia major . . 7, 14, 15, 17, **49**, 50.
Mandonii . . . 11, 14, 19, **20**.
Martiana 4. 5, 15, 17, 21, **46**, 47.
Minensis . . 4, 5, 11, 16, **29**.
myrtifolia . . . 4, **21**, 22, 47.
„ var. Caldasiana . 15, **20**.
Myrtillus . . . . . 32.
nuda . . . . 4, 9, 17, **44**, 45.
nummularifolia 14, 15, 17, 25, **47**, **48**.
nummularioides . . . . . 48.
obliqua . . . . . 46.
oreophila . . 4, 5, 8, 14, 16, **28**.
ovalifolia . . . . . 31.
„ var. glabra . . . 31.
polystachya . . . . . 39, 40.
Portobellensis . . . . . 41.
pterocaulis . . . . . 43.
quadrifolia . . . 11, 16, **33**, 34.
reflexa 4, 9, 11, 14, 16, **26**, 27, 29, 30.
„ var. tenera . . . 28, 30.
„ var. valantoides . . 28.
Regnelliana . . . . . 32, 36.
repens . . . . . 19.
rhombea . . . 5, 8, 16, **31**, 32.
rotundifolia . . . 12, 23, 25, **48**.
rubioides . . . . . 35.
Sellowiana . . . 11, 16, **25**, 26.
tenera 5, 8, 11, **13**, 14, 15, **18**, 19, **20**.
trineura . . . 4, 5, 16, **34**, 35.
urocarpa . . . . . 6.
valantoides . . . . . 27, 28.
Velloziana . . . . . 4, 46.
„ var. subnovemplinervia . 45.
Verhuellia . . . . . 3.
Piper circulare . . . . . 25.
emarginellum . . . . . **23**, 24.
hispidulum . . . . . **19**.
nummularifolium . . . . . 47, **48**.
quadrifolium . . . . . 33.
reflexum . . . . . 27.
rotundifolium . . . 25, 47, **48**, 49.

ERRATA GRAVIORA.

Rhyncophorum ubique melius *Rhynchophorum* scribitur.

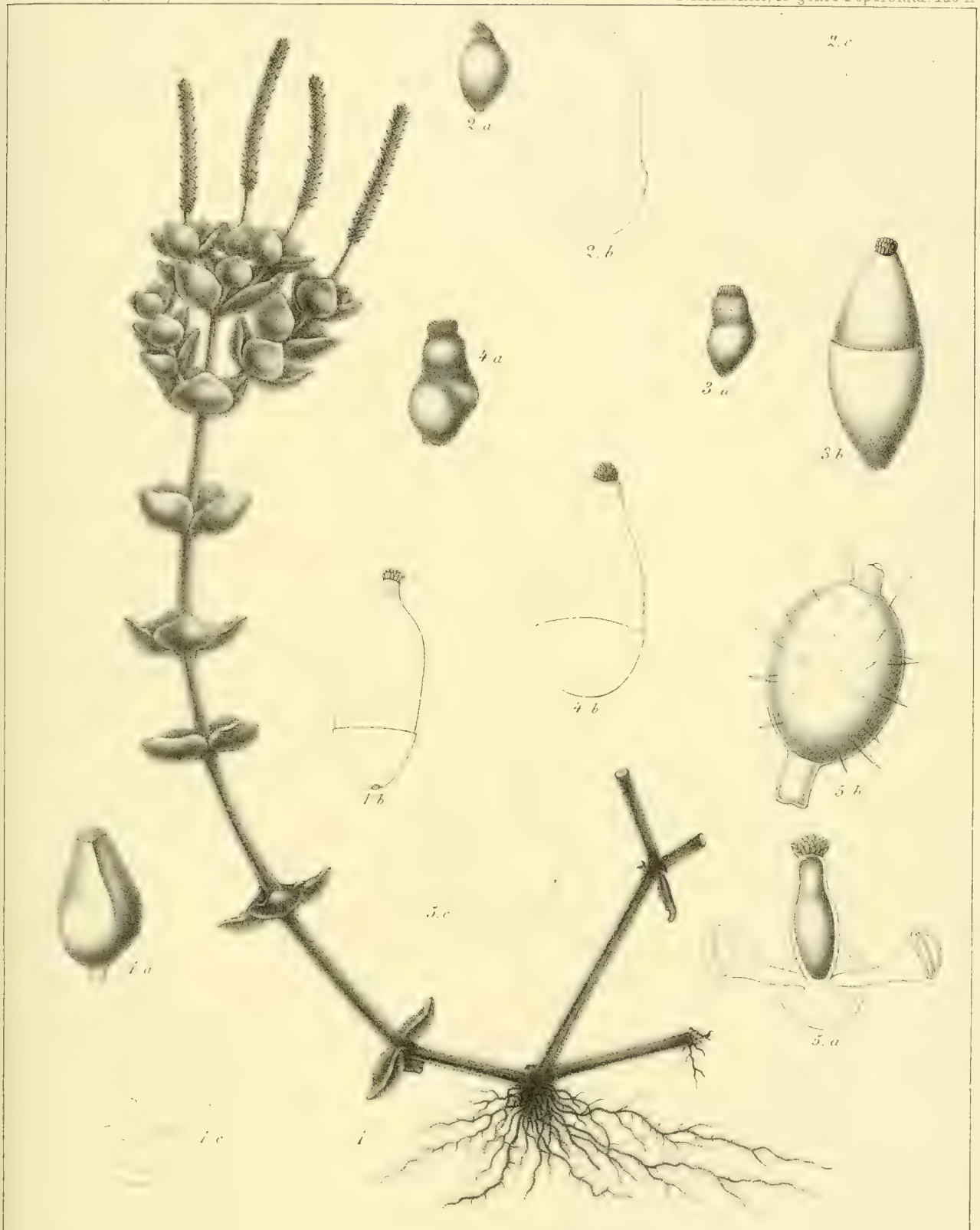
p. 2 lin. 10 pro *Geracs* lege *Geraes*
„ 3 „ 23 „ „ „ „
„ „ „ 30 „ „ „ „
„ 5 „ 25 „ *nervure* „ *nervation*
„ 8 „ 34 ante *La forme* adde 2).



S. Henschen n. p. del.

Lith. o tr. h. Schlachter & Seedorff, Stockh.

1. Peperomia reflexa. 2. P. nuda. 3. P. myrtifolia var. Caldasiana. 4. P. delicatula
5. P. circularis. 6. P. emarginella. 7. P. Sellowiana.



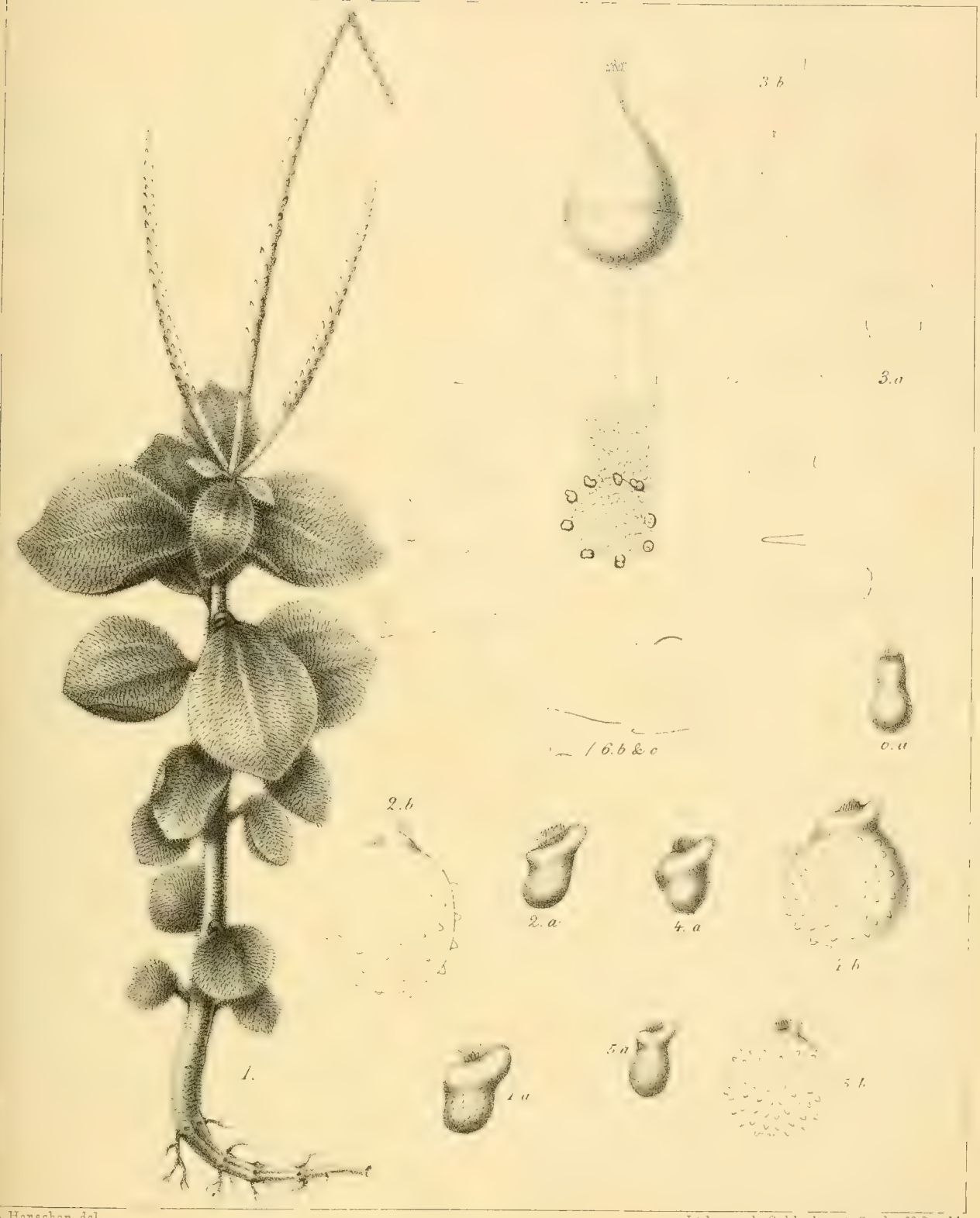
S. Henschen p.p. del. Lith. o. tr. h. Schlachter & Seederff, Stockh

1. P. Oreophila. 2. P. reflexa. 3. P. rhombea.
4. P. trineura. 5. P. tenera.

S.Henschen del.

Lith o. tr. h. Schlachter & Seedorff. Stockh

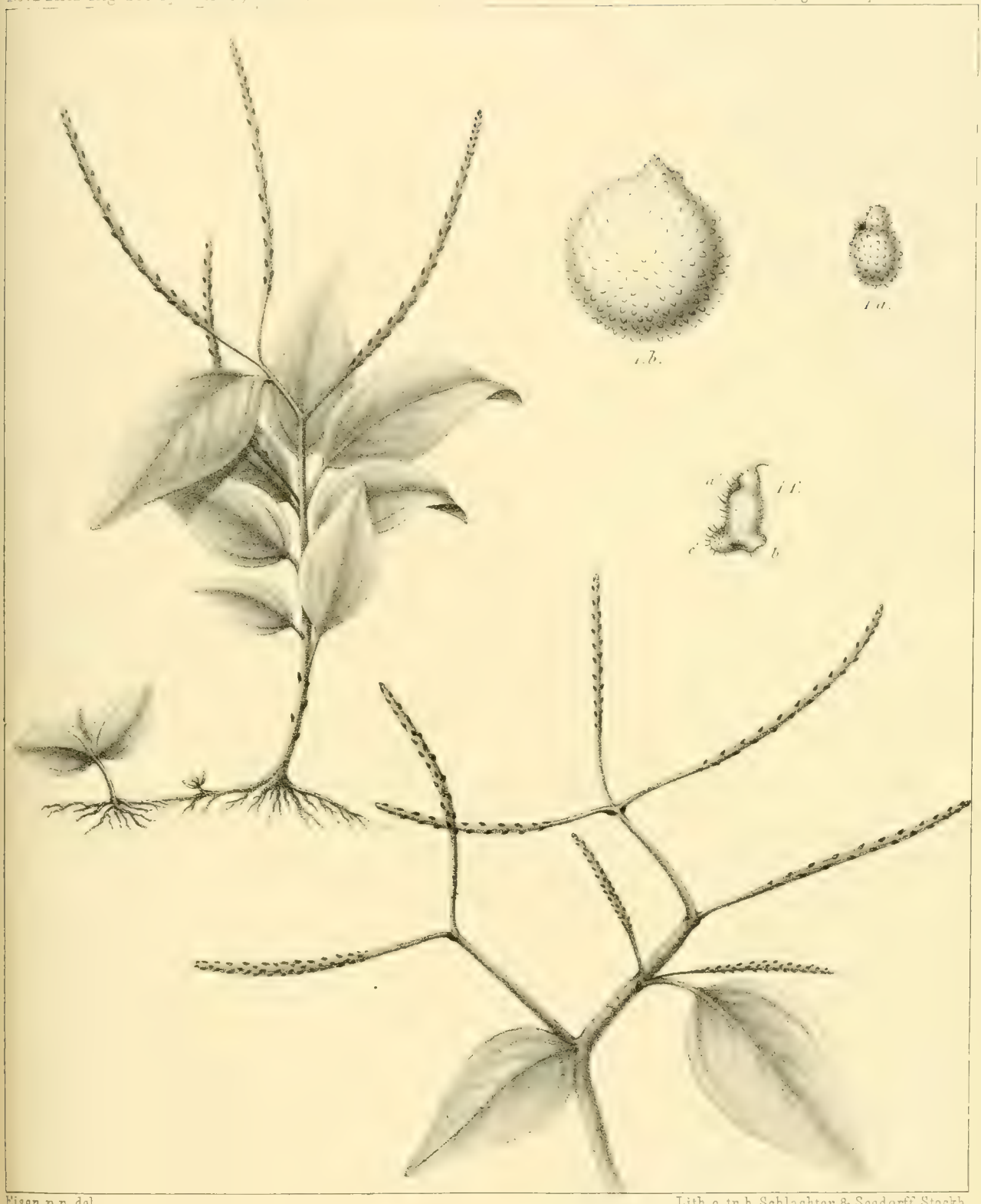
1. P. Minensis. 2. P. Campinasana. 3. P. Loxensis.



S. Henschen del.

Lith. o. tr. h. Schlachter & Seedorff, Stockh.

1. P. increscens. 2. P. blanda var. Langsdorffii. 3. P. galioides. 4. P. augescens.
5. P. alata. 6. P. quadrifolia.



Eisen. p.p. del. Lith. o. tr. h. Schlachter & Seedorff, Stockh.

P. diaphana.

1a

1b.

1d

1c

P. nuda.

Lith. o. tr. h. Schlachter & Seedorff, Stockh.

S. Henschen del.

Lith. o. tr. h. Schlachter & Seedorff, Stockh.

1. P. Martiana. 2. P. nummularifolia. 3. P. major.

TRAITÉ

DE

CALCUL GÉOMÉTRIQUE SUPÉRIEUR.

PAR

GÖRAN DILLNER.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 19 Avril 1873.)

PREMIÈRE PARTIE.

UPSAL,
ED. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1873.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pag.
	Préface	1.
I.	Notions préliminaires	1.
II.	Dérivée et primitive d'une fonction complexe	4.
III.	Intégrale définie d'une fonction complexe	7.
IV.	Théorème fondamental de CAUCHY	13.
V.	Calcul des intégrales circulaires	21.
VI.	Calcul des intégrales linéaires	27.
VII.	La série de TAYLOR et quelques autres séries	31.
VIII.	Fonctions périodiques	40.
IX.	Champ de synecticité de la limite supérieure de l'intégration	48.
X.	Reproductivité des fonctions complexes	55.
XI.	La fonction exponentielle et son inverse	64.
XII.	Les fonctions Sinus et Cosinus et leurs inverses	69.
XIII.	Les fonctions Tangente et Cotangente et leurs inverses	77.
XIV.	Les fonctions $T(u)$ et $\mathfrak{T}(u)$ et leurs inverses	81.
XV.	Les fonctions $V(u)$ et $\mathfrak{V}(u)$ et leurs inverses	86.
XVI.	Les fonctions $W(u)$, $\mathfrak{W}(u)$ et $W_1(u)$ et leurs inverses	94.
XVII.	Les fonctions keplériennes	102.
XVIII.	Les fonctions elliptiques	119.

PRÉFACE.

Le présent travail a pour objet *l'application du Calcul infinitésimal aux quantités géométriques*, et doit être considéré comme une suite de mes articles sur le Calcul géométrique, publiés dans *l'Annuaire de la Société des Sciences d'Upsal*[1] et dans le *Journal de Mathématiques et de Physique*[2], lesquels sont fondés sur le principe établi par ARGAND et CAUCHY. À la place du Calcul des quantités imaginaires, calcul peu satisfaisant à beaucoup d'égards, on peut déduire des conception propres de la géométrie un Calcul indépendant de tout fondement hypothétique, auquel j'ai donné le nom de *Calcul géométrique*. Le sujet que j'ai traité dans ce travail peut être considéré comme ayant pour base le théorème fondamental indiqué par POISSON, développé et approfondi par CAUCHY, concernant les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Bien que après CAUCHY, plusieurs géomètres éminents, LIOUVILLE, PUISEUX, HERMITE et autres, aient consacré leur attention aux conséquences prodigieuses qui découlent de ce théorème fondamental, il semble toutefois que ce sujet, d'une richesse inépuisable, se trouve encore dans la première période de son développement. MM. BRIOT et BOUQUET[3] ont rassemblé les conséquences déduites de ce théorème fondamental par CAUCHY et d'autres géomètres, en vue de construire une théorie des fonctions doublement périodiques, et en particulier des transcendantes elliptiques. Leur travail, d'une haute valeur à plusieurs égards, ne doit pas cependant être accepté sans précaution, comme n'étant pas en tout point correct [ce que aussi CLEBSCH a remarqué]. Un ouvrage remarquable au point de vue de la simplicité de la forme et de la clarté de l'exposition, et qui m'a été d'un grand secours dans mes études sur cette matière, c'est la *Théorie élémentaire des Quantités complexes* de J. HOÜEL, 2ᵉ Partie[4].

---

(1) Upsala Vetenskaps Societets Årsskrift, 1861.

(2) Tidskrift för matematik och fysik, 1868—1870.

(3) Théorie des fonctions doublement périodiques, 1859.

(4) Un abrégé en a été donné par l'AUTEUR dans la 2ᵉ partie de son *Cours de Calcul infinitésimal*, *Appendice*.

Dans cette première Partie de mon travail, j'ai cherché à établir, comme préliminaire, la conception de synecticité, un peu modifiée pour être applicable, d'une manière plus commode, à l'étude des fonctions complexes. Depuis, j'ai exposé la signification géométrique de la dérivée et de la primitive, de la différentielle et de l'intégrale définie d'une fonction complexe, après quoi j'ai démontré le théorème fondamental de CAUCHY, avec autant de clarté qu'il m'a été possible. Comme conséquences immédiates de ce théorème, j'ai étudié les intégrales que j'appelle *circulaires* et *linéaires*, dont les premières remplacent d'une manière simple et naturelle les *residus* de CAUCHY, tandis que les dernières rendent superflu la manière de voir assez artificielle, qui est fondée sur les "surfaces de RIEMANN". Comme conséquence ultérieure du théorème fondamental de CAUCHY, j'ai traité la théorie des séries dans le cas où le cercle de convergence limite le champ de synecticité, ce qui ma conduit à une nouvelle série, d'une très-grande généralité, qui comprend comme cas particulier celle de TAYLOR, et qui se prête à un grand nombre d'applications. Ensuite, j'ai cherché à établir une base aussi générale que possible pour les fonctions périodiques, l'exposition de cette théorie étant notablement simplifiée par l'introduction d'un nouveau terme, celui de *périodoïde*. De plus, j'ai exposé une théorie du champ de synecticité de la limite supérieure de l'intégration, qui est d'une grande importance dans l'étude des fonctions périodiques. Enfin, comme l'application d'une conception nouvelle, appelée *reproductivité* des fonctions, j'ai obtenu une généralisation du célèbre *théorème d'addition* d'ABEL, généralisation qui ouvre un nouveau champ d'une immense étendue pour l'étude de nouveaux types de fonctions périodiques. Vient ensuite, comme application pratique de toutes les théories précédentes, le développement de quelques fonctions périodiques, sans paramètre ou à un seul paramètre, éclairci par des constructions géométriques, autant que j'en ai pu trouver.

Je livre maintenant mon travail à l'indulgente appréciation des géomètres, convaincu que ce qui a été fait auparavant et aujourd'hui dans cette branche des Mathématiques n'est qu'un premier commencement d'une nouvelle et vaste théorie, dont l'achèvement réclame les efforts de beaucoup de travailleurs et, peut-être, beaucoup de siècles.

I. NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe z ou, plus brièvement, une *fonction complexe* $f(z)$ est dite *continue* au point a, lorsque la différence

$$f(a+h)-f(a)$$

est une *quantité infiniment petite de même ordre* pour tout point pris le long d'un contour infiniment petit, décrit par h autour de a. En tout autre cas, la fonction est dite *discontinue*.

On tire immédiatement de cette définition le criterium connu, quoique parfois insuffisant, de la continuité,

$$\lim \{f(a+h)-f(a)\} = 0\,,$$

pour une valeur quelconque de l'argument $\widehat{h}$ quand le module $\overline{h} = 0$ *).

Ainsi, par exemple, la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z-a}}$ est *discontinue* au point a, parceque la différence $f(a+h)-f(a) = e^{\frac{1}{h}} - e^{\frac{1}{0}}$ peut recevoir, pour certains points du contour infiniment petit h **), des valeurs différentes de 0. Pour la fonction $f(z) = \dfrac{(z-a)^n}{1+e^{\frac{1}{z-a}}}$ la différence $f(a+h)-f(a)$ est, au contraire, infiniment petite pour tous les point du contour h; mais, comme

*) Au lieu de représenter le *module* et *l'argument* par $\operatorname{mod} h$ et $\arg h$ nous les désignerons par $\overline{h}$ et $\widehat{h}$, quand la quantité complexe sera, comme ici, représentée par une seule lettre.

**) Nous dirons, pour abréger: le contour h, au lieu de: le contour décrit par h.

elle n'est pas un infiniment petit *de même ordre* pour tous ces points, la fonction $f(z)$ doit être considérée comme *discontinue* au point a.

2. Une fonction complexe $f(z)$ est dite *œcodrome* *) au point a, lorsque $f(a+h)$ reprend sa valeur première quand h, en accomplissant une révolution entière, a décrit un contour infiniment petit autour de a. Nous avons donc pour le criterium *d'œcodromie* d'une fonction $f(z)$ au point a, en faisant $h = \varrho_\omega$, la formule

$$f(a+\varrho_{\omega+2\pi}) = f(a+\varrho_\omega).$$

Chaque point où ce criterium n'est pas satisfait est dit *point d'embranchement*, puisque la fonction $f(z)$, en faisant passer z un tel point, commence à se ramifier en branches distinctes, suivant que z ne fait que passer infiniment près de ce point, ou qu'il en fait une ou plusieurs fois le tour. Par exemple, la fonction $f(z) = (z-a)^{\frac{1}{n}} = (\varrho_\omega)^{\frac{1}{n}}$ commence au point a à décrire n branches distinctes, de sorte que l'on obtiendra la première, la seconde, etc., jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ branche, suivant que z passera infiniment près du point a, ou qu'il en fera une, deux, ..., n—1 fois le tour. De même, la fonction $f(z) = \log(z-a) = \log \varrho_\omega$ commence au point a à décrire des branches distinctes, en nombre quelconque, puisque cette fonction, en passant par le point a, prendra des valeurs différentes, selon qu'on passera simplement à une distance infiniment petite de ce point, ou qu'on en fera le tour une ou plusieurs fois.

3. Si une fonction complexe continue $f(z)$ est œcodrome en tout point de l'aire d'un contour fermé P, elle est aussi œcodrome le long du contour lui-même, c'est-à-dire qu'elle reprend sa valeur première, lorsque z, en décrivant le contour P, revient à son point de départ.

La vérité de cet énoncé s'apercoit immédiatement, si l'on imagine que l'aire renfermée dans P soit partagée en ses éléments infiment petits et que le contour de chaque élément soit parcouru successivement par z; alors la fonction $f(z)$ doit décrire un réseau continu d'éléments infiniment petits correspondants. En considérent la suite continue des lignes infiniment petites extérieures qui forment le contour P, à ces lignes doit correspondre une

*) Au lieu du mot *monodrome*, employé par Cauchy, nous employons le terme plus descriptif *œcodrome* [de *οἶκος*, domicille, et *δρόμος*, cours], surtout parceque le mot *monodrome* a acquis une signification un peu différente de celle que nous voulons désigner. [Voyez Briot et Bouquet, Fonction doublement périodiques, pag. 3].

suite continue de lignes infiniment petites extérieures, décrites par $f(z)$, lesquelles forment, par conséquent, le contour fermé correspondant de la fonction $f(z)$.

Remarque. La réciproque de cet énoncé n'est pas toujours vraie; car, une fonction $f(z)$ peut être œcodrome le long d'un contour fermé sans qu'elle le soit nécessairement en tout point de l'aire du contour. Par exemple, la fonction $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ est œcodrome le long d'un contour qui renferme les points $+1$ et -1, quoique ceux-ci soient des points d'embranchement de la fonction. Au contraire, si une fonction n'est pas œcodrome le long d'un conteur fermé, nous pouvons en conclure qu'il y a un ou plusieurs points d'embranchement au dedans du contour.

4. Une fonction complexe $f(z)$ qui, dans toute l'étendue du plan, n'a pas de point d'embranchement, est une fonction *uniforme;* en tout autre cas, la fonction est généralement *multiforme.* Néanmoins, une fonction multiforme en général a tous les caractères d'une fonction uniforme dans chaque région du plan qui ne renferme aucun point d'embranchement; car, en partant d'une certaine *valeur primitive* de la fonction, elle ne fournira, comme le ferait une fonction œcodrome, en tout point de cette région qu'une *seule* valeur pour chaque valeur de z. Ainsi, la fonction $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ a tous les caractères d'une fonction uniforme dans chaque région du plan qui ne renferme pas le point d'embranchement a; car, si on la fait partir d'une certaine valeur première, la fonction ne fournira dans cette région qu'une seule valeur pour chaque valeur de z.

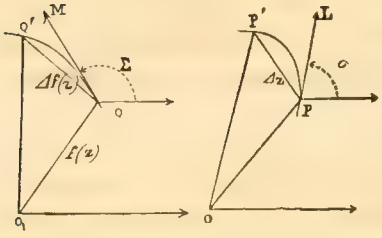
5. Une fonction complexe qui en un point donné jouit des propriétés d'être *continue*, *œcodrome* et *finie* est dite *synectique en ce point.* Une fonction complexe est, en outre, dite *synectique le long d'une ligne* ou *d'un contour*, si elle est synectique en tous les points de la ligne ou du contour. Enfin, une fonction complexe est dite *synectique pour une aire*, si elle est synectique en tous les points de l'aire et du contour enveloppant. Une telle ligne ou aire est dite *ligne* ou *aire de synecticité* de la fonction. L'aire est aussi dite *champ* ou *région de synecticité.*

Les points où une fonction complexe cesse d'être synectique sont dits *points critiques.* Dès que la fonction cesse en ces points d'être *continue*, *œcodrome* ou *finie* elle est dite *discontinue*, *anœcodrome ou infinie*, et les points mêmes sont dits *points de discontinuité*, *d'anœcodromie* et *d'infini.*

II. DÉRIVÉE ET PRIMITIVE D'UNE FONCTION COMPLEXE.

6. Soit $f(z)$ une fonction complexe et décrivons avec $z = OP$ [fig. 1] un contour PP' pour tous les points duquel $f(z)$ est synectique; alors la fonction $f(z) = O_1Q$ doit décrire un contour correspondant QQ'. En posant $OP' = z + h$ et par suite $O_1Q' = f(z+h)$, la derivée $f'(z)$ en un point P est définie comme $\lim \frac{QQ'}{PP'}$ pour $\lim PP' = 0$ ou, en faisant $QQ' = \Delta f(z)$ et $PP' = h = \Delta z$:

Fig. 1.



$$\lim \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

c'est-à-dire, les différentielles dS et ds désignant les modules des éléments de contours en des points correspondants Q et P, et les quantités Σ et σ leurs arguments:

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{(dS)_\Sigma}{(ds)_\sigma} = \left(\frac{dS}{ds}\right)_{\Sigma-\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

d'où il suit *que la dérivée d'une fonction complexe est égale, quant au module, au quotient des "elements d'arcs" de la fonction et de la variable indépendante à des points correspondants, et, quant à l'argument, à la différence des arguments de ces éléments.*

Remarque 1. En désignant par T et t les longueurs des tangents QM et PL et faisant celles-là proportionelles aux éléments d'arcs ou $T:t = dS:ds$; on tire de la formule (2):

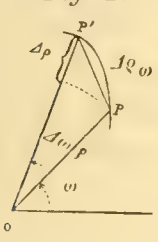
$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{T_\Sigma}{t_\sigma};$$

donc, les *différentielles* des quantités complexes doivent être considérées comme coïncidant, tant en grandeur qu'en direction, avec des portions arbitraires des tangents qui sont proportionelles aux éléments d'arcs. Nous pouvons, du reste, considérer, si nous voulons, ces portions des tangents comme "infiniment petites", c'est-à-dire, comme coïncidant avec les éléments des contours.

Remarque 2. Il faut observer que le criterium de continuité d'une fonction $f(z)$ donné au n° 1 est nécessairement satisfait, dès que $\lim \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ ou $f'(z)$ est une quantité *finie* pour toute valeur de $\widehat{h}$ quand $\lim \bar{h} = 0$. Pourtant il ne s'ensuis pas de là que la continuité d'une fonction soit en général bornée au cas où sa dérivée est finie. Comme nous le verrons, la continuité dont nous ferons usage dans cette théorie sera exclusivement fondée sur l'hypothèse d'une dérivée finie; c'est pourquoi, en parlent désormais de la continuité d'une fonction, nous entendrons qu'elle est assujettie à cette restriction.

7. La signification de la différentielle $d\varrho_\omega$ d'une quantité complexe ϱ_ω se trouve de la manière suivante. Faisons décrire à ϱ_ω un contour PP', ϱ étant le rayon vecteur et ω l'angle polaire [fig. 2], et représentons, d'après le n° précédent, la corde PP' par $\Delta\varrho_\omega$; alors

Fig 2.



$$\Delta\varrho_\omega = (\varrho+\Delta\varrho)_{\omega+\Delta\omega} - \varrho_\omega .$$

En ajoutant, membre à membre, l'egalité $0 = (\varrho+\Delta\varrho)_\omega - (\varrho+\varrho)_\omega$, et observant que

$$1_{\Delta\omega} - 1 = i\Delta\omega . \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\Delta\omega}{\frac{1}{2}\Delta\omega} . 1_{\frac{1}{2}\Delta\omega} ,$$

où $i = 1_{\frac{1}{2}\pi}$, on trouvera, à la limite, en divisant par une quantite évanouissante Δu et en posant $ds = \sqrt{(d\varrho)^2 + (\varrho\, d\omega)^2}$, la formule suivante:

$$\frac{d\varrho_\omega}{du} = \left\{\frac{d\varrho}{du} + i\frac{\varrho\, d\omega}{du}\right\}_\omega = \left(\frac{ds}{du}\right)_{\operatorname{arctg}\frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho}+\omega} ,$$

ou, si l'on introduit les differentielles,

$$d\varrho_\omega = (d\varrho + i\varrho\, d\omega)_\omega = (ds)_{\operatorname{arctg}\frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho}+\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

En posant $\varrho_\omega = \xi + i\eta$, on trouvera d'une manière toute sembable la formule suivante:

$$d\varrho_\omega = d\xi + i d\eta = (ds)_{\operatorname{arctg}\frac{d\eta}{d\xi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Remarque. La formule (3) se trouvera immédiatement, si au lieu de la quantité géométrique ϱ_ω nous faisons usage de l'expressiom symbolique $\varrho.e^{i\omega}$, en y appliquant les lois ordinaires des différentielles.

8. Puisque les lois connues de dérivation sont démontrées subsister aussi pour les fonctions complexes, nous aurons, en posant $z=\xi+i\eta$, les égalités suivantes

$$f'_\xi(\xi+i\eta)=f'(z) \quad \text{et} \quad f'_\eta(\xi+i\eta)=f'(z).i,$$

d'où

$$if'_\xi(\xi+i\eta)=f'_\eta(\xi+i\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

De là on tire les resultats suivants:

1° En posant $f(z)=X+iY$, où X et Y sont des fonctions de ξ et de η, nous aurous

$$i\{X'_\xi+iY'_\xi\}=X'_\eta+iY'_\eta,$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} X'_\xi &= Y'_\eta \\ Y'_\xi &= -X'_\eta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

2° Puisque $dz=d\xi+id\eta$ et $df(z)=f'_\xi d\xi+f'_\eta d\eta$, nous aurons

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\frac{f'_\xi+f'_\eta\cdot\dfrac{d\eta}{d\xi}}{1+i\dfrac{d\eta}{d\xi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

d'où il suit, en substituant $f'_\eta=if'_\xi$ et chassant le facteur commun $1+i\dfrac{d\eta}{d\xi}$, que *la dérivée* $f'(z)$ *est la même pour une direction quelconque de l'élément du contour* PP' *au point* P [fig. 1].

Remarque. La propriété des fonctions complexes qui est exprimée dans la formule (7), savoir, que la derivée est indépendante du quotient $\dfrac{d\eta}{d\xi}$ ou de la direction de l'élément du contour au point P [fig. 1], est définie par Cauchy comme le caractère d'une fonction "monogène". Puisque cette propriété appartient à toute fonction *vraiment* complexe, nous jugeons, avec Riemann et Hoüel, ce terme superflu, comme n'exprimant que ce qui est déjà exprimé par le mot complexe [Voyez Traité élémentaire des quan-

tités complexes, par J. Hoüel, pag. 70, et Cours de Calcul infinitésimal, par le même auteur, II part., pag. 277].

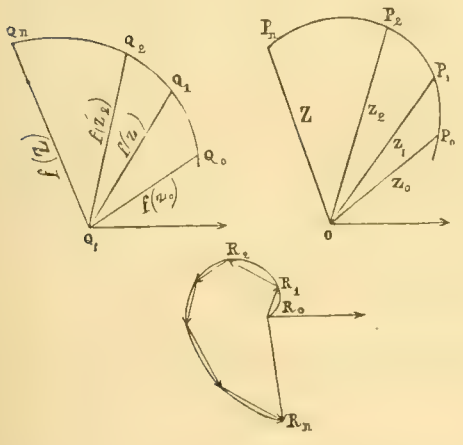
On reconnaît que les régles établies pour l'évaluation des expressions de formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $0.\infty$, etc., dans le cas des fonctions réelles, subsistent aussi pour les fonctions complexes; c'est pourquoi nous laissons de côté l'exposition de ces règles.

10. De la signification de la dérivée qui est donné par la formule (2) il suit immédiatement qu'une fonction primitive uniforme $f(z)$ a une dérivée uniforme $f'(z)$. Mais, au contraire, à une dérivée donnée $\varphi(z) = f'(z)$ répond un nombre illimité de fonctions primitives comme $f(z)$, $f(z)+c$ [c étant une constante], qui sont continues [n° 6, remarque] et ont leurs contours égaux et parallèles. L'existance d'une fonction primitive de chaque fonction donnée comme dérivée est par cela même démontrée géométriquement.

III. INTÉGRALE DÉFINIE D'UNE FONCTION COMPLEXE.

11. Faisons décrire à z un contour $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ [fig. 3], en tous les points duquel la fonction $f(z)$ soit synectique; posons ensuite $z_0 = OP$, $z_1 = OP_1$, $z_2 = OP_2$, ..., $z_n = Z_n = OP_n$, et les cordes

Fig. 3.



$$\left.\begin{aligned} P_0P_1 &= z_1 - z_0 = h_1 \\ P_1P_2 &= z_2 - z_1 = h_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n-1}P_n &= Z - z_{n-1} = h_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8),$$

et désignons par $Q_0Q_1Q_2 \ldots Q_n$ le contour correspondant décrit par $f(z)$, où $f(z_0) = O_1Q_0$, $f(z_1) = O_1Q_1$, $f(z_2) = O_1Q_2$, $\ldots f(Z) = O_1Q_n$, la série

$$h_1 f(z_0) + h_2 f(z_1) + \ldots h_n f(z_{n-1}) = \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) \ldots (9),$$

pour $\lim n = \infty$, c'est-à-dire, pour les cordes h_1, h_2, $\ldots$ h_n infiniment

petites, constitue ce que l'on entend par *l'intégrale définie de la fonction* $f(z)$ *entre les limites* z_0 *et* Z, représentée par la notation

$$\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Nous dirons alors que *nous avons intégré la fonction* $f(z)$ *le long du contour* z *ou* $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ *depuis* z_0 *jusqu'à* Z.

Une intégrale définie d'une fonction complexe doit donc être considérée comme un polygone $R_0R_1R_2 \ldots R_n$ dont les côtés sont respectivement les termes de la série (9) et qui, à la limite, se transforme en un contour courbé que nous appellons *contour de l'intégrale.* La corde R_0R_n est comme *chemin* égale au polygone $R_0R_1R_2 \ldots R_n$ aussi à la limite, d'où il s'ensuit que *la signification d'une intégrale définie est de représenter la corde qui joint le point initial au point final du contour de l'intégrale.*

12. Des notions données au n° précédent il découle que les formules connues suivantes subsistent aussi pour les intégrales des fonctions complexes.

1° La quantité ζ représentant un point du contour P entre les limites z_0 et Z, on aura la formule

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{\zeta} f(z)\,dz + \int_{\zeta}^{Z} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

2° En intégrant depuis Z jusqu'à z_0, c'est-à-dire, en sommant la série (9) dans l'ordre inverse, après avoir changé h_1, h_2 etc. en $-h_1$, $-h_2$ etc., on aura

$$\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

13. Le module de la série (9) étant moindre que la somme des modules des termes, ou

$$\operatorname{mod} \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) < \sum_{r=1}^{r=n} \bar{h}_r \,.\, \operatorname{mod} f(z_{r-1}),$$

il s'ensuit a fortiori, M désignant le plus grand module de $f(z)$ entre les limites z_0 et Z, que

$$\operatorname{mod} \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) < M \,.\, \sum_{r=1}^{r=n} \bar{h}_r,$$

ou, qui est la même chose, quand $s = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \ldots \bar{h}_n$, c'est-à-dire, s = la longueur absolue du contour $P_0P_1P_2 \ldots P_n$,

$$\text{mod} \int_{z_0}^{Z} f(z)dz < Ms \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

On aura donc cet énoncé: *le module de l'intégrale définie d'une fonction synectique*) est moindre que la longueur du contour, entre les limites de l'intégrale, multiplié par le plus grand module que peut recevoir la fonction entre ces limites.*

14. Si $F(z)$ est la fonction primitive de $f(z)$, ou $f(z) = F'(z)$, on aura, d'après les formules (1) et (8), les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} F(z_1) - F(z_0) &= h_1\{f(z_0) + \varepsilon_1\}, \\ F(z_2) - F(z_1) &= h_2\{f(z_1) + \varepsilon_2\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(Z) - F(z_{n-1}) &= h_n\{f(z_{n-1}) + \varepsilon_n\}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont des quantités complexes dont les modules s'annulent à la $\lim n = \infty$. En ajoutant ces égalités on aura

$$F(Z) - F(z_0) = \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) + \sum_{r=1}^{r=n} h_r \varepsilon_r .$$

Si m est le plus grand module qu'aucune des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ puisse avoir, il s'ensuit d'après la formule (13), s désignant la longueur du contour entre les limites z_0 et Z, que $\text{mod} \sum_{r=1}^{r=n} h_r \varepsilon_r < ms$ pour $\lim n = \infty$, et par conséquent, puisque m s'évanouit à la limite:

$$F(Z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

d'où résulte cet énoncé: *$F(z)$ étant la primitive de la fonction $f(z)$, l'intégrale définie de $f(z)$ entre les limites z_0 et Z est la différence des valeurs de la primitive pour les substitutions Z et z_0.*

Remarque 1. D'après cela, la sommation des séries complexes de la forme (9) est toujours possible, dès que l'on connaît la primitive $F(z)$

---

*) En parlant de l'intégrale d'une fonction *synectique*, nous entendons que la fonction soit soumise à la condition d'être synectique en tout point du contour le long duquel l'intégration est effectuée.

de la fonction donnée $f(z)$ comme dérivée. Puisque, d'après le n° 11, la différence $F(Z)-F(z_0)$ représente la corde qui joint les extrémités du contour de l'intégrale, la fonction primitive $F(z)$ doit elle-même représenter le contour de l'intégrale.

Remarque 2. Les règles connues pour trouver les primitives des fonctions "réelles" données comme dérivées, peuvent s'étendre, d'après les méthodes ordinaires, aux fonctions complexes; c'est pourquoi, dans ce qui va suivre, nous ferons usage de ces règles, comme étant démontrées pour ces fonctions.

Remarque 3. Si la primitive $F(z)$ est une fonction *uniforme* connue, l'énoncé (14) dit que la valeur de l'intégrale définie ne dépend que des limites Z et z_0, et, par suite, est indépendante du chemin le long duquel l'intégration est effectuée de z_0 à Z; d'où il s'ensuit, entre autres choses, que l'intégrale, prise le long d'un contour fermé, représente elle-même un contour fermé. Ainsi, par exemple, nous concluons que l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} z^n\,dz$ [$n =$ un nombre entier quelconque autre que -1], prise le long d'un contour fermé, représente elle-même un contour fermé, puisque la primitive $\frac{1}{n+1}\cdot z^{n+1}$ est uniforme et par suite $\frac{1}{n+1}\cdot Z^{n+1}-\frac{1}{n+1}\cdot z_0^{n+1}=0$ pour $Z=z_0$.

15. La primitive $F(z)$ d'une dérivée synectique donnée $f(z)=F'(z)$ étant continue [n° 6, *rem.*] et finie [(13), (14)], et, de plus, représentant des contours égaux et parallèles [n° 10], nous aurons les formules connues suivantes, qui subsistent aussi pour les intégrales définies des fonctions complexes.

1° En différentiant par rapport à la limite *supérieure* de l'intégrale, on aura [(14)], l'existence de la fonction primitive étant géométriquement constatée [n° 10]:

$$\Delta\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz=\int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(z)\,dz=F(Z+\Delta Z)-F(Z)\,,$$

et par suite, à la limite,

$$\frac{d\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz}{dz}=f(Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

2° De même on trouvera, en différentiant par rapport à la limite *inférieure* de l'integrale,

$$\frac{d\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz}{dz_0} = -f(z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

3° En différentiant, de plus, par rapport à une *quantité t, qui est indépendante de z*, on aura d'après la méthode donnée pour des fonctions "réelles":

$$\frac{d\int_{z_0}^{Z} f(z,\,t)\,dz}{dt} = \int_{z_0}^{Z} \left\{\frac{df(z,\,t)}{dt}\right\} dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

16. Si l'on fait décrire à z un contour fermé P $[z_0 = Z]$, la fonction $f(z)$, étant synectique, décrira aussi un contour fermé; mais le contour de l'intégrale, au contraire, doit donc être ou *fermé* ou *ouvert*, d'où proviendra cette classification importante des intégrales définies:

1° *Le contour de l'intégrale étant fermé.*

Dans ce cas, chaque fois que z décrit de nouveau son contour fermé P, le contour de l'intégrale correspondant, en vertu de la formule (9), coïncidera en tout point avec le contour premiérement décrit, d'où l'on aura, quelque nombre de fois que z ait décrit son contour P,

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = 0.$$

On en pourra donc conclure que, en fixant z en un point quelconque du contour P comme limite supérieure, et en désignant par $F(z)$ la primitive de la fonction $f(z)$ [(14)], l'intégrale définie

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

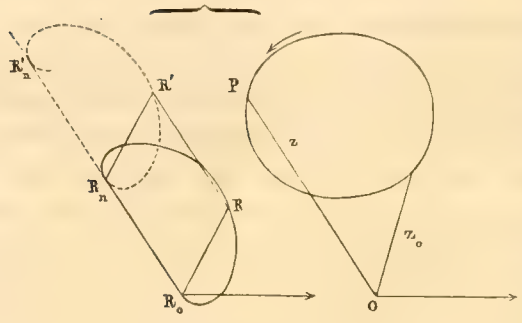
sera une fonction *uniforme* et par conséquent *synectique* [n° 15] de sa limite supérieure, cette limite étant prise en un point quelconque du contour P. On aura donc cet énoncé:

Si l'intégrale définie d'une fonction synectique, prise le long d'un contour fermé, est nulle, cette intégrale, prise depuis une limite inférieure donnée jusqu'à une limite supérieure variable sur le contour, sera une fonction synectique de cette limite pour un point quelconque du contour.

2° *Le contour de l'intégrale étant ouvert.*

En ce cas, si l'on suppose que R_0RR_n [fig. 4] représente le contour ouvert que décrit l'intégrale, tandis que z décrit son contour fermé P, cette intégrale décrira d'après la formule (9), quand z décrit de nouveau son contour P, un contour égal et parallèle $R_nR'R'_n$ qui a son point de départ au point extrême du contour précédent etc., tout en supposant que $f(z)$ soit œcodrome le long du contour P. La même chose arrivera, si l'on intègre en sens opposé, c'est-à-dire, si l'on somme la série (9) dans l'ordre inverse, après avoir changé h_1, h_2 etc. en $-h_1$, $-h_2$ etc. D'après cela, en désignant par Ω la corde R_0R_n et par $\varkappa$ un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on aura

Fig. 4.



$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \varkappa\Omega\,,$$

où $\varkappa$ montre par sa grandeur, combien de fois z a décrit son contour fermé, et par son signe, dans quel sens le contour est décrit.

De là on conclura ainsi que, en fixant z en un point quelconque du contour d'intégration comme la limite supérieure, R étant le point correspondant du contour de l'intégrale et R_0R la valeur même de l'intégrale, prise depuis z_0 jusqu'à z, la valeur *générale* u de cette intégrale sera, en posant $R_0R = F(z) - F(z_0) = u_0$ [(14)]:

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0) + \varkappa\Omega = u_0 + \varkappa\Omega \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Cette intégrale est *continue* et *finie* [n° 15] mais représente, pour $\varkappa = 0, 1, 2$ etc., des valeurs différentes, qui proviennent de ce que l'on ajoute à une certaine valeur *principale* u_0 de l'intégrale les valeurs 0, Ω, et en général $\varkappa\Omega$, quand $\Omega = R_0R_n = RR'$ etc. La quantité complexe Ω s'appelle la *période*, et la limite supérieure z, considérée comme une fonction de l'intégrale u, est *une fonction périodique*, c'est-à-dire, conserve identiquement la même valeur, quel que soit le multiple $\varkappa\Omega$ que l'on ajoute à la valeur principale u_0 de l'intégrale. On aura donc cet énoncé important:

En désignant par Ω l'intégrale définie d'une fonction synectique, prise le long d'un contour fermé, l'intégrale elle-même, prise depuis une limite infé-

rieure donnée jusqu'à une limite supérieure variable, sera une fonction continue et finie, mais multiforme, pour chaque point du contour; la limite supérieure, au contraire, sera une fonction périodique de l'intégrale, Ω étant la période.

Remarque. Nous voyons maintenant d'où provient cette classe importante des fonctions qui s'appellent périodiques; elles sont les limites supérieures des intégrales multiformes, et fonctions de celles-ci. Bien que nous n'ayons encore, par la notion déjà donnée de l'intégrale définie, aucun criterium *général* qui décide quand une intégrale définie est une fonction uniforme ou multiforme de sa limite supérieure, il y a toutefois bien de cas, où il est immédiatement possible de décider, si l'intégrale définie est de l'une ou de l'autre espèce, comme cela a lieu lorsque la valeur de l'intégrale est donnée par une primitive connue [n° 14, *rem.* 3], ou lorsque les termes de la série (9) sont determinés, quant à leurs arguments, de sorte que leur somme ne puisse d'aucune manière former un contour fermé, par exemple, les termes de la série de l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} \frac{e^z}{z} . dz$, etc. D'aprés cela, il s'ensuit comme évident qu'un criterium général, qui pourra décider quand l'intégrale d'une fonction synectique sera une fonction uniforme ou multiforme, doit être d'une importance particulière. Nous allons donc faire connaître les énoncés dont dépend ce criterium.

IV. THÉORÈME FONDAMENTAL DE CAUCHY.

17. Nous prenons pour point de départ les deux séries d'intégrale suivantes,

$$\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{r=n} k_r f(\zeta_{r-1}) .$$

Nous supposons, de plus, que les fonctions $f(z)$ et $f(\zeta)$ soient synectiques sur leurs contours respectifs, et qu'entre ζ et z existe la relation,

$$\zeta = z + \varphi(z) . \Delta u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

où Δu désigne une quantité *petite positive*, et $\varphi(z)$ une fonction *arbitraire* qui n'est déterminée que par la condition d'être synectique sur le contour de z et de s'évanouir pour les limites z_0 et Z, c'est-à-dire que l'on ait

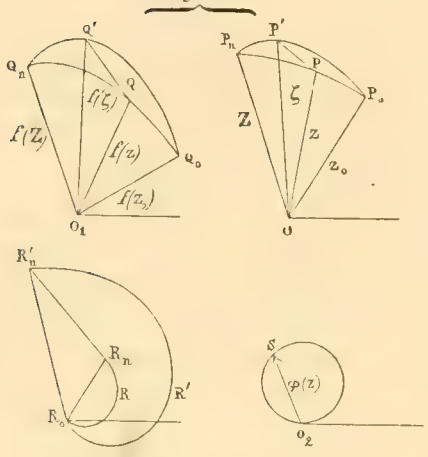
$$\varphi(z_0) = \varphi(Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ou, qui est la même chose, d'après la formule (20),

$$\zeta_0 = z_0 \quad \text{et} \quad \zeta_n = z_n = Z .$$

En supposant ensuite que $z = OP$ et $\zeta = OP'$ [fig. 5] représentent les contours respectifs $P_0 P P_n$ et $P_0 P' P_n$, les fonctions $f(z) = O_1 Q$ et $f(\zeta) = O_1 Q'$ représenteront les contours correspondants $Q_0 Q Q_n$ et $Q_0 Q' Q_n$, d'où il s'ensuit que

Fig. 5.



$$\left.\begin{aligned} PP' &= \zeta - z = \varphi(z) . \Delta u \\ QQ' &= f(\zeta) - f(z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (22).$$

On en conclura, en faisant décrire par $\varphi(z) = O_2 S$ le contour complétement arbitraire S, commençant et finissant à l'origine O_2 [(21)], que la forme de la déviation $P_0 P' P_n$ ne dépend que du contour arbitrare $\varphi(z)$ et cela de telle sorte qu'en faisant tendre Δu indéfiniment vers zéro, la déviation $P_0 P' P_n$ tendra à se confondre de tout point avec le contour $P_0 P P_n$, et, par suite, la déviation $Q_0 Q' Q_n$ tendra aussi à se confondre de tout point avec le contour $Q_0 Q Q_n$.

Enfin, en supposant que $\sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = R_0 R_n$ et $\sum_{r=1}^{r=n} k_r f(\zeta_{r-1}) = R_0 R'_n$ représentent les contours d'intégrales $R_0 R R_n$ et $R_0 R' R'_n$, correspondants aux contours $P_0 P P_n$ et $P_0 P' P_n$, et en désignant par ΔU la droite $R_n R'_n$ qui joint les extrémités R_n et R'_n des contours d'intégrales, on aura

$$\Delta U = \sum_{r=1}^{r=n} k_r f(\zeta_{r-1}) - \sum_{r=1}^{r=n} h_r f(z_{r-1}) = \sum_{r=1}^{r=n} [k_r f(\zeta_{r-1}) - h_r f(z_{r-1})] \ldots (23).$$

La quantité complexe ΔU s'appelle la *différence* de l'intégrale définie $\int_{z_0}^{Z} f(z) dz$ pour la déviation $P_0 P' P_n$ par rapport au contour $P_0 P P_n$, le long duquel l'intégrale est prise. La première question qui se pose maintenant est de déterminer la $\lim \frac{\Delta U}{\Delta u}$ pour $\lim \Delta u = 0$, c'est-à-dire, pour le cas où la déviation $P_0 P' P_n$ va se confondre de tout point avec le contour $P_0 P P_n$.

En ajoutant et retranchant le terme $k_r f(z_{r-1})$ sous le signe de sommation de la formule (23), et en faisant

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{f(\zeta_{r-1}) - f(z_{r-1})}{\zeta_{r-1} - z_{r-1}} \\ N &= \frac{\varphi(z_r) - \varphi(z_{r-1})}{h_r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24);$$

en ayant, de plus, égard à l'égalité suivante, déduite de la formule (22),

$$k_r - h_r = \zeta_r - z_r - (\zeta_{r-1} - z_{r-1}) = h_r N . \Delta u \quad \ldots \quad (25),$$

on aura

$$\frac{\Delta U}{\Delta u} = \sum_{r=1}^{r=n} h_r \{M\varphi(z_{r-1}) + Nf(z_{r-1})\} + \Delta u . \sum_{r=1}^{r=n} h_r MN\varphi(z_{r-1}) \quad \ldots . \quad (26).$$

Or, d'aprés les formules (24) et (22), on aura, pour $\lim \Delta u = 0$ [n° 8, 2°],

$$\lim M = f'(z_{r-1})$$

et, pour $\lim h_r = 0$,

$$\lim N = \varphi'(z_{r-1}) .$$

Puisque, selon l'hypothèse, la fonction arbitraire $\varphi(z)$ est synectique sur le contour de z, il s'ensuivra, en supposant les dérivées $\varphi'(z)$ et $f'(z)$ *finies* [n° 6, *rem.* 2], que la dernière somme de (26) s'annulera avec Δu [n° 13]. Par conséquent, en faisant converger en même temps h_r et Δu vers zéro, l'égalité (26) se transformera dans celle-ci:

$$\frac{dU}{du} = \int_{z_0}^{Z} \{f'(z)\varphi(z) + \varphi'(z)f(z)\}\, dz = \int_{z_0}^{Z} \{f(z) . \varphi(z)\} \quad \ldots \quad (27).$$

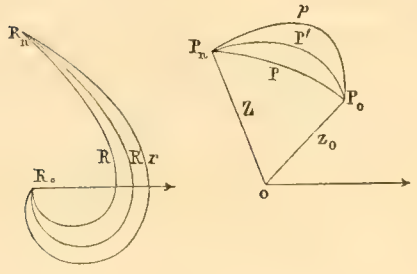
Donc, la limite cherchée est trouvée. En intégrant la formule (27) depuis 0 jusqu'a une valeur quelconque u et en observant que le produit $f(z) . \varphi(z)$ est nul quand on y substitue les limites z_0 et Z [(21)], on aura enfin,

$$U = \int_0^u \int_{z_0}^{Z} \{f(z) . \varphi(z)\} . du = 0 \quad \ldots\ldots \quad (28).$$

Cette intégration signifie que nous avons sommé un nombre infini de différences infiniment petites ΔU, qui correspondent aux déviations succes-

sives $P_0P'P_n$, s'écartant d'un contour P_0PP_n à un autre contour P_0pP_n [fig. 6]. Par la formule (28) on a donc démontré qu'en déviant le contour de z d'une manière *continue* [ce qui peut se faire d'après la condition que $\varphi(z)$ soit *synectique* et $\varphi'(z)$ *finie*] d'une position donnée P_0PP_n à une position arbitraire P_0pP_n, les deux extrémités z_0 et Z étant fixes, le contour de l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ sera aussi dévié d'une manière *continue* de la position R_0RR_n à une position R_0rR_n, correspondante à la position P_0pP_n, les deux extrémités R_0 et R_n étant aussi fixes, tout en supposant que la fonction $f(z)$ soit *synectique* et la dérivée $f'(z)$ *finie* pour tous les points de l'aire incluse entre les contours P_0PP_n et P_0pP_n et pour tous les points des contours eux-mêmes.

Fig. 6.



Nous supposerons maintenant et dans ce qui va suivre, que la continuité de la fonction $f(z)$ soit celle qui est déterminée par la condition, que la dérivée $f'(z)$ soit une quantité *finie* [n° 6, *rem. 2*]. Le *théorème fondamental* de Cauchy peut donc être énoncé de cette manière.

*En intégrant une fonction synectique $f(z)$ depuis un point z_0 jusqu'à un point Z, la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin parcouru de z_0 à Z, pourvu que $f(z)$ soit synectique pour l'aire comprise entre les chemins en question**).

---

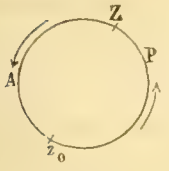
*) Voyez Fonctions doublement périodiques, par Briot et Bouquet, pag. 21. La démonstration de Cauchy, que ces auteurs ont reproduite, repose sur l'hypothèse que le Calcul des Variations avec ses règles [entre autres celle de la permutabilité d'une variation et d'une différentiation] s'applique aussi aux quantités complexes, sans que le sens de ce calcul soit établi d'aucune manière pour ces quantités. De plus, cette démonstration ne se rapporte qu'à la déviation infiniment voisine $P_0P'P_n$ par rapport au contour donné P_0PP_n, et, à cause de cela, le théorème démontré ne peut s'appliquer au cas, où la déviation s'écarte du contour donné par un espace intermédiaire fini, qui quelquefois peut se rapprocher de l'infini. La démonstration exposée par Bertrand [Calc. Intégral, pag. 295] est bornée à une variation de l'ordonnée, ce qui repond à supposer ici $\arg \varphi(z) = \pm \frac{1}{2}\pi$, supposition qui restreint d'une manière très-désavantageuse la forme de la déviation. D'ailleurs, cette démonstration se rapporte aussi à une déviation qui est infiniment voisine du contour donné. — La

Remarque. Puisque la déviation P_0PP_n, ne dépendant que de la forme arbitraire du contour auxiliaire $\varphi(z)$, peut être quelconque, pourvu qu'elle se rapproche indéfiniment de la déviation immédiatement précédente, il s'ensuit que le contour de z peut subir des changements les plus singuliers, pourvu que la fonction $f(z)$ soit synectique en tous les points du contour variable. On aura une image très-claire de ces changements pour une déviation continue, si l'on s'imagine qu'un fil, passant par deux trous fixes z_0 et Z, change de forme de toutes les manières possibles, en glissant par tous ses points dans le plan.

18. En faisant passer par les limites d'intégration z_0 et Z un contour fermé z_0PZAz_0, que nous appellerons pour abréger P, on aura, d'après le théorème precédent et à l'aide de la formule (12),

$$\int^{z_0PZ^*)} f(z)dz = \int^{z_0AZ} f(z)dz = -\int^{ZAz_0} f(z)dz .$$

Fig. 7.



Donc l'intégrale prise le long du contour P sera nulle,

$$\int^{P} (z)dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

d'où l'on aura cet énoncé important:

L'intégrale d'une fonction synectique, prise le long d'un contour fermé, audedans duquel la fonction n'a pas des points critiques, sera nulle ou, qui est la même chose, formera elle-même un contour fermé.

Remarque. En posant $z = \xi + i\eta$ et $f(z) = X + iY$ [n° 8], la formule (29) s'écrira

$$\int^{P} f(z)dz = \int^{P} (Xd\xi - Yd\eta) + i\int^{P} (Xd\eta + Yd\xi)$$

---

démonstration donnée par Malmsten [Kongl. Vet.-Akademiens Handlingar, 1866] est exempte de ces inconvénients mais elle restreint la déviation au dedans d'un rectangle [parallèle aux axes] dont le diagonale a pour extrémités les limites d'intégration, et suppose, de plus, que les projections des éléments de la déviation soient constamment ou positives ou négatives. — La démonstration de Riemann est générale et peut se formuler toute rigoureuse [Voyez Calc. Intégral par I. Bertrand, pag. 297, et Théorie élémentaire des quantités complexes, par J. Hoüel, pag. 82]. La démonstration que nous avons donnée ici est, peut être, la plus simple possible que l'on puisse établir pour un théorème aussi général que celui de Cauchy.

*) Lorsqu'on intègre le long d'un contour donné, on écrit le nom du contour à la place de la limite supérieure d'integration.

ou, qui est la même chose,

$$\int^{P}(X d\xi - Y d\eta) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int^{P}(X d\eta + Y d\xi) = 0 ,$$

où les expressions sous le signe d'intégration sont des différentielles exactes [(6)]. [Voyez la démonstration, donnée par Riemann, du théorème fondamental de Cauchy].

19. L'énoncé du n° précédent, comparé avec celui du n° 16, 1°, pourra s'exprimer de la manière suivante:

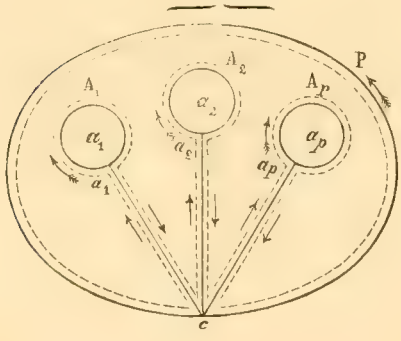
L'intégrale définie d'une fonction synectique, prise entre des limites données d'un contour fermé, à l'intérieur duquel la fonction n'a pas des points critiques, sera une fonction synectique de sa limite supérieure, pour tout point du contour.

Remarque. De cet énoncé il s'ensuivra immédiatement, qu'une intégrale définie $\int_{z_0}^{z}(z)dz$, considérée comme fonction de sa limite supérieure, aura un champ de synecticité aussi grand, au moins, que la fonction sous le signe d'intégration. On pourra donc toujours décider, sans aucune connaissance de la fonction primitive, si l'intégrale définie sera une fonction synectique de sa limite supérieure. Toutefois, il ne s'ensuit pas de là que toute intégrale définie d'une fonction, qui est synectique le long d'un contour fermé, mais non en tous les points de l'aire incluse, soit nécessairement une fonction multiforme de sa limite supérieure pour cette portion du plan. Nous trouverons dans ce qui va suivre une méthode assez décisive pour déterminer dans chaque cas, si l'intégrale d'une fonction donnée est de l'une ou de l'autre espèce.

20. On dit qu'un contour fermé *est décrit dans le sens positif* ou qu'il *est positif*, si l'on s'imagine qu'un observateur, debout sur le plan, parcoure le contour avec le point décrivant, l'aire incluse étant à sa *gauche*. On dit, dans le cas contraire, que le contour *est décrit dans le sens négatif* ou qu'il *est négatif*.

En faisant décrire à z un contour fermé positif $cPc\alpha_1 A_1 c\alpha_2 A_2 c \ldots \alpha_p A_p c$ [fig. 8], [la flèche indiquant le sens positif], et en supposant, de plus, que la fonction $f(z)$ soit synectique en tout point du contour et de l'aire incluse, l'intégrale prise le long de ce contour sera nulle [n° 18]. Mais le contour fermé $cPc\alpha_1 A_1 c\alpha_2 A_2 c \ldots \alpha_p A_p c$ se décomposera dans le contour fermé *positif* cPc et les contours fermés *né-*

Fig. 8.



gatifs $c\alpha_1 A_1 c$, $c\alpha_2 A_2 c, \ldots c\alpha_p A_p c$*). En appellant le premier de ces contours P et les autres, *pris dans le sens positif*, respectivement A_1, A_2, ... A_p, on aura, à l'aide de la formule (12), cette formule importante

$$\int^{P} f(z)dz = \sum_{r=1}^{r=p} \int^{A_r} f(z)dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Dans cette formule on suppose que chacun des contours A_1, A_2, ..., A_p n'ait aucun contact avec un autre ou avec le contour P si ce n'est au point c, et qu'ils soient par cela même tout à fait *isolés les uns des autres et du contour* P. Chacun de ces contours A_1, A_2, ... A_p se composera donc de deux parties essentiellement distinctes: 1° d'une *aire* $\alpha_1 A_1 \alpha_1$ etc., décrite dans le sens positif et comprenant un ou plusieurs points critiques, 2° d'une *ligne* de forme arbitraire joignant un point α_1 de cette aire avec un point c du contour eveloppant P. Une intégrale $\int^{A_r} f(z)dz$ se décomposera donc en deux parties: 1° en celle qui est prise le long du contour qui entoure l'aire $\alpha_r A_r \alpha_r$, et 2° en celle qui est prise le long de la ligne $c\alpha_r$ *dans le sens direct* et *dans le sens rétrograde. Cette dernière partie de l'intégrale* $\int^{A_r} f(z)dz$ *s'annuléra toutes les fois que la fonction* $f(z)$ *soit œcodrome le long du contour entourant l'aire* $\alpha_r A_r \alpha_r$ [(12)].

Remarque. La formule fondamentale (30) se déduira aussi du théorème fondamental du n° 17 d'une manière directe. En effet, en considérant les limites d'intégration et celles du contour P et du contour $A_1 + A_2 + \ldots A_p$, tous deux pris en sens positif, comme coïncidant au point c, les intégrales prises le long de l'un et l'autre de ces contours seront égales, parceque l'aire comprise entre eux ne contient aucun point critique. On observera soigneusement la supposition faite ci-dessus, que les contours partiels A_1, A_2, ... A_p ne doivent avoir aucun contact les uns avec les autres ou avec le contour entourant P, si ce n'est au point commun c, observation qui sera d'une grande importance, lorsque, comme nous le montrerons au n° suivant, les aires $\alpha_1 A_1 \alpha_1$ etc. ne comprendront l'une et l'autre qu'un seul point critique, entouré comme centre d'un cercle infiniment petit. La supposition en question signifiera donc que les points cri-

*) Par la ligne pointillée dans la fig. 8, que nous supposons tracée infiniment près de la ligne pleine, nous avons voulu montrer comment le contour fermé positif cPc et les contours fermés négatifs $c\alpha_1 A_1 c$ etc. pourront être considérés comme formant un contour fermé positif unique.

tiques dont il s'agira devront être *isolés* ou *séparés les uns des autres par des distances finies.*

21. Si l'on suppose que l'aire du contour A_r ne renferme *qu'un seul* point critique a_r et qu'elle se restreigne, autour de ce point comme centre, à un cercle infiniment petit, l'intégrale prise le long de ce cercle s'appelle *intégrale circulaire*, représentée par la notation,

$$\int^{(a_r)} f(z)\,dz\,.$$

L'intégrale prise le long de la ligne $c\alpha_r$, dans le sens direct et, après avoir parcouru la circonférence (a_r), dans le sens rétrograde $\alpha_r c$, s'appelle *intégrale linéaire;* elle est réprésentée par la notation,

$$\int^{|a_r|} f(z)\,dz\,.$$

Nous pouvons donc établir cette égalité

$$\int^{A_r} f(z)\,dz = \int^{|a_r|} f(z)\,dz + \int^{(a_r)} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

L'intégrale $\int^{A_r} f(z)\,dz$ s'appelle *intégrale critique*, qui donc est égale à la somme d'une intégrale linéaire et d'une intégrale circulaire.

Remarque 1. Si a_r représente un point critique autour duquel la fonction soit œcodrome, l'intégrale linéaire s'évanouira, d'après le n° précédent, *et l'intégrale circulaire seule sera égale à l'intégrale critique.*

Remarque 2. Si l'on veut, comme il le faudra quelquefois, distinguer l'intégrale prise le long de la ligne $c\alpha_r$ de celle qui est prise le long de la même ligne mais en sens rétrograde, on représentera ces intégrales par les notations respectives $\int^{a_r|} f(z)\,dz$ et $\int^{|a_r} f(z)\,dz$.

22. A l'aide de (31) la formule (30) pourra s'écrire:

$$\int^{P} f(z)\,dz = \sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)\,dz + \sum_{r=1}^{r=p} \int^{(a_r)} f(z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

On aura donc cet énoncé important:

L'intégrale d'une fonction synectique $f(z)$, prise le long d'un contour fermé P, qui ne renferme pas des points critiques autres que $a_1, a_2, \ldots, a_p$,

sera égale à la somme des intégrales linéaires, prises d'un point c du contour P aux points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ *des cercles infiniment petits entourant les points critiques* $a_1, a_2, \ldots a_p$, *plus la somme des intégrales circulaires autour de ces cercles infiniment petits.*

Remarque. En s'appuyant sur la formule (32) on pourra calculer la période Ω [n° 16, 2°] ou la corde $R_0 R_n$ du contour de l'intégrale, et par cela même distinguer les cas où l'intégrale entre des limites données sera une fonction ou uniforme ou multiforme de sa limite supérieure, et par suite celle-ci une fonction périodique de l'Intégrale.

23. Soit $F(z)$ la primitive de la fonction $f(z)$, ou $f(z) = F'(z)$, et supposons que a représente un point à l'intérieur du contour fermé P; posons en suite,

$$z = a + \varrho_\omega ;$$

alors on aura, à l'aide des formules (14) et (32), cette formule importante

$$\int^P f(z)\,dz = F(a+\varrho_{\omega+2\pi}) - F(a+\varrho_\omega) = \sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)\,dz + \sum_{r=1}^{r=p} \int^{(a_r)} f(z)\,dz \ldots (33),$$

qui s'enonce comme il suit:

La corde $R_0 R_n$, *correspondante à un contour fermé P [fig. 4], ou la période* Ω, *pourra s'exprimer de ces deux manières: 1° par une somme d'intégrales linéaires et circulaires [n° 22], 2° par la différence des valeurs de la primitive* $F(z)$ *pour des substitutions* $a+\varrho_{\omega+2\pi}$ *et* $a+\varrho_\omega$, a *étant un point à l'intérieur du contour* P, *et en même temps l'origine de la variable complexe* ϱ_ω *qui décrit le contour* P.

Remarque. On peut voir par là que la propriété d'une fonction $F(z)$ d'être anœcodrome le long d'un contour fermé P, suppose que sa dérivée $f(z)$ ait des points critiques à l'interieur du contour, d'où il s'ensuit que les points d'embranchement d'une fonction tirent leur origine des points critiques de la dérivée.

V. CALCUL DES INTÉGRALES CIRCULAIRES.

24. Si l'on a, pour $z = a$,

$$\lim (z-a)^s . F(z) = A ,$$

où A est une quantité *finie*, le point a s'appelle *un infini de l'ordre s* de la fonction $F(z)$ et *un zéro de l'ordre s* de la fonction $\dfrac{1}{F(z)}$.

Remarque. En posant $\frac{1}{F(z)} = \Phi(z)$, on aura, pour $z = a$ [n° 9],

$$\lim (z-a)^s . F(z) = \lim \frac{(z-a)^s}{\Phi(z)} = \frac{\lfloor s}{\Phi^{(s)}(a)} ,$$

d'où il s'ensuit que la condition $\lim (z-a)^s F(z) = A$ amènera la suivante: $\Phi(a) = \Phi'(a) = \ldots . = \Phi^{(s-1)}(a) = 0$ et mod $\Phi^{(s)}(a) > 0$, ce qui est le criterium ordinaire pour que a soit une racine de l'ordre s de la fonction $\Phi(z) = 0$.

25. Si a est un infini simple de la fonction $F(z)$ qui soit d'ailleurs synectique pour l'aire infiniment petite $\textcircled{a}$, on calculera l'intégrale circulaire

$$\int^{\textcircled{a}} F(z)dz .$$

de la manière suivante. En posant

$$z = a + \varrho_\omega .$$

où ϱ sera le rayon du cercle $\textcircled{a}$, et par suite, d'après la formule (3),

$$dz = i\varrho_\omega . d\omega = i(z-a) . d\omega ,$$

on aura la formule

$$\int^{\textcircled{a}} F(z)dz = i\int_0^{2\pi} (z-a)F(z)d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34) .$$

Puisque, d'après la supposition, a est un infini simple de la fonction $F(z)$, on trouvera que

$$\lim (z-a)F(z) = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

sera synectique au point a et que, par conséquent, la fonction $(z-a)F(z)$ sera synectique pour toute l'aire $\textcircled{a}$. On pourra donc écrire la formule (34) de cette manière,

$$\int^{\textcircled{a}} F(z)dz = i\int_0^{2\pi} (A+\varepsilon)d\omega = 2\pi i A + i\int_0^{2\pi} \varepsilon d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

où ε s'annulera en même temps que ϱ, décrivant des cercles de plus en plus petits, convergera vers zéro. Car, en désignant par μ le plus grand module que puisse recevoir ε tandis que ω va de 0 à 2π, on aura dans la formule (36) mod $\int_0^{2\pi} \varepsilon d\omega < \mu . 2\pi$ [(13)] et, par conséquent, à la limite,

$$\int^{\textcircled{a}} F(z)dz = 2\pi i . A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37) .$$

Remarque. En supposant que a soit un point d'embranchement en même temps qu'un infini, la fonction $(z-a)F(z)$ ne sera plus synectique au point a; mais la formule (37) subsistera toutefois, dès que la limite A dans la formule (35) sera nulle. Car, dans ce cas, la fonction $(z-a)F(z)$ différera d'une quantité infiniment petite de la limite zéro pour tout point de la circonférence de l'aire ⓐ, d'où l'on conclura, d'après la formule (36), que l'intégrale circulaire $\int^{(a)} F(z)\,dz$ s'annulera. Ainsi, par exemple, l'intégrale circulaire $\int^{(a)} \log(z-a)\,dz$ sera nulle, parceque $\lim (z-a)\log(z-a)$ est nulle pour $z=a$; de même, pour $\mu < 1$, l'intégrale circulaire $\int^{(a)} \frac{dz}{(z-a)^{\mu}}$ sera nulle, puisque $\lim \frac{z-a}{(z-a)^{\mu}}$ s'annule pour $z=a$, etc. Au contraire, la formule (37) ne s'appliquera d'aucune manière à l'intégrale circulaire $\int^{(a)} e^{\frac{1}{z-a}}\,dz$, parceque $\lim e^{\frac{1}{z-a}}$, pour $z=a$, est une quantité ou nulle ou infinie ou indéterminée.

26. En posant

$$F(z) = \frac{\mathfrak{F}(z)}{z-t},$$

où nous supposons $\mathfrak{F}(z)$ synectique pour l'aire comprise par le contour fermé P, à l'intérieur duquel est placé l'infini simple t de la fonction $F(z)$, on aura à l'aide de la formule (32), puisque, selon l'hypothèse, $F(z)$ est œcodrome le long de la circonférence ⓣ [n° 21, *rem.* 1],

$$\int^{P} F(z)\,dz = \int^{(t)} F(z)\,dz,$$

d'où il résulte, la $\lim (z-t)F(z)$ ou $\mathfrak{F}(t)$ étant synectique au point t,

$$\mathfrak{F}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int^{P} \frac{\mathfrak{F}(z)\,dz}{z-t} \quad \ldots\ldots \quad (38).$$

On aura donc cet énoncé important:

Toute fonction $\mathfrak{F}(t)$ *pourra s'exprimer par le produit* $\frac{1}{2\pi i} \times$ *l'intégrale définie de la fonction* $\frac{\mathfrak{F}(z)}{z-t}$, *prise le long d'un contour fermé* P *com-*

prenant dans son intérieur le point t et bornant en même temps le champ de synecticité de la fonction $\mathfrak{F}(z)$.

En supposant que la quantité t n'entre pas dans $F(z)$ et qu'elle soit indépendante de z, on aura, en différentiant l'égalité (38) r fois par rapport à t,

$$\mathfrak{F}^{(r)}(t) = \frac{\lfloor r}{2\pi i}\int^{P}\frac{\mathfrak{F}(z)\,dz}{(z-t)^{r+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

d'où résultera cet énoncé:

La dérivée $r^{ième}$ $\mathfrak{F}^{(r)}(t)$ *d'une fonction* $\mathfrak{F}(t)$ *a pour expression le produit* $\frac{\lfloor r}{2\pi i} \times$ *l'intégrale définie de la fonction* $\frac{\mathfrak{F}(t)}{(z-t)^{r+1}}$, *prise le long d'un contour fermé P qui comprend à son intérieur le point t et en même temps borne le champ de synecticité de la fonction* $\mathfrak{F}(z)$.

Remarque. En considérant la faculté $\lfloor 0$ comme représentant l'unité, une dérivée de l'indice 0 étant la fonction primitive, on voit que la formule (39) comprend la formule (38) comme cas particulier, pour $r = 0$.

28. De la formule (39) nous conclurons donc cet énoncé important:

Une fonction $\mathfrak{F}(z)$ *étant synectique pour tout point situé tant sur un contour fermé P qu'à son intérieur, chacune de ses dérivées sera synectique pour tout point situé à son interieur.*

La vérité de cet énoncé s'apercoit immédiatement, parceque chaque dérivée est *uniforme* pour la même aire que sa primitive [n° 10]; de plus, puisque l'intégrale de la formule (39) est *finie* [n° 13], les dérivées $\mathfrak{F}^{(r)}(t)$ et $\mathfrak{F}^{(r+1)}(t)$ seront aussi *finies* pour toute valeur du nombre entier et positif r; enfin, la dérivée $\mathfrak{F}^{(r)}(t)$ est *continue* en même temps que sa dérivée $\mathfrak{F}^{(r+1)}(t)$ est *finie* [n° 6, *rem.* 2]. Donc la dérivée $\mathfrak{F}^{(r)}(t)$ sera *synectique* pour tout point situé à l'intérieur du contour fermé P.

Remarque. De cet énoncé il s'ensuit que le champ de synecticité P d'une fonction primitive $\mathfrak{F}(z)$ sera plus grand que celui de sa dérivée $r^{ième}$ $\mathfrak{F}^{(r)}(t)$ en cela, que le cercle infiniment petit qui entoure t devra être à l'intérieur de P sans qu'il ait aucun contact avec P.

29. En représentant, dans la formule (39), par a une valeur *fixée* de t, et en supposant que le contour fermé P se restreigne à un cercle infiniment petit ⓐ, on aura, pour $s = r+1$,

$$\int^{(a)} \frac{\mathfrak{F}(z)\,dz}{(z-a)^s} = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1} \cdot \Big|^a \mathfrak{F}^{(s-1)}(z) \quad \ldots\ldots \quad (40),$$

formule qui s'énonce de la manière suivante:

L'intégrale circulaire autour d'un infini a *de l'ordre* s *d'une fonction* $\frac{\mathfrak{F}(z)}{(z-a)^s}$, *où la fonction* $\mathfrak{F}(z)$ *est synectique pour tout point de l'aire* ⓐ, *sera exprimée par le produit* $\frac{2\pi i}{\lfloor s-1}$ × *la dérivée* $(s-1)^{ième}$ *de la fonction* $\mathfrak{F}(z)$ *pour* z = a.

30. Si a est un *zéro simple* d'une fonction $\varphi(z)$, les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant synectiques pour l'aire infiniment petite ⓐ, il résultera de la formule (37), puisque $\lim_{[z=a]} \frac{(z-a)f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}$ [n° 9] est synectique au point a:

$$\int^{(a)} \frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)} = 2\pi i \cdot \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \quad \ldots\ldots \quad (41).$$

Donc on aura cet énoncé important:

L'intégrale circulaire du quotient $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *autour d'un infini simple* a, *les fonctions* $f(z)$ *et* $\varphi(z)$ *étant synectiques pour l'aire infiniment petite* ⓐ, *sera* $= 2\pi i \times$ *le quotient du numérateur* $f(z)$ *par la dérivée première du dénominteur* $\varphi'(z)$ *pour* z = a.

Ainsi, par exemple, on trouvera: $\int^{(a)} \frac{e^z dz}{z-a} = 2\pi i e^a$; $\int^{(a)} \frac{\mathrm{Sin}\, z\, dz}{z-a}$ $= 2\pi i \,.\, \mathrm{Sin}\, a$; $\int^{(0)} \frac{\log(a+z)\,dz}{z} = 2\pi i \,.\, \log a$; $\int^{(i)} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i$; $\int^{(i)} \frac{dz}{z^2+1} = \pi$, etc.

31. Si a est *un zéro de l'ordre* s d'une fonction $\varphi(z)$, les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant synectiques pour l'aire du cercle infiniment

petit ⓐ, puisque d'après les n°s 9 et 28 l'expression $\lim_{[z=a]} \frac{(z-a)^s f(z)}{\varphi(z)}$ $= \lfloor \underline{s} \int^a \frac{f(z)}{\varphi^{(s)}(z)}$ est synectique au point a et par conséquent la fonction $\frac{(z-a)^s f(z)}{\varphi(z)}$ pour l'aire infiniment petite ⓐ, il en résultera la formule suivante [n° 29]:

$$\int^{\textcircled{a}} \frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)} = \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{s-1}} \left| \left\{ \frac{(z-a)^s f(z)}{\varphi(z)} \right\}^{(s-1)} \right.^a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

On aura donc cet énoncé important:

L'intégrale circulaire du quotient $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *autour d'un infini* a *de l'ordre* s, *les fonctions* $f(z)$ *et* $\varphi(z)$ *étant synectiques pour l'aire infiniment petite* ⓐ, *sera* $= \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{s-1}}$ × *la dérivée de l'ordre* $(s-1)$ *du quotient* $\frac{(z-a)^s . f(z)}{\varphi(z)}$ *pour* z = a.

Ainsi, par exemple, on aura: $\int^{\textcircled{a}} \frac{e^z\,dz}{(z-a)^s} = \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{s-1}} \cdot e^a$; $\int^{\textcircled{a}} \frac{\mathrm{Sin}\, z\,dz}{(z-a)^s}$

$= \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{s-1}} \cdot \mathrm{Sin}\left\{ \frac{(s-1)\pi}{2} + a \right\}$; $\int^{\textcircled{0}} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}(z-a)} = \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{n}} \left| \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\}^{(n)} \right.^0$;

$\int^{\textcircled{0}} \frac{dz}{z\,\mathrm{Sin}\, z} = 2\pi i \left| \left\{ \frac{z}{\mathrm{Sin}\, z} \right\}' \right.^0 = 0$; $\int^{\textcircled{0}} \frac{dz}{z^2\,\mathrm{Sin}\, z} = \frac{2\pi i}{\lfloor \underline{2}} \left| \left\{ \frac{z}{\mathrm{Sin}\, z} \right\}'' \right.^0 = \frac{1}{3}\pi i$;

etc.

Remarque. La formule (42) comprend comme cas particulier la formule (41) pour $s = 1$, la signification de la faculté $\lfloor \underline{0}$ et de l'indice de dérivation 0 étant la même qu'au n° 29, *rem.*

32. Les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant synectiques pour tout point de l'aire d'un contour fermé P, à l'intérieur duquel $\varphi(z)$ a les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des ordres respectifs $s_1, s_2, \ldots, s_p$, on trouvera, d'après les formules (32) et (42) [voir n° 21, *rem.*],

$$\int^{P} \frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)} = \sum_{r=1}^{r=p} \frac{1}{\lfloor s_r - 1} \left| \left\{ \frac{(z-a_r)^{s_r} f(z)}{\varphi(z)} \right\}^{(s_r-1)} \right|^{a_r} \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

d'où l'on aura une règle générale pour calculer l'intégrale définie du quotient $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ le long d'un contour fermé P qui renferme les infinis $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des ordres respectifs $s_1, s_2, \ldots, s_p$ et qui, en même temps, borne le champ de synecticité des fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$.

Ainsi, par exemple, P renfermant les points $\zeta = 0$ et $\zeta = h$ et en même temps bornant le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$, on trouvera

$$\int^{P} \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-h)} = 2\pi i \left[\frac{1}{\lfloor n} \left| \left\{ \frac{f(a+\zeta)}{\zeta-h} \right\}^{(n)} \right|^{0} + \frac{f(a+h)}{h^{n+1}} \right].$$

Cet exemple est d'un intérêt spécial, comme renfermant le développement de la série de Taylor, ce que nous montrerons plus tard.

VI. CALCUL DES INTÉGRALES LINÉAIRES.

33. Soit $\int^{|a|} f(z)\,dz$ l'intégrale linéaire à calculer, et désignons par c un point du contour fermé P [fig. 8], d'où part la ligne le long de laquelle l'intégration est effectuée, et par α un point de la circonférence infiniment petite ⓐ que rencontre cette ligne; nous aurons alors [n° 21]

$$\int^{a|} f(z) = \int_{c}^{\alpha} f(z)\,dz\,.$$

Soit, de plus, $f_1(z)$ la valeur que reçoit la fonction $f(z)$, après que z a décrit une seule fois le contour du circle ⓐ; alors

$$\int^{|a} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{c} f_1(z)\,dz = -\int_{c}^{\alpha} f_1(z)\,dz\,,$$

et par conséquent

$$\int^{|a|} f(z)\,dz = \int_{c}^{\alpha} \{f(z) - f_1(z)\}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

d'où l'on conclura cet énoncé:

L'intégrale linéaire d'une fonction $f(z)$, *prise dans le sens direct et dans le sens rétrograde le long d'une ligne* $c\alpha$ *qui joint un point* c *du contour fermé* P *à un point* α *du cercle infiniment petit* ⓐ *qui entoure le point d'embranchement* a *comme centre, sera égale à l'intégrale définie, prise de* c *à* α, *de la différence* $\{f(z)-f_1(z)\}$, *la fonction* $f_1(z)$ *étant la valeur que reçoit la fonction* $f(z)$, *quand* z *décrit une seule fois le contour du cercle* ⓐ.

34. Si $F(z)$ et $F_1(z)$ sont les primitives des fonctions respectives $f(z)$ et $f_1(z)$, la formule (44) pourra s'écrire comme il suit:

$$\int_c^{|a|} f(z)\,dz = \int_c^{\alpha} \{F(z)-F_1(z)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Ainsi, en posant $f(z) = \log(z-a)$ et par suite $f_1(z)\log = (z-a) + 2\pi i$, on aura $F(z) = (z-a)\{\log(z-a)-1\}$ et $F_1(z) = (z-a)\{\log(z-a)-1\} + 2\pi iz$; donc

$$\int_c^{|a|} \log(z-a)\,dz = -\int_c^{\alpha} 2\pi iz = 2\pi i(c-\alpha),$$

où a peut remplacer α, puisque le rayon du cercle ⓐ où $\operatorname{mod}(a-\alpha)$ est une quantité qui s'évanouit à la limite.

35. Si les primitives $F(z)$ et $F_1(z)$ sont *finies* au point a, on remplacera α par a dans la formule (45), puisque $\operatorname{mod}(a-\alpha)$ s'évanouit à la limite.

Par exemple, si l'on a pour but de trouver l'intégrale linéaire de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^{\frac{1}{n}}\gamma^{\sigma}}$, les quantités $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}$ désignant les n racines $n^{ièmes}$ de 1, et σ un nombre entier $< n$, on aura

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-a)^{\frac{1}{n}}\cdot\gamma^{\sigma+1}}, \quad F(z) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{(z-a)^{\frac{n-1}{n}}}{\gamma^{\sigma}} \text{ et } F_1(z) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{(z-a)^{\frac{n-1}{n}}}{\gamma^{\sigma+1}},$$

et par conséquent

$$\int_c^{|a|} f(z)\,dz = \frac{n}{(n-1)\gamma^{\sigma}}\cdot\int_c^{a}(z-a)^{\frac{n-1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Nous trouverons de cette manière, pour $n=2$ et $\sigma=0$:

$$\int_c^{|a|} \frac{dz}{(z-a)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_c^{a}(z-a)^{\frac{1}{2}}\cdot[1-(-1)] = -4(c-a)^{\frac{1}{2}};$$

de même, pour $n = 3$ et $\sigma = 0$:

$$\int^{|a|} \frac{dz}{(z-a)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2} \int_c^a (z-a)^{\frac{2}{3}} (1 - 1_{-\frac{2}{3}\pi}) = -\frac{3}{4}(c-a)(3+i\sqrt{3}).$$

36. Si nous avons à calculer la somme d'intégrales linéaires

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)\,dz\,,$$

en désignant par $f_1(z)$ la valeur de la fonction $f(z)$ quand z décrit une seule fois le contour du cercle (a_1), par $f_2(z)$ la valeur de la fonction $f_1(z)$ quand z décrit une seule fois le cercle (a_2), etc., on trouvera d'après la formule (44):

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)\,dz = \sum_{r=1}^{r=p} \int_c^{\alpha_r} \{f_{r-1}(z) - f_r(z)\}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46),$$

où α_1, α_2, etc. désignent les points où les circonférences (a_1), (a_2) etc. rencontrent les lignes d'intégration $c\alpha_1$, $c\alpha_2$ etc., la fonction originaire $f(z)$ étant désignée par $f_0(z)$.

37. Si $F(z)$, $F_1(z)$, etc. sont les primitives des fonctions respectives $f(z)$, $f_1(z)$, etc., on trouvera d'après la formule (45):

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)\,dz = \sum_{r=1}^{r=p} \Big|^{\alpha_r}_{c} \{F_{r-1}(z) - F_r(z)\} = \sum_{r=1}^{r=p} \Big|^{\alpha_r} \{F_{r-1}(z) - F_r(z)\} + F_p(c) - F(c) \ldots (47),$$

où $F_0(z)$ désigne la primitive $F(z)$ de la fonction originaire $f(z)$.

Ainsi, par exemple, en supposant $F(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ et par suite $\gamma = 1_\pi$, $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$, on a la primitive $F(z) = \arcsin z$; de plus, on a $f_1(z) = \dfrac{1}{\gamma} f(z)$, $f_2(z) = \dfrac{1}{\gamma} f_1(z) = f(z)$ et par suite $F_1(z) = \dfrac{1}{\gamma} F(z)$, $F_2(z) = F(z)$. Donc on aura enfin, puisque $F_2(c) = F(c)$, et que les primitives $F(z)$ et $F_1(z)$ sont *finies* aux points a_1 et a_2 [n° 35]:

$$\sum_{r=1}^{r=2} \int^{|a_r|} \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{r=1}^{r=2} \Big|^{a_r} \{F_{r-1}(z) - F_r(z)\} = 2\{F(a_1) - F(a_2)\} = 2\pi \text{ *)}.$$

38. La formule (47), en y faisant usage des notations $\alpha_0 = \alpha_{p+1} = c$, peut s'écrire comme il suit:

$$\sum_{r=1}^{r=p} \int^{|a_r|} f(z)dz = \sum_{r=0}^{r=p} \Big|_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} F_r(z) = \sum_{r=0}^{r=p} \int_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} f_r(z)dz \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Remarque. La formule (48) représente une intégration depuis $c = \alpha_0$ jusqu'au cercle infiniment petit (a_1), ensuite autour de ce cercle, et après cela jusqu'au cercle infiniment petit (a_2), etc., jusqu'à ce que l'on parvienne au dernier cercle (a_p); après avoir intégré autour de celui-ci, on reviendra enfin au point de départ $c = \alpha_{p+1}$. Cette manière d'exécuter l'intégration conduit précisément au même résultat que la formule (46), et peut se déduire immédiatement du n° 20.

39. Une fonction $f(z)$ étant synectique pour tout point d'un contour fermé P et de l'aire incluse autre que les points d'embranchement $a_1, a_2, \ldots a_p$, situés à l'intérieur de P, on aura d'après les formules (32) et (46), si l'on suppose que les intégrales circulaires autour de ces points-là s'annulent [n° 21, *rem.*]:

$$\int^P f(z)dz = \sum_{r=1}^{r=p} \int^{\alpha_r} \{f_{r-1}(z) - f_r(z)\} dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

ou, en s'appuyant sur la formule (48), $F_r(z)$ étant en général la primitive de la fonction $f_r(z)$:

$$\int^P f(z)dz = \sum_{r=0}^{r=p} \int_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} f_r(z)dz = \sum_{r=0}^{r=p} \Big|_{\alpha_r}^{\alpha_{r+1}} F_r(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

où $F_0(z) = F(z)$ et $\alpha_0 = \alpha_{p+1} = c$.

Les formules (49) et (50) donnent une règle générale pour calculer l'intégrale définie d'une fonction $f(z)$ le long d'un contour fermé P, à l'intérieur duquel sont situés les point d'embranchement $a_1, a_2, \ldots, a_p$,

---

*) La valeur principale de Arc Sin (-1) est égale à $-\frac{1}{2}\pi$ d'après ce que nons ferons observer plus tard.

la fonction $f(z)$ étant du reste synectique pour tout point du contour P et de l'aire incluse.

Remarque. En combinant la formule (43) avec les formules (49) et (50) on pourra donc évaluer l'intégrale définie d'une fonction $f(z)$ le long d'un contour fermé P qui comprend à son intérieur soit des points d'embranchement, soit des infinis.

VII. LA SÉRIE DE TAYLOR ET QUELQUES AUTRES SÉRIES.

[Le cercle de convergence bornant le champ de synecticité.]

40. Une des plus belles conséquences du théorème fondamental de Cauchy c'est la déduction de la série de Taylor, la règle de sa convergence étant en même temps mise au jour. Avant d'aborder cette déduction, nous exposerons quelques notions préliminaires concernant les séries des quantités complexes ou, comme on les appelle pour abréger, les séries complexes.

Une série complexe

$$S = s_0 + s_1 + \ldots + s_n$$

est dite *convergente*, si la somme des termes est *finie* et *déterminée.*

Une série complexe jouit de ce *critérium général de convergence.* Si les termes $s_0, s_1, \ldots s_n$ sont *bien déterminés*, et que la somme de leurs modules $\bar{s}_0 + \bar{s}_1 + \ldots + \bar{s}_n$ soit *finie*, la série

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_n$$

sera *convergente.*

La vérité de cet énoncé se fait voir immédiatement, parce que le module d'une somme est $<$ la somme des modules des termes, ou

$$\bar{S} < \bar{s}_0 + \bar{s}_1 + \ldots \bar{s}_n .$$

41. Si les termes $s_0, s_1, \ldots s_n$ d'une série convergente sont multipliés par des quantités *finies* et *déterminées* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dont les modules sont quelconques, la série obtenue

$$S_1 = a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots a_n s_n$$

sera *convergente.*

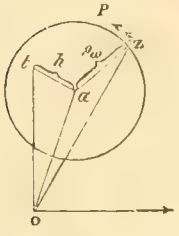
En effet, μ désignant le plus grand des modules $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}^n$, on a

$$\bar{S}_1 < \bar{a}_0 \bar{s}_0 + \bar{a}_1 \bar{s}_1 + \ldots \bar{a}_n \bar{s}_n > \mu (\bar{s}_0 + \bar{s}_1 + \ldots \bar{s}_n);$$

donc la série mentionnée sera convergente.

42. En supposant dans la formule (38) que le contour P soit un cercle dont le centre soit fixé par la quantité complexe a [fig. 9], et en faisant

Fig. 9.



$$\left.\begin{aligned} z &= a + \varrho_\omega \\ t &= a + h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (51),$$

où par conséquent ϱ est le rayon du cercle et h une quantité complexe qui fixe un point à l'interieur de ce cercle, c'est-à-dire, $\bar{h} < \varrho$; si l'on remplace $\mathfrak{F}(z)$ par $f(z)$, on aura la formule suivante:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int^P \frac{f(z)\,dz}{(z-a)-h} \quad \ldots\ldots \quad (52).$$

Donc, d'après le n° 26, cette formule suppose que le cercle P borne le champ de synecticité de la fonction $f(z)$, et que $a+h$ représente un point à l'intérieur de ce cercle.

En developpant par division le quotient $\frac{1}{(z-a)-h}$, on aura:

$$\frac{1}{(z-a)-h} = \frac{1}{z-a} \cdot \left\{1 + \frac{h}{z-a} + \left(\frac{h}{z-a}\right)^2 + \ldots \left(\frac{h}{z-a}\right)^n + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n\{(z-a)-h\}}\right\},$$

d'où la formule (52) peut s'écrire, en observant que h est indépendant de z:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int^P \frac{f(z)\,dz}{(z-a)} + h\int^P \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots h^n \int^P \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}\right] + R \ldots (53),$$

le "terme complémentaire" R étant de la forme

$$R = \frac{h^{n+1}}{2\pi i} \int^P \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}\{(z-a)-h\}} \quad \ldots\ldots \quad (54).$$

Ce terme converge vers zéro, comme on le fera voir, en même

temps que n converge vers l'infini. Car, en faisant $\varrho_\omega = (z-a)$ [(51)], on aura, puisque $\varrho = \text{const.}$ et par suite $dz = i\varrho_\omega . d\omega$ [(3)]:

$$R = \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varrho_\omega)\, d\omega}{(1_\omega)^{n+1}\left(1-\frac{h}{\varrho_\omega}\right)} .$$

Maintenant, si l'on désigne par μ le plus grand module de l'expression $\dfrac{f(a+\varrho_\omega)}{1-\dfrac{h}{\varrho_\omega}}$, en faisant varier ω de 0 à 2π, on aura à l'aide de la formule (13):

$$\overline{R} < \left(\frac{\overline{h}}{\varrho}\right)^{n+1} \cdot \mu ,$$

d'où il résulte, μ étant *finie* et $\varrho > \overline{h}$, d'après les conditions établies,

$$\lim_{[n=\infty]} R = 0 .$$

Donc, puisque la formule (53) représente une *identité* pour tout point $a+h$ à l'intérieur du cercle P, la série du second membre, étendue à l'infini, *convergera*. En remplaçant, d'après le n° 27, les intégrales par les dérivées correspondantes, la formule (53) se transforme dans la formule connue de Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} \cdot f'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} \cdot f''(a) + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

ou, en changeant $a+h$ en x,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{\lfloor 2} \cdot f''(a) + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (56).$$

On aura donc cet énoncé important qui s'appelle *théorème de Cauchy: La fonction $f(z)$ étant synectique pour tout point d'un cercle P et de l'aire incluse, si l'on désigne par* a *le centre du cercle et par* a+h *un point à son intérieur, la fonction $f(a+h)$ sera développable en une série convergente d'après la formule de Taylor.*

Le cercle P s'appelle *cercle de convergence* de la série de Taylor. Ce cercle bornera donc le champ de synecticité de la fonction $f(z)$.

Remarque 1. Pour $a = 0$ la série de Taylor comprend comme cas particulier celle de Mac-Laurin, laquelle, par suite, a son origine au centre du cercle.

Remarque 2. Nous avons suivi ici la manière ordinaire de déduire la série de Taylor, avec son cercle de convergence, de la formule (52).

Remarque 3. La convergence de la série de Taylor se démontre aussi par le criterium de convergence donné au n° 41. En effet, suivant la méthode donnée ci-dessus pour transformer le terme complémentaire R, on peut écrire la formule (53) comme il suit:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(a+\varrho_\omega)\,d\omega + \frac{h}{\varrho}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varrho_\omega)}{1_\omega}\,d\omega + \ldots\left(\frac{h}{\varrho}\right)^n\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varrho_\omega)\,d\omega}{(1_\omega)^n}\right] + R\,,$$

d'où il s'ensuit, puisque $\bar{h} < \varrho$ et les coefficients des termes $1, \frac{h}{\varrho}, \ldots, \left(\frac{h}{\varrho}\right)^n$ sont *finis* [(13)] et *déterminés*, *que la série* (*53*) *étendue à l'infini sera convergente.*

43. A l'aide de la formule donnée comme exemple au n° 32 nous pouvons déduire la série de Taylor de cette manière simple, le contour P renfermant les point $\zeta = 0$ et $\zeta = h$ et en même temps bornant le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$. En effet, d'après la formule (43), on trouve immédiatement:

$$\int_P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}.(\zeta-h)} = 2\pi i\left[\frac{1}{\underline{n}}\left\{\frac{f(a+\zeta)}{\zeta-h}\right\}^{(n)}_0 + \frac{f(a+h)}{h^{n+1}}\right] \quad \ldots \quad (57).$$

En posant

$$\frac{f(a+\zeta)}{h-\zeta} = u$$

et en différentiant l'égalité $f(a+\zeta) = u(h-\zeta)$ r fois par rapport à ζ, on aura

$$f^{(r)}(a+\zeta) = u^{(r)}(h-\zeta) - ru^{(r-1)}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u^{(r)} = \frac{f^{(r)}(a+\zeta) + ru^{(r-1)}}{h-\zeta}\,.$$

De cette manière on a $/^0u = \frac{f(a)}{h}$, $/^0u' = \frac{f'(a)}{h} + \frac{f(a)}{h^2}$, $/^0u'' = \frac{f''(a)}{h\lfloor\underline{2}} + \frac{f'(a)}{h^2} + \frac{f(a)}{h^3}$ et, en général,

$$/^0u^{(n)} = \frac{f^{(n)}(a)}{h\lfloor\underline{n}} + \frac{f^{n-1)}(a)}{h^2\lfloor\underline{n-1}} + \frac{f^{(n-2)}(a)}{h^3\lfloor\underline{n-2}} + \dots \frac{f'(a)}{h^n} + \frac{f(a)}{h^{n+1}}.$$

Donc, la formule (57) pourra s'écrire comme il suit:

$$\frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-h)} = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2f''(a)}{\lfloor\underline{2}} - \dots - \frac{h^{(n)}f^{(n)}(a)}{\lfloor\underline{n}}$$

ou

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{\lfloor\underline{2}}f''(a) + \dots \frac{h^n}{\lfloor\underline{n}}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-h)} \quad \dots (58).$$

Le développement (58) est vrai pour un contour quelconque P qui renferme les points $\zeta = 0$ et $\zeta = h$ et en même temps borne le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$. En supposant que le contour P soit un cercle décrit par $\zeta = \varrho_\omega$ comme rayon, le dernier terme de la formule (58) coïncidera avec le terme complémentaire R dans la formule (54); alors ce terme convergera vers zéro pour $\lim n = \infty$, et les formules (55) et (58) seront identiques.

Remarque. La manière dont nous venons de déduire la série de Taylor est plus générale que celle que nous avons employée au n° 42 en ce que le contour P, dans la formule (58), peut être d'une forme et d'une étendue quelconques, pourvu qu'il renferme les points $\zeta = 0$ et $\zeta = h$ et borne en même temps le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$; au contraire, le contour P, au n° 42, est assujetti à la restriction d'être un cercle [cercle de convergence] qui, décrit du point $\zeta = 0$ comme centre et renfermant le point $\zeta = h$, doit borner le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$. La formule (58) subsistera donc comme une identité pour les valeurs de h qui fixent des points situés en dehors du cercle de convergence, l'usage de la formule étant parfois borné au cas où le terme complémentaire pourra être ou calculé ou réduit, quant à son module, à une valeur inférieure à une limite donnée, moindre que les quantités négligeables dans nos calculs approximatifs. Mais au contraire, s'il s'agit de l'emploi de la série de Taylor comme une série *convergente* pour une infinité des termes, pour que le terme complémentaire soit négligeable, la quantité

complexe h ne pourra représenter que des points situés à *l'intérieur* du cercle de convergence.

44. Soit a un infini de l'ordre s de la fonction $\mathfrak{F}(z)$ [n° 24] qui en outre est synectique pour tout point de l'aire infiniment petite $\textcircled{a}$, et posons $\mathfrak{F}(z) = (z-a)^s F(z)$; alors la fonction $\mathfrak{F}(z)$, étant synectique pour *tout* point de l'aire $\textcircled{a}$, sera développable selon la formule de Taylor pour le cercle de convergence $\textcircled{a}$. Donc, on aura d'après la formule (56):

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(a) + \frac{z-a}{1}\cdot\mathfrak{F}'(a) + \cdots \frac{(z-a)^{s-1}}{\lfloor s-1}\cdot\mathfrak{F}^{(s-1)}(a) + \frac{(z-a)^s}{\lfloor s}\cdot\mathfrak{F}^{(s)}(a) + \cdots.$$

ou, ce qui est la même chose,

$$F(z) = \frac{\mathfrak{F}(a)}{(z-a)^s} + \frac{\mathfrak{F}'(a)}{(z-a)^{s-1}} + \cdots \frac{\mathfrak{F}^{(s-1)}(a)}{(z-a)\lfloor s-1} + \frac{\mathfrak{F}^{(s)}(a)}{\lfloor s} + \cdots \quad \ldots (59).$$

En multipliant (59) par dz et intégrant autour du cercle infiniment petit $\textcircled{a}$, on aura d'après les formules (40) et (41):

$$\int^{\textcircled{a}} F(z)\,dz = \frac{2\pi i}{\lfloor s-1}\cdot\Big|^{a}\{(z-a)^s F(z)\}^{(s-1)} \quad \ldots (60).$$

Cette formule s'accorde avec la formule (42), qui est donnée pour calculer l'intégrale circulaire autour d'un infini a de l'ordre s.

Remarque. Le coefficient du terme $\frac{1}{z-a}$ dans le développement (59), c'est-à-dire, la quantité $\Big|^{a}\left\{\frac{(z-a)^s F(z)}{\lfloor s-1}\right\}^{(s-1)}$ est appellée par Cauchy "*le résidu*" de la fonction $F(z)$ relatif à l'infini a de l'ordre s. Le résidu est donc identique au produit $\frac{1}{2\pi i}\times$ l'intégrale circulaire autour du point a. C'est en prenant ce coefficient comme point de départ que Cauchy a établi un system de théorèmes relatifs aux infinis des fonctions, qu'il a nommé "Calcul des résidus" *) et qui n'est qu'une branche spéciale de la théorie qui vient d'être exposée.

*) Le calcul des résidus présente un caractère très-artificiel, et emploie des notations qui transportées dans cette théorie se montrent fort incommodes, en particulier quand il s'agira, comme dans la formule (43), d'exprimer une somme d'intégrales circulaires ["résidu intégral"].

45. À l'aide de la formule (43) nous pouvons très-simplement déduire une série qui est d'une grande généralité et qui aura une importance considérable dans ce qui va suivre.

En effet, si nous supposons que le contour fermé P, en bornant le champ de synecticité de la fonction $f(a+\zeta)$, renferme à son intérieur les points

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= 0 \\ \zeta_1 &= h.1 \\ \zeta_2 &= h.\gamma \\ &\cdots\cdots \\ \zeta_\sigma &= h\gamma^{\sigma-1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (61),$$

où $1, \gamma, \ldots, \gamma^{\sigma-1}$ sont les σ racines $\sigma^{\text{ièmes}}$ de l'unité et par suite $\gamma = 1_{\frac{2\pi}{\sigma}}$, nous aurons, suivant les formules (41) et (43):

$$\int^P \frac{\zeta^\nu . f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^\sigma - h^\sigma} = 2\pi i . \sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{f(a+\zeta_r)}{\sigma . \zeta_r^{\sigma-\nu-1}} \quad \cdots \quad (62),$$

le nombre ν étant entier et positif et moindre que σ. En développant le quotient $\frac{\zeta^\nu}{\zeta^\sigma - h^\sigma}$ par division, on aura

$$\frac{\zeta^\nu}{\zeta^\sigma - h^\sigma} = \frac{\zeta^\nu}{\zeta^\sigma}\left\{1 + \left(\frac{h}{\zeta}\right)^\sigma + \left(\frac{h}{\zeta}\right)^{2\sigma} + \cdots \left(\frac{h}{\zeta}\right)^{n\sigma} + \left(\frac{h}{\zeta}\right)^{(n+1)\sigma} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{\zeta}\right)^\sigma}\right\};$$

alors, en introduisant $\sigma - \nu = \tau$, et observant que h est indépendant de ζ, la formule (62) pourra s'écrire de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{f(a+\zeta_r)}{\sigma \zeta_r^{\tau-1}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \Big[&\int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^\tau} + h^\sigma \int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{\sigma+\tau}} \\ &+ h^{2\sigma} \int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{2\sigma+\tau}} + \ldots h^{n\sigma} \int^P \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n\sigma+\tau}} \Big] + R \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (63),$$

où le terme complémentaire R est de la forme

$$R = \frac{h^{(n+1)\sigma}}{2\pi i} \int^{P} \frac{f(a+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{(n+1)\sigma+\tau} \cdot \left\{1-\left(\frac{h}{\zeta}\right)^{\sigma}\right\}} \quad \ldots\ldots (64).$$

En supposant que P soit un cercle de rayon ϱ et de centre $\zeta_0 = 0$, on aura $\zeta = \varrho_\omega$, et par suite $d\zeta = i\varrho_\omega \cdot d\omega$ [(3)], d'où résulte que le terme complémentaire sera de la forme

$$R = \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{(n+1)\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varrho_\omega)\,d\omega}{(1_\omega)^{(n+1)\sigma} \cdot (\varrho_\omega)^{\tau-1} \cdot \left[1-\left(\frac{h}{\varrho_\omega}\right)^{\sigma}\right]}.$$

En désignant par μ le plus grand module de l'expression $\dfrac{f(a+\varrho_\omega)}{\varrho^{\tau-1} \cdot \left\{1-\left(\frac{h}{\varrho_\omega}\right)^{\sigma}\right\}}$, tandis que ω va de 0 à 2π, on aura à l'aide de la formule (13):

$$\overline{R} < \left(\frac{\overline{h}}{\varrho}\right)^{(n+1)\sigma} \cdot \mu .$$

Cette inégalité montre (puisque, par les conditions établies, μ = quantité *finie* et $\varrho > \overline{h}$) que, pour $\lim n = \infty$,

$$\lim R = 0 .$$

Donc, la formule (63) étant une *identité*, il s'ensuit que la série à droite, étendue à l'infini, doit être *convergente*. En y remplaçant les intégrales par les dérivées correspondantes [n° 27], nous trouverons enfin la formule cherchée:

$$\sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{f(a+h\gamma^{r-1})}{\sigma(\gamma^{r-1})^{\tau-1}} = \frac{h^{\tau-1}}{\lfloor\tau-1} \cdot f^{(\tau-1)}(a) + \frac{h^{\sigma+\tau-1}}{\lfloor\sigma+\tau-1} \cdot f^{(\sigma+\tau-1)}(a) + \frac{h^{2\sigma+\tau-1}}{\lfloor 2\sigma+\tau-1} \cdot f^{(2\sigma+\tau-1)}(a) + \ldots (65),$$

où $\gamma = 1_{\frac{2\pi}{\sigma}}$ et $\sigma - \nu = \tau$, les lettres σ, τ et ν pouvant représenter des nombres quelconques entiers et positifs, et ν admettant en outre la valeur zéro. La formule (65) a un très-grande généralité, et comprend comme cas particuliers un nombre illimité de séries dont nous signalerons les suivantes:

1° Pour $\tau = 1$ on aura, les notations $\lfloor\underline{0}$ et $f^{(0)}(a)$ désignant respectivement l'unité et $f(a)$ [n° 29, *rem.*]:

$$\sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{f(a+h\gamma^{r-1})}{\sigma} = f(a) + \frac{h^\sigma}{\lfloor\underline{\sigma}} \cdot f^{(\sigma)}(a) + \frac{h^{2\sigma}}{\lfloor\underline{2\sigma}} \cdot f^{(2\sigma)}(a) + \ldots \quad \ldots (66).$$

De cette formule on tirera:

α) pour $\sigma = 1$, la série de Taylor ou

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} \cdot f'(a) + \frac{h^2}{\lfloor\underline{2}} \cdot f''(a) + \ldots ;$$

β) pour $\sigma = 2$, $[\gamma = 1_\pi]$, on trouvera la série suivante:

$$\tfrac{1}{2}\{f(a+h) + f(a-h)\} = f(a) + \frac{h^2}{\lfloor\underline{2}} \cdot f''(a) + \frac{h^4}{\lfloor\underline{4}} \cdot f^{iv}(a) + \ldots .$$

qui s'applique aux fonctions paires, en supposant $a = 0$.

2° Pour $\tau = 2$ on aura la série suivante:

$$\sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{f(a+h\gamma^{r-1})}{\sigma \cdot \gamma^{r-1}} = \frac{h}{1} \cdot f'(a) + \frac{h^{\sigma+1}}{\lfloor\underline{\sigma+1}} \cdot f^{(\sigma+1)}(a) + \frac{h^{2\sigma+1}}{\lfloor\underline{2\sigma+1}} \cdot f^{(2\sigma+1)}(a) + \ldots \quad \ldots (67).$$

De cette formule on déduira:

α) pour $\sigma = 2$, $[\gamma = 1_\pi]$:

$$\tfrac{1}{2}\{f(a+h) - f(a-h)\} = \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^3}{\lfloor\underline{3}} \cdot f'''(a) + \frac{h^5}{\lfloor\underline{5}} \cdot f^{v}(a) + \ldots ,$$

série qui peut être employée pour des fonctions impaires, en supposant $a = 0$;

β) pour $\sigma = 3$, $[\gamma = 1_{\frac{2}{3}\pi}]$:

$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{f(a+h)}{1} + \frac{f(a+h\gamma)}{\gamma} + \frac{f(a+h\gamma^2)}{\gamma^2}\right\} = \frac{h}{1} \cdot f'(a) + \frac{h^4}{\lfloor\underline{4}} \cdot f^{iv}(a) + \frac{h^7}{\lfloor\underline{7}} \cdot f^{vii}(a) + \ldots ,$$

et ainsi de suite.

Remarque. En posant dans la formule (65) $f(z) = e^z$, on aura cette formule remarquable

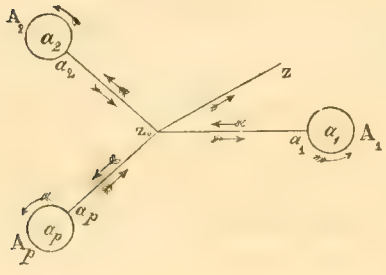
$$\sum_{r=1}^{r=\sigma} \frac{e^{h \cdot \gamma^{r-1}}}{\sigma(\gamma^{r-1})^{\tau-1}} = \frac{h^{\tau-1}}{\lfloor\underline{\tau-1}} + \frac{h^{\sigma+\tau-1}}{\lfloor\underline{\sigma+\tau-1}} + \frac{h^{2\sigma+\tau-1}}{\lfloor\underline{2\sigma+\tau-1}} + \ldots .$$

qui, pour $h = 1$, donne la somme des valeurs réciproques des facultés, combinées d'un nombre illimité de manières.

VIII. FONCTIONS PÉRIODIQUES.

46. Après avoir montré, dans ce qui précède, le moyen de calculer les intégrales circulaires et linéaires, et d'évaluer ainsi les intégrales prises le long d'un contour fermé qui renferme dans son intérieur des points critiques, nous allons maintenant aborder la théorie importante des *fonctions périodiques*, dont nous avons signalé les principes au n° 16, 2°. Ainsi, en intégrant une fonction $f(z)$ entre les limites z_0 et z, le chemin le long duquel l'intégrale est prise, n'étant donné que par ses extrémités, pourra être quelconque comme la droite $z_0 z$ [fig. 10], l'un des contours $z_0 A_1 z_0 z$, $z_0 A_2 z_0 z$, ... $z_0 A_p z_0 z$, $z_0 A_1 z_0 A_2 z_0 z$ etc., ces contours étant composés des contours qui au n° 21 sont désignés par A_1, A_2, ..., A_p, $A_1 + A_2$, et du chemin $z_0 z$. Le résultat de l'intégration doit donc être différent suivant des chemins différents que l'on a parcourus en intégrant de z_0 à z, si l'on suppose que les contours fermés A_1, A_2, ... A_p, $A_1 + A_2$ etc. qui sont joints à la droite $z_0 z$, renferment un ou plusieurs points critiques, de sorte que chaque contour simple comme A_1, A_2, ..., A_p ne renferme qu'un seul de ces points. La limite inférieure z_0 étant fixe, à chaque valeur de la limite supérieure z repondront donc en général plusieurs valeurs de l'intégrale; et par conséquent, la limite supérieure, étant considerée comme fonction de l'intégrale, devra recevoir la *même* valeur pour une quelconque des valeurs distinctes de l'intégrale qui proviennent des chemins différents qui conduisent de z_0 à z. Alors, en représentant par u la valeur *générale* de l'integrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ prise le long d'un quelconque des chemins allant de z_0 à z, et en représentant, de plus, par u_0 la même intégrale prise le long d'un chemin *déterminé*, comme la droite $z_0 z$, et par cela même nommée la valeur *principale* de l'integrale générale, on aura d'après la formule (19), savoir, *si la fonction* $f(z)$ *est œcodrome le long des contours fermés qui sont ajoutés à la droite* $z_0 z$:

Fig. 10.



$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = u_0 + \Sigma \varkappa \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68),$$

où nous désignons *l'intégrale principale* u_0 par la notation

$$u_0 = \left(\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Le signe de sommation dans la formule (68) se rapporte aux intégrales distinctes Ω_1, Ω_2 etc. dites *périodes* [n° 16, 2°], qui proviennent de l'intégration le long des contours fermés mentionnés ci-dessus, et sont respectivement multipliées par des entiers quelconques $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, etc., dont la *valeur numérique* indique *combien de fois*, et le *signe* dans *quel sens* l'intégration autour de ces contours a été effectuée. Donc, nous aurons la définition suivante:

On entend par période toute quantité Ω *qui, multipliée par un entier quelconque* $\varkappa$ *et ajoutée à la valeur principale d'une intégrale, pourra, sans altérer les limites d'intégration, donner à l'intégrale générale un nombre illimité de valeurs.*

Remarque. Les entiers positifs ou négatifs $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, etc. dans la formule (68) s'appellent les *multiplicateurs des périodes* respectives Ω_1, Ω_2 etc. Ces entiers pourront aussi être nuls, c'est-à-dire que les périodes respectives n'auront pas été ajoutées à l'intégrale principale. De plus, les produits $\varkappa_1\Omega_1$, $\varkappa_2\Omega_2$, etc. s'appellent *multiples des périodes.*

47. Quand on considère, dans la formule (68), la limite supérieure z comme fonction de l'intégrale générale u ou $u_0 + \Sigma\varkappa\Omega$, c'est-à-dire,

$$z = \psi(u) = \psi(u_0 + \Sigma\varkappa\Omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

on dit que z est une *fonction périodique* de u ou $u_0 + \Sigma\varkappa\Omega$; alors, *la fonction périodique est caractérisée comme la limite supérieure d'une intégrale multiforme, et fonction de la valeur principale de celle-ci, augmentée d'une somme des multiples des périodes.*

48. Si, dans la formule (68), a_1, a_2, ..., a_p sont des infinis autour desquels la fonction $f(z)$ soit œcodrome, les périodes correspondantes seront des intégrales circulaires [n° 21]; alors

$$\Omega_r = \int^{(a_r)} f(z)\,dz\,,$$

d'où la formule (70) pourra s'écrire

$$z = \psi(u) = \psi\left(u_0 + \sum_{r=1}^{r=p} \varkappa_r \int^{(a_r)} f(z)\,dz\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Ainsi, de l'intégrale $u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}$ proviendra une fonction périodique $z = \psi\left(u_0 + \varkappa \int^{(0)} \frac{dz}{z}\right) = \psi(u_0 + \varkappa . 2\pi i)$; ensuite, de l'intégrale $u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1+z^2}$ on tirera une fonction périodique $z = \psi\left(u_0 + \sum_{r=1}^{r=2} \varkappa_r \int^{(a_r)} \frac{dz}{1+z^2}\right)$, qui sera de forme $z = \psi(u_0 + \varkappa\pi)$, $\varkappa$ étant un entier quelconque ou zéro, puisque les périodes correspondantes aux infinis $a_1 = i$ et $a_2 = -i$ sont respectivement $\Omega_1 = \pi$ et $\Omega_2 = -\pi$, etc.

49. Au contraire, si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ désignent des points d'embranchement de la fonction $f(z)$, et que nous supposions, de plus, que le chemin d'intégration ajouté à la droite $z_0 z$ [fig. 10] soit une combinaison quelconque des contours $A_1, A_2, \ldots, A_p$, telle que $A_\lambda + A_\mu + \ldots$, on pourra écrire suivant la formule (46), les intégrales circulaires autour de ces points étant nulles [n° 25, *rem.*]:

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = u_{(\lambda,\mu\ldots)} + \sum_{(\lambda,\mu,\ldots)} \int^{(a_r)} f(z)\,dz \quad \ldots\ldots (72).$$

Dans cette formule $u_{(\lambda,\mu,\ldots)}$ désigne *l'intégrale spéciale*, prise le long de la droite $z_0 z$ [fig. 10], de la valeur $f_s(z)$ que reçoit la fonction $f(z)$, après que z a fait le tour de chemin $A_\lambda + A_\mu + \ldots$; de plus, le signe de sommation se rapporte aux *intégrales linéaires* qui sont prises le long des contours A_λ, A_μ, etc., c'est-à-dire, le long des chemins, en sens direct et rétrograde, qui joignent la limite inférieure z_0 avec les points $a_\lambda, a_\mu, \ldots$, situés sur les circonférences respectives (a_λ), (a_μ), ... [fig. 10], en observant toutefois, selon le n° 33, que l'on doit intégrer dans le sens rétrograde les valeurs nouvelles que reçoit la fonction $f(z)$ après que z a fait le tour des cercles (a_λ), (a_μ), etc. En écrivant *l'intégrale spéciale* [cfr (69)] et la *somme les intégrales linéaires* respectivement sous la forme

$$u_{(\lambda,\mu\ldots)} = \left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)\,dz\right) \quad \text{et} \quad \omega_{(\lambda,\mu\ldots)} = \sum_{(\lambda,\mu\ldots)} \int^{(a_r)} f(z)z \ \ldots (73),$$

la formule (72) prendra la forme suivante

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)\,dz\right) + \omega_{(\lambda,\mu\ldots)} \quad \ldots\ldots (74).$$

Dans cette formule la quantité $\omega_{(\lambda,\mu,\ldots)}$ sera une *période* toutes les fois que $f_s(z) = f(z)$, c'est-à-dire que la fonction $f(z)$ sera *œcodrome* le long du contour $A_\lambda + A_\mu + \ldots$, et par conséquent $u_{(\lambda,\mu\ldots)}$ = l'intégrale principale u_0 [(69)]. Alors, le multiple de la période $\varkappa\omega_{(\lambda,\mu,\ldots)}$ devra être ajouté à l'intégrale $u_{(\lambda,\mu\ldots)}$. *Le nombre des périodes sera donc déterminé par celui de toutes les manières possibles dont on pourra combiner les contours* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *dans une somme le long de laquelle la fonction* $f(z)$ *soit œcodrome.*

Par exemple, de l'intégrale $u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}$ proviendra la fonction périodique $z = \mathrm{Sin}\,(u_0 + \varkappa.2\pi)$ qui ne peut avoir qu'une période $\omega_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} \int^{|a_r|} \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{r=1}^{r=2} \int^{a_r} \{F_{r-1}(z) - F_r(z)\} = 2\pi$ [n° 37], puisqu'il n'y a qu'une seule combinaison $A_1 + A_2$ le long de laquelle la fonction $\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ est œcodrome.

51. Pour le cas où la fonction $f_s(z)$, dans la formule (74), ne sera pas égale à la fonction $f(z)$, c'est-à-dire, où $f(z)$ ne sera pas *œcodrome* le long du contour $A_\lambda + A_\mu + \ldots$, la quantite $\omega_{(\lambda,\mu\ldots)}$ n'aura plus le caractère de période, quoiqu'elle ressemble à une période en ce que cette quantité forme un terme *additif à l'intégrale spéciale* $\left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)dz\right)$, la fonction $f_s(z)$ étant la valeur que reçoit $f(z)$ après que z a fait le tour de chemin $A_\lambda + A_\mu + \ldots$. Nous appellerons $\omega_{(\lambda,\mu\ldots)}$, dans ce cas, une *périodoïde*, laquelle sera par conséquent caractérisée de la manière suivante. *La périodoïde est l'intégrale d'une fonction* $f(z)$, *prise le long d'un contour fermé* $A_\lambda + A_\mu + \ldots$, *pour lequel* $f(z)$ *est anœcodrome, de sorte qu'elle reçoit la valeur* $f_s(z)$ *après que* z *a décrit le chemin* $A_\lambda + A_\mu + \ldots$; *cette intégrale forme, de plus, un terme additif à l'intégrale speciale* $\left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)dz\right)$, *mais ne peut pas être multipliée, comme la période, par un entier quelconque* $\varkappa$.

Par exemple, de l'intégrale $u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ proviennent les deux périodoïdes $\omega_{(1)} = \int^a \{F(z) - F_1(z)\} = \pi$ et $\omega_{(2)} = \int^{a_2} \{F(z) - F_1(z)\} = -\pi$

[n° 37], l'intégrale spéciale étant dans l'un et l'autre cas $u_{(1)} = u_{(2)} = \left(\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \gamma\right) = -u_0, [\gamma = 1_\pi]$, d'où s'ensuit $\operatorname{Sin} u = \operatorname{Sin}(u_0 + 2\varkappa\pi) = \operatorname{Sin}(-u_0 + \pi + 2\varkappa\pi) = \operatorname{Sin}(-u_0 - \pi + 2\varkappa\pi)$, [voir l'exemple dans les n°s 37 & 50].

52. Si l'on veut indiquer par une notation spéciale que l'on a intégré autour du contour A_λ un certain nombre σ de fois et, en suite, autour du contour A_μ un nombre τ de fois, etc., on écrira la formule (72) comme il suit:

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = u_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} + \sum_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} \int^{|a_r|} f(z)\,dz \quad \ldots \quad (75),$$

d'où l'on aura, suivant la formule (73),

$$u_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} = \left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)dz\right) \quad \text{et} \quad \omega_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} = \sum_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} \int^{|a_r|} f(z)\,dz \quad \ldots (76),$$

et suivant la formule (74)

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \left(\int_{z_0}^{z} f_s(z)\,dz\right) + \omega_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)} \quad \ldots \quad (77).$$

Dans la formule (76), $u_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)}$ représente l'intégrale spéciale, prise le long de la droite $z_0 z$ [fig. 10], de la valeur $f_s(z)$ que reçoit la fonction $f(z)$ après que z a décrit le contour A_λ un nombre σ de fois, et en suite le contour A_μ un nombre τ de fois, etc., la quantité $\omega_{(\lambda^{(\sigma)},\, \mu^{(\tau)}\ldots)}$ désignant la somme des intégrales linéaires qui résultent de l'intégration faite σ fois autour du contour A_λ, τ fois autour du contour A_μ, etc.

Remarque. Si nous voulons indiquer par une notation spéciale que l'on a intégré autour des contours A_λ et A_μ, respectivement σ et τ fois mais en sens négatif, cela se fera en désignant les nombres σ et τ comme *négatifs*. Les parenthèses qui entourent σ et τ seront omises toutes les fois qu'il n'en résultera pas d'ambiguité.

53. En supposant que les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ etc. soient les fonctions primitives des fonctions respectives $f(z)$, $f_1(z)$ etc., on aura à l'aide de la formule (47), puisque $\sum_{r=1}^{r=\sigma} \{F_{r-1}(\alpha_\lambda) - F_r(\alpha_\lambda)\} = F(\alpha_\lambda) - F_\sigma(\alpha_\lambda)$:

$$\omega_{(\lambda^{(\sigma)})} = \int^{|a_{\lambda^{(\sigma)}}|} f(z)dz = \int^{\alpha_\lambda} \{F(z) - F_\sigma(z)\} + F_\sigma(z_0) - F(z_0) \quad \ldots \quad (78).$$

On aura donc cet énoncé remarquable:

En intégrant une fonction $f(z)$ σ *fois autour du contour* A_λ, *on aura un résultat identiquement égal à celui qu'on aura en intégrant* $f(z)$ *depuis* z_0 *jusqu'au point* α_λ *de la circonférence* $\textcircled{a_\lambda}$ *[fig. 10], ensuite* σ *fois autour de celle-ci, et, enfin, du point* α_λ *jusqu'au point* z_0.

54. Les intégrales, prises le long de chacun des contours A_1, A_2, ..., A_p séparément, que nous avons désignées dans la formule (73) par $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}$, ... $\omega_{(p)}$, sont des *périodoïdes*, puisque la fonction $f(z)$ n'est œcodrome le long d'aucun de ces contours, d'où il s'ensuit qu'il y aura, *au moins*, autant de périodoïdes que de points d'embranchement. Les périodes et les périodoïdes constituent les moments les plus caractéristiques des fonctions périodiques.

55. Le plus grand nombre de périodes distinctes Ω_1, Ω_2, etc. que pourra contenir une somme $\Sigma \varkappa \Omega$ [(68)] constituera le caractère d'après lequel on groupera les fonctions périodiques en "fonctions *simplement périodiques*", "*doublement périodiques*" et, en général, "$n^{uplement}$ *périodiques*". Toutefois, la somme de deux ou plusieurs périodes dont les arguments ne différeront que de $k\pi$ [k = un entier] doit être considérée comme *une* seule période. Alors, le nombre des termes de la somme $\Sigma \varkappa \Omega$, en supposant que leurs modules soient *différents*, sera indiqué en disant que la période est *simplement*, *doublement*, *triplement* et, en général, $n^{uplement}$ *indiquée*. Ainsi, en posant $\Omega_2 = \mu \Omega_1$, μ étant un nombre "réel" autre que ± 1, on aura la somme $\varkappa_1 \Omega_1 + \varkappa_2 \Omega_2 = \Omega_1 (\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu)$ qui doit être par conséquent considérée comme *une* période, quoique *doublement indiquée* par des entiers $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$, etc. Par exemple, dans l'integrale $u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$ $= u_0 + \Sigma \varkappa \Omega$ on aura les deux périodes π et $-\pi$ correspondant aux infinis $+i$ et $-i$; mais la fonction $z = \psi(u_0 + \varkappa\pi)$ sera *simplement périodique*, aussi la période sera *simplement indiquée* [$\mu = -1$]. Au contraire, en supposant que a représente une quantité quelconque autre que 0 et 1, on aura dans l'intégrale $u = \int_1^z \frac{e^z dz}{z(z-a)} = u_0 + \Sigma \varkappa \Omega$ les deux périodes $\Omega_1 = -\frac{2\pi i}{a}$ et $\Omega_2 = 2\pi i . \frac{e^a}{a}$ correspondant aux infinis 0 et a; mais la fonction $z = \psi\left(u_0 + \varkappa_1 . \frac{2\pi i}{a} + \varkappa_2 . 2\pi i \frac{e^a}{a}\right)$ sera *doublement pé-*

riodique pour a = une quantité complexe, et *simplement périodique*, quoique ayant une période *doublement indiquée*, pour a = une quantité "réelle"*), etc.

Remarque. En supposant que le rapport des périodes $\mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ soit un nombre "réel", et en supposant, de plus, que les multiples $x_1\,\Omega_1$ et $x_2\,\Omega_2$ fixent des points sur la même droite, de part et d'autre de l'origine, on reconnaîtra que les deux suites des points fixés par $x_1\,\Omega_1$ et $x_2\,\Omega_2$ ont tous les points communs pour lesquels on aura $k_1\,\Omega_1 = k_2\,\Omega_2$, c'est-à-dire, $\mu = \frac{k_1}{k_2}$. Pour μ = un nombre *irrationel* ces deux suites n'ont pas de points communs; mais la distance entre deux de ces points, pris de l'une et de l'autre suite, pourra être moindre qu'une quantité donnée aussi petite que l'on voudra, sans pouvoir être absolument nulle.

56. Supposons que les périodes Ω_1 et Ω_2 aient des arguments différant l'un de l'autre par des valeurs autres que $\pm k\pi$ [k = un entier], et marquons les points fixés par les multiples $x_1\,\Omega_1$ et $x_2\,\Omega_2$ de part et d'autre de l'origine; alors on aura, en menant par les points $x_1\,\Omega_1$ des droites $\parallel \Omega_2$ et par les points $x_2\,\Omega_2$ des droites $\parallel \Omega_1$, un réseau de parallelogrammes, dit *réseau de périodes*, qui est caractérisé par ce que chaque point de croisement de ce réseau est fixé par la somme $x_1\,\Omega_1 + x_2\,\Omega_2$ et, par conséquent, pourra être pris pour origine de la variable indépendante de la fonction périodique. Ainsi, étant donnée une fonction $n^{uplement}$ périodique, les périodes étant $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$, on aura un réseau particulier pour chaque combinaison deux à deux des multiples $x_1\,\Omega_1, x_2\,\Omega \ldots x_n\,\Omega_n$, d'où il s'ensuit *qu'une fonction $n^{uplement}$ périodique doit avoir* $\frac{n(n-1)}{2}$ *réseaux de périodes.* Par exemple, une fonction doublement périodique doit avoir *un* réseau de périodes, une fonction triplement périodique *trois* réseaux

*) Cet exemple a un intérêt spécial, parce que le rapport des périodes $\mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = -e^a$ est un nombre *irrationel* pour a = une quantité "réelle". Selon BRIOT et BOUQUET [Fonctions doublement périodiques, pag. 76] la fonction $z = \psi\left(u_0 + x_1\frac{2\pi i}{a} + x_2\frac{2\pi i e^a}{a}\right)$ serait, à cause de cela, une constante. Mais, d'après les méthodes que nous allons exposer plus loin, cette fonction $\psi(u)$ pourra être développée en une série convergente et variable avec u. Les hypothèses sur lesquelles ces auteurs ont fondé leur raisonnement ne pourront donc être en tout point correctes.

de périodes, une fonction quadruplement périodique *six* réseaux de périodes, etc. *).

57. Un simple et très-bel exemple d'une fonction périodique à plusieurs périodes est fourni par la fonction $z = \psi(u) = \psi(u_0 + \Sigma \varkappa \Omega)$ qui provient de l'intégrale $u = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}}$ et s'appelle "transcendante d'Abel". D'après la formule (73) on aura les n *périodoïdes* $\omega_{(1)}, \omega_{(2)} \ldots \omega_{(n)}$, pour lesquelles les intégrales spéciales seront $u_{(1)} = u_{(2)} = \ldots u_{(n)} = -u_0$; de plus, on en déduira les *périodes distinctes* $\omega_{(1,2)} = \omega_{(1)} - \omega_{(2)}$, $\omega_{(1,3)} = \omega_{(1)} - \omega_{(3)}$, $\omega_{(1,n)} = \omega_{(1)} - \omega_{(n)}$, au nombre de $(n-1)$, les autres périodes $\omega_{(2,3)} = \omega_{(2)} - \omega_{(3)} = \omega_{(1,3)} - \omega_{(1,2)}$ etc. étant les combinaisons de ces $(n-1)$ données. En supposant qu'un contour fermé P renferme les n points d'embranchement $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et qu'il se compose d'un cercle C décrit autour de z_0 comme centre, et du chemin $z_0 C z_0$ passant le long d'un rayon $z_0 C$ en sens direct et rétrograde, il s'ensuit, d'après la formule (49) pour n = un nombre pair, $z_0 = c$ étant un point au contour P,

$$\int^{P} f(z)dz = \omega_{(1)} - \omega_{(2)} + \omega_{(3)} - \omega_{(4)} + \ldots + \omega_{(n-1)} - \omega_{(n)} = \omega_{(1,2)} + \omega_{(3,4)} + \ldots \omega_{(n-1,n)} \ldots (79),$$

où les indices pourront être permutés d'une manière quelconque. Or, pour $z_0 C$ convergeant vers l'infini, la fonction $f(z)$, pour $n > 2$, convergera vers zéro, d'où il suit, d'après la formule (13), que l'intégrale prise le long du cercle C doit être nulle. Puisque $f(z)$, pour n = un nombre pair, est œcodrome le long du cercle C, l'intégrale, prise le long du rayon $z_0 C$ dans les sens direct et rétrograde, doit aussi être nulle. Donc, l'intégrale prise le long du contour A doit être identiquement nulle, d'où l'on aura *l'identité* suivante

$$\omega_{(1,2)} + \omega_{(3,4)} + \ldots \omega_{(n-1,n)} = 0 \quad \ldots\ldots (80),$$

les indices pouvant être combinés deux à deux d'une autre manière quelconque.

*) Chez BERTRAND [Calc. Intégral, pag. 601] se trouve un théorème sur "l'impossibilité d'une troisième période", d'après lequel il serait possible de construire un réseau *unique* dont les points de croisement remplaceraient *tous* les points de croisement des trois réseaux distincts de périodes, ce qui est, en général, évidemment impossible.

Pour $n =$ un nombre pair, on aura, d'après cela, $(n-2)$ *périodes distinctes.* La transcentante d'Abel sera donc *doublement périodique* pour $n = 3$ et $n = 4$, *quadruplement périodique* pour $n = 5$ et $n = 6$, et en général, $2\sigma^{uplement}$ *périodique* pour $n = 2\sigma+1$ et $n = 2\sigma+2$, le nombre des périodes étant ainsi *pair.*

58. Du n° précédent il s'ensuit immédiatement que la transcendante périodique $z = \psi(u) = \psi(u_0 + \Sigma\varkappa\Omega)$ découlant de l'intégrale

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-b)\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_p)}} = u_0 + \Sigma\varkappa\Omega$$

doit avoir *une période de plus* [pour $z = b$] que la transcendante du n° précédent, pour $n = p$. Ainsi, pour $p = 3$ et $p = 4$, la fonction $z = \psi(u)$ sera *triplement périodique*, pour $p = 5$ et $p = 6$, *quintuplement périodique*, et, en général, pour $p = 2\sigma+1$ et $p = 2\sigma+2$, $(2\sigma+1)^{uplement}$ *périodique*, le nombre des périodes étant par cela *impair.*

Remarque. On doit soigneusement observer que, dans le calcul des périodes, l'intégrale ci-dessus ne pourra être considérée comme cas particulier de l'intégrale du n° précédent, en laissant deux des points a_1, a_2, ..., a_n dans cette dernière intégrale se confondre à un seul. Cela ne pourra être admis, parce que d'après les principes établis au n° 20, tous les points critiques doivent être *isolés* les uns des autres par des distances *finies.*

IX. CHAMP DE SYNECTICITÉ DE LA LIMITE SUPÉRIEURE DE L'INTÉGRATION.

59. Supposons qu'un contour fermé P borne le champ de synecticité de la fonction $f(z)$ et soit, de plus,

$$u = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\ ;$$

alors, on reconnaîtra, d'après le n° 18, que l'intégrale u décrira un contour fermé R, lorsqu'on fera décrire à z un contour fermé P, d'où il s'ensuit qu'à tout point du contour P doit répondre un point unique et déterminé du contour R. D'après cela, en prenant deux points quelconques a et b

sur le contour P, l'un et l'autre de ces points doit donc avoir un point unique et déterminé, α et β, pour correspondant sur le contour R, d'où il suit qu'une déviation *continue* d'une partie aPb du contour P, tendant à se confondre avec l'autre partie $aP'b$ doit amener une déviation *continue* correspondante d'une partie $\alpha R\beta$ du contour R, tendant à se confondre avec l'autre $\alpha R'\beta$. Donc on en conclut *que* $z = \downarrow(u)$ *sera une fonction finie et continue de* u *pour le champ borné par le contour* R, *dès que* u *sera une fonction finie et continue de* z *pour le champ borné par le contour* P *[n° 19].*

60. Ensuite, pour reconnaître d'une manière décisive si la fonction $z = \downarrow(u)$ aura quelque point d'embranchement à l'intérieur du contour R ou non, il faut en faire un examen particulier, que nous allons maintenant exécuter. En effet, puisque la dérivée de l'intégrale $u = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ par rapport à la limite supérieure z ou

$$\frac{du}{dz} = f(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

[(15)], selon l'hypothèse, est synectique pour le champ P*), il s'ensuit que, pour $\mathrm{mod} f(z) > 0$,

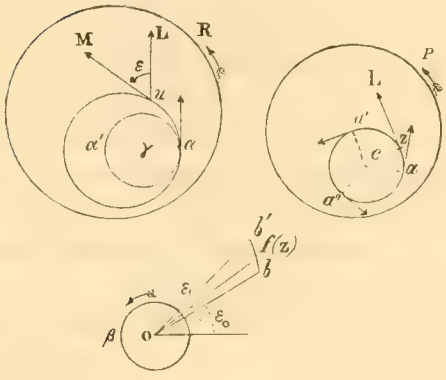
$$\mathrm{Arg}\, f(z) = \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

doit *varier d'une manière continue* pour tout contour aza' décrit par z à l'intérieur de ce champ [fig. 11]. En faisant décrire à u, à l'intérieur du contour R, un contour fermé infiniment petit $\alpha u\alpha$ autour d'un point γ, le contour correspondant aza', décrit par z à l'intérieur du contour P, doit aussi être infiniment petit, à cause que z, d'après le n° précédent, est une fonction finie et continue de u; de même, la fonction $f(z)$ doit décrire un contour infiniment petit bb' pour ce contour aza', d'où il s'ensuit que $\arg f(z)$ ou ε [(82)] variera entre des limites ε_0 et ε_1 qui diffèrent l'une de l'autre d'un intervalle infiniment petit. Mais, d'après le n° 6, on aura $\varepsilon =$ la différence entre les arguments des éléments des contours $\alpha u\alpha$ et aza' en des points correspondants u et z, ou, qui est la même chose, entre les directions des tangentes uM et $zL // uL$, d'où il suit que cette différence variera entre ces limites infiniment voisines ε_0 et ε_1.

*) Nous dirons, pour abréger, le champ P, le champ R etc., au lieu de dire, le champ borné par le contour fermé P, R, etc.

D'après cela, s'il était possible qu'au contour fermé $\alpha u \alpha$ correspondit un contour ouvert aza', il s'ensuivrait, d'après le n° 18, qu'en faisant décrire par z le complément $a'a''a$ de son contour fermé aza l'intégrale u décrirait de nouveau un contour fermé tel que $\alpha\alpha'\alpha$, etc.; alors la différence entre les limites de la variation de ε doivent, dans tous les cas, surpasser de beaucoup l'intervalle infiniment petit $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$. Donc, la fonction $z = \psi(u)$ sera nécessairement œcodrome pour tout point γ pour lequel $\mod f(z) > 0$; et, alors, z sera une fonction uniforme de u pour le champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z)$, *dès que* $f(z)$ *n'aura aucun zéro au dedans de ce champ* P. Nous aurons donc, à l'aide du n° précédent, cet énoncé très-important:

Fig. 11.



Si la fonction $f(z)$ *sous le signe d'intégration est synectique pour un champ donné* P, *la limite supérieure* z *de l'intégrale sera une fonction synectique de l'intégrale* u *pour le champ* R *correspondant au champ* P, *pourvu que* $f(z)$ *n'ait aucun zéro à l'intérieur du contour* P.

Remarque. De la démonstration donnée ci-dessus il suit qu'en faisant décrire à la variable indépendante d'une fonction $\psi(u)$ un contour fermé très-petit au dedans du champ de synecticité R de la fonction, la fonction elle-même décrira un contour fermé très-petit qui s'approchera, de plus en plus, d'être semblable au contour décrit par u, jusqu'à ce que les deux contours se réduisent l'un et l'autre à un point.

61. En supposant, dans la formule (81), que $f(c)$ soit nul, ou que $f(z)$ ait un zéro $z = c$ à l'intérieur de son champ de synecticité, on aura suivant la formule (55), en posant $h = \varrho_\omega$ et $f(c + \varrho_\omega) = r_\varepsilon$:

$$r_\varepsilon = \varrho_\omega \cdot \frac{f'(c)}{1} + (\varrho_\omega)^2 \cdot \frac{f''(c)}{\lfloor 2} + \ldots .$$

Soit $f^{(\varkappa)}(c)$ la première dévivée qui ne s'annule pas pour $z = c$; alors

$$r_\varepsilon = (\varrho_\omega)^\varkappa \cdot \frac{f^{(\varkappa)}(c)}{\lfloor \varkappa} + s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83),$$

s désignant la somme de tous les termes comprenant les dérivées d'un ordre supérieur au $\varkappa^{ième}$. D'après cela, en prenant ϱ assez petit, on pourra

faire le module du premier terme du second membre plus grand que le module de la somme de tous les termes suivants ou

$$\varrho^{\varkappa} \cdot \operatorname{mod} \frac{f^{(\varkappa)}(c)}{\lfloor \varkappa} > \bar{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84),$$

d'où il suit que ε décrira l'angle $2\varkappa\pi$, tandis que ω décrira l'angle 2π. L'intégrale u décrira, par conséquent, un contour fermé infiniment petit $\alpha u \alpha$ [fig. 11] autour du point γ, correspondant au point c, en faisant $(\varkappa+1)$ *fois* le tour [(81)], tandis que z décrit le contour infiniment petit $a z c' a'' a$ autour du point c, en n'en faisant qu'*une fois* le tour. Ainsi, au premier tour de $\alpha u \alpha$ répondra une partie $a a'$ de $a z a$, au second tour une partie $a' a''$, etc. Donc, à un point donné α sur le contour $\alpha u \alpha$ répondront $(\varkappa+1)$ points a, a', a'' etc. sur le contour $a z a' a'' a$. Le point $u = \gamma$ de la fonction $z = \downarrow(u)$ doit donc être un point d'embranchement avec $(\varkappa+1)$ branches distinctes, provenant de ce qu'on fait décrire à u un contour fermé autour du point γ, en faisant le tour une, deux, ... jusqu'à $(\varkappa+1)$ fois [n° 2]. De là, on aura cet énoncé qui sera d'une importance singulière:

Si la fonction $f(z)$, *sous le signe de l'intégration, a un zéro* $z = c$ *à l'intérieur de son champ de synecticité, et que la dérivée* $f^{(\varkappa)}(z)$ *soit la première qui ne s'annule pas pour* $z = c$, *la limite supérieure* z *de l'intégration sera une fonction multiforme* $\downarrow(u)$ *de l'intégrale* u, *les branches de la fonction* $\downarrow(u)$ *étant au nombre de* $(\varkappa+1)$, *quand le point d'embranchement* $u = \gamma$ *sera donné par la relation* $c = \downarrow(\gamma)$.

Par exemple, si l'on a $u = \int_{z_0}^{z} (z-c)^n dz$, la fonction $z = \downarrow(u) = c + \sqrt[n+1]{(n+1)u + (z_0-c)^{n+1}}$ sera multiforme, les branches de la fonction $\downarrow(u)$ étant au nombre de $(n+1)$, quand on déterminera, par la relation $c = \downarrow(\gamma)$, le point d'embranchement $\gamma = -\dfrac{(z_0-c)^{n+1}}{n+1}$.

62. En désignant par T_Θ la fonction primitive du second membre de la formule (83), on pourra la mettre, en s'appuyant sur la formule (81), sous la forme suivante

$$T_\Theta = (\varrho_\omega)^{\varkappa+1} \cdot \frac{f^{(\varkappa)}(c)}{\lfloor \varkappa+1} + s_1 = u - \gamma \quad \ldots\ldots \quad (85),$$

où s_1 désigne la fonction primitive de s [(83)], $\varrho_{\prime\prime\prime}$ étant la variable indépendante. Puisque $T = 0$ ou $u = \gamma$ correspond à $\varrho = 0$ ou $z = c$, la condition

$$\varrho^{\varkappa+1} \cdot \frac{f^{(\varkappa)}(c)}{\lfloor \varkappa + 1} > \bar{s}_1$$

sera *a fortiori* satisfaite en même temps que la condition (84). De là il s'ensuit, ϱ satisfaisant à la condition (84), qu'à chaque angle $\frac{2\pi}{\varkappa+1}$, décrit par ω dans la formule (85), répondra un angle 2π décrit par Θ, et aussi que, réciproquement, à chaque angle 2π décrit par Θ, répondra un angle $\frac{2\pi}{\varkappa+1}$ décrit par ω. Donc, lec angles aca', $a'ca''$ etc. [fig. 11], sont égaux. Ensuite, en supposant les parties aa', $a'a''$ etc. du contour aza égales, l'intégrale u décrira identiquement le même contour $\alpha u \alpha$ chaque fois que z décrit quelqu'une de ces parties aa', $a'a''$ et aussi, réciproquement, z décrira les parties égales aa', $a'a''$ etc. du contour aza chaque fois que u décrit son contour fermé $\alpha u \alpha$. D'après cela, en faissant décrire par u une ou plusieurs fois le contour $\alpha u \alpha$ dont le premier élément coïncide avec la direction de la tangente au point α [fig. 11], z décrira un contour dont le premier élément coïncidera avec la direction de la tangente menée ou au point a, ou au point a', ou au point a'', etc., selon que u a décrit son contour $\alpha u \alpha$ une, deux, etc., jusqu'à $(\varkappa+1)$ fois. Toutes les branches décrites par z doivent donc être égales, ne pouvant différer, l'une de l'autre, que par la direction que prennent leurs premiers éléments en partant ou du point a, ou du point a', ou du point a'', c'est-à-dire que les directions initiales de ces branches différeront les unes des autres successivement de l'angle $\frac{2\pi}{\varkappa+1}$. Pour ϱ et T convergeant en même temps vers zéro, les points a, a', a'', etc. coïncideront tous en le point c, et alors $(\varkappa+1)$ branches *égales* et *symétriquement placées* partiront du point c, correspondant au point d'embranchement γ. Donc, nous aurons cet énoncé important:

Si la fonction $f(z)$ sous le signe d'intégration a un zéro $z = c$ à l'intérieur de son champ de synecticité, la dérivée $f^{(\varkappa)}(z)$ étant la première qui ne s'annule pas pour $z = c$, la limite supérieure z comme fonction de l'intégrale u ou $z = \downarrow(u)$ représentera $(\varkappa+1)$ branches égales et symétriquement placées autour du point c, correspondant au point d'embranchement γ.

63. On reconnaît que les énoncés que nous venons d'établir aux n°s 60—62 s'appliqueront immédiatement aux fonctions périodiques qui ne sont que les limites supérieures des intégrales multiformes et fonctions de ces intégrales [n° 47]. On aura donc ces énoncés très-importants:

1° *Une fonction périodique* $z = \downarrow(u)$, *provenant de l'égalité* $f(z) = \frac{du}{dz}$, *est synectique pour un champ* R, *correspondant au champ de synecticité* P *de la fonction* $f(z)$, *si* $f(z)$ *n'a aucun zéro à l'intérieur de* P.

Par exemple, la fonction $z = \operatorname{tg} u$, provenant de l'égalité $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{du}{dz}$, sera synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z)$ [P pouvant comprendre tous les points du plan autres que $\pm i$], puisque $f(z)$ n'a aucun zéro à l'intérieur de P; de même, la fonction périodique $z = \downarrow(u)$, dite transcendante d'Abel, laquelle provient de l'égalité $f(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}} = \frac{du}{dz}$, sera synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z)$ [P pouvant comprendre tous les points du plan autres que $a_1, a_2, \ldots a_n$], puisque $f(z)$ n'a aucun zéro à l'intérieur de P, etc.

2° *Une fonction périodique* $z = \downarrow(u)$, *provenant de l'égalité* $f(z) = \frac{du}{dz}$, *est finie et continue, mais multiforme, ayant* $(\varkappa + 1)$ *branches égales et symétriquement placées autour du point* c, *pour un champ* R, *correspondant au champ de synecticité* P *de la fonction* $f(z)$, *si* $f(z)$, *à l'intérieur de* P, *a le zéro* $z = c$, *la dérivée* $f^{(\varkappa)}(z)$ *étant la première qui ne s'annule pas pour* $z = c$, *quand le point d'embranchement* $u = \gamma$ *sera donné par la relation* $c = \downarrow(\gamma)$.

Par exemple, la fonction périodique $z = \downarrow(u) = \{e^u + 1)(e^u - 1)\}^{\frac{1}{2}}$ [πi étant la période], provenant de l'égalité $f(z) = \frac{z}{1+z^2} = \frac{du}{dz}$, sera finie et continue mais biforme, ayant deux branches égales et symétriquement placées autour du point 0, pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z)$, puisque $f(z)$, à l'intérieur de P, a le zéro $z = 0$, la dérivée $f'(z)$ étant la première qui ne s'annule pas pour $z = 0$, quand le point d'embrachement $u = \gamma$ aura la valeur 0 ou

$k\pi i$ [k = un entier], déterminée par la relation $0 = \{(e^{\gamma}+1)(e^{\gamma}-1)\}^{\frac{1}{2}}$. De même, l'inverse $z = \psi(u)$ de l'intégrale elliptique de troisième espèce, $u = \int_0^z \frac{(z-c)^2 dz}{(z-b)\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}$, sera finie et continue mais triforme, ayant trois branches égales et symétriquement placées autour du point c, pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \frac{(z-c)^2}{(z-b)\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}}$, puisque $f(z)$, à l'intérieur de P, a le zéro $z = c$, la dérivée $f'(z)$ étant la première qui ne s'annule pas pour $z = c$, et le point d'embranchement $u = \gamma$ étant donné par la relation $c = \psi(\gamma)$, etc.

64. Si la fonction $z = \psi(u)$ est périodique et que l'on ait $0 = \psi(u_1)$, cette fonction pourra être représentée par $z = \int_{u_1}^{u} \psi'(u)\,du$, d'où il suit que la limite supérieure u comme fonction de l'intégrale z ou $u = \psi^{-1}((z))$ devra représenter des branches égales et symétriquement placées autour de tout zéro $u = \gamma$ de l'équation $\psi'(u) = 0$ [n° 62], le point d'embranchement c étant donné par la relation $\gamma = \psi^{-1}((c))$ ou $c = \psi(\gamma)$, et le nombre des branches par l'indice $\varkappa$ de la première dérivée $\{\psi'(u)\}^{\varkappa-1} = \psi^{(\varkappa)}(u)$ qui ne s'annulera pas pour $u = \gamma$. On aura donc cet énoncé qui sera d'une importance singulière pour les fonctions inverses des fonctions périodiques:

Si la fonction $z = \psi(u)$ est périodique, la fonction inverse $u = \psi^{-1}((z))$ sera multiforme, ayant $\varkappa$ branches égales et symétriquement placées autour de tout zéro $u = \gamma$ de l'équation $\psi'(u) = 0$, le point d'embranchement c étant donné par la relation $c = \psi(\gamma)$, et le nombre des branches par l'indice $\varkappa$ de la première dérivée $\psi^{(\varkappa)}(u)$ qui ne s'annule pas pour $u = \gamma$.

Par exemple, si l'on prend $z = \operatorname{Sin} u$, la fonction inverse $u = \operatorname{Sin}^{-1}((z)) = \operatorname{arc\,sin}((z))$ sera multiforme, ayant deux branches égales et symétriquement placées autour de tout zéro $u = (\pm\frac{1}{2}\pi + 2k\pi)$ *) de l'équation $\operatorname{Cos} u = 0$, le point d'embranchement $+1$ ou -1 étant donné par la relation $\pm 1 = \operatorname{Sin}(\pm\frac{1}{2}\pi + 2\varkappa\pi)$ et le nombre des branches par l'indice 2 de la première dérivée $(\operatorname{Sin} u)'' = -\operatorname{Sin} u$ qui ne s'annule pas pour $u = \pm\frac{1}{2}\pi + 2\varkappa\pi$. L'exactitude de ce raisonnement sera, de plus, con-

*) Ici et dans ce qui va suivre k représentera un entier, positif, négatif ou nul.

statée par la solution connue $u = \text{arc sin}((z)) = \frac{1}{i}\log((iz \pm \sqrt{1-z^2}))$. Ensuite, soit $z = e^u$; puisque tout zéro de l'équation $\psi'(u) = e^u = 0$ est donné par la relation $u = -\infty + 2\kappa\pi i$, l'inverse $u = \log((z))$ doit représenter des branches *parallèles* partant des points $-\infty + 2k\pi i$, le point d'embranchement 0 étant donné par la relation $0 = e^{-\infty + 2k\pi i}$. De même, si l'on a $z = \text{tg}\, u$, l'inverse $u = \text{arctg}((z))$ doit représenter des branches *parallèles* partant des points $\pm i\infty + k\pi$, puisque tout zéro de l'equation $\psi'(u) = \frac{1}{\text{Cos}^2 u} = 0$ est quelqu'une des valeurs $u = \pm i\infty + \kappa\pi$, le point d'embranchement $+i$ ou $-i$ étant donné par la relation $\pm i = \text{tg}(\pm i\infty + \kappa\pi)$. Ce raisonnement se vérifiera, d'ailleurs, par la solution connue $u = \frac{1}{2i}\log\left(\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right)$.

X. REPRODUCTIVITÉ DES FONCTIONS COMPLEXES.

65. Une fonction $\psi(u)$ est dite *reproductive* relativement à une quantité γ, si l'on a $\psi(\gamma u) = \gamma\psi(u)$.

Une fonction $\psi(u)$ est dite *reproductive* de l'ordre α relativement à une quantité γ, si l'on a $\psi(\gamma u) = \gamma^\alpha . \psi(u)$.

Remarque. Une fonction $\psi(u)$, qui est reproductive de l'ordre 0 relativement à une quantité γ, est dite *irréproductive* par rapport à cette quantité. Ainsi, si l'on a $\psi(\gamma u) = \gamma^0 . \psi(u) = \psi(u)$, cette fonction est dite irréproductive relativement à γ.

66. Si la fonction $\psi(u)$ est reproductive relativement à γ, c'est-à-dire, si l'on a $\psi(u) = \frac{1}{\gamma}\psi(\gamma u)$, sa dérivée première $\psi'(u) = \psi'(\gamma u)$ sera irréproductive relativement à la même quantité.

67. Une fonction synectique $\psi(u)$ étant *irréproductive relativement aux σ racines $\sigma^{\text{ièmes}}$ de l'unité*, c'est-à-dire, $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\sigma-1}$ $\left[\gamma = 1_{\frac{2\pi}{\sigma}}\right]$,

on aura, d'après la formule (66), le cercle de convergence étant convenablement choisi:

$$\psi(u) = \psi(0) + \frac{u^\sigma}{\lfloor\sigma} \cdot \psi^{(\sigma)}(0) + \frac{u^{2\sigma}}{\lfloor 2\sigma} \cdot \psi^{(2\sigma)}(0) + \ldots \quad \ldots \quad (86).$$

En comparant cette série avec la série $\psi(u) = \psi(0) + \frac{u}{1} \cdot \psi'(0) + \frac{u^2}{\lfloor 2} \cdot \psi''(0) + \ldots$, on aura les égalités suivantes:

$$\psi'(0) = \ldots = \psi^{(\sigma-1)}(0) = \psi^{(\sigma+1)}(0) = \ldots = 0 \quad \ldots \quad (87).$$

68. Une fonction synectique $\psi(u)$ étant *reproductive relativement aux σ racines $\sigma^{ièmes}$ de l'unité*, savoir, $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\sigma-1}$, on aura, d'après la formule (67), le cercle de convergence étant convenablement choisi:

$$\psi(u) = \frac{u}{1} \cdot \psi'(0) + \frac{u^{\sigma+1}}{\lfloor\sigma+1} \cdot \psi^{(\sigma+1)}(0) + \frac{u^{2\sigma+1}}{\lfloor 2\sigma+1} \cdot \psi^{(2\sigma+1)}(0) + \ldots \ldots (88).$$

En comparant cette série avec la série $\psi(u) = \psi(0) + \frac{u}{1} \cdot \psi'(0) + \frac{u^2}{\lfloor 2} \cdot \psi''(0) + \ldots$, on aura les égalités suivantes:

$$\psi(0) = \psi''(0) = \ldots = \psi^{(\sigma)}(0) = \psi^{(\sigma+2)}(0) = \ldots = 0 \quad \ldots \quad (89).$$

69. Une fonction $f(z)$ étant irréproductive relativement à une quantité $\frac{1}{\gamma}$, si l'on a $u = \int_0^z f(z)\,dz$, la fonction $z = \psi(u)$ sera reproductive relativement à γ, si l'on fait correspondre l'intégrale principale $u_0 = 0$ à $z = 0$, ou $\psi(0) = 0$.

Car, si l'on introduit $\zeta = \gamma z$, on aura $u = \int_0^z f(z)\,dz = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma z} f(\zeta)\,d\zeta$, d'où l'on tire $z = \psi(u)$ et $\gamma z = \psi(\gamma u)$; donc

$$\psi(\gamma u) = \gamma\psi(u) \quad \ldots \quad \ldots \quad (90).$$

70. Une fonction $z = \psi(u)$ étant reproductive relativement à une quantité γ, ou $\gamma z = \psi(\gamma u)$, son inverse $u = \psi^{-1}(z)$ sera aussi reproductive relativement à γ, ou $\gamma u = \psi^{-1}(\gamma z)$.

Généralisation du théorème fondamental d'Abel.

71. Maintenant, en nous appuyant sur les propriétés reproductives de certaines fonctions "algébriques", nous allons faire une généralisation du théorème fondamental bien connu, donné par Abel pour les fonctions elliptiques et abéliennes, généralisation qui sera d'une grande importance dans nos recherches ultérieures.

En effet, soient σ, μ, m et n des *entiers positifs*, et posons

$$\sigma \geq 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91);$$

posons, ensuite,

$$\left.\begin{aligned} z(\alpha_0 + \alpha_1 z^\sigma + \ldots \alpha_\mu z^{\mu\sigma}) &= \varphi(z) \\ a_0 + a_1 z^\sigma + \ldots a_m z^{m\sigma}) &= \chi(z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92),$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\mu$ désignent des *paramètres arbitraires*, et $a_0, a_1, \ldots a_m$ des *constantes:* alors la fonction $\varphi(z)$ sera *reproductive* relativement aux σ racines $\sigma^{ièmes}$ de l'unité, $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\sigma-1}$, $[\gamma = 1_{\frac{2\pi}{\sigma}}]$; mais, au contraire, la fonction $\chi(z)$ sera *irréproductive* relativement aux mêmes quantités. Posons, de plus,

$$F(z) = \{\chi(z)\}^n - \{\varphi(z)\}^\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93);$$

la fonction $F(z)$ sera donc *irréproductive* relativement à une puissance entière quelconque γ^r; mais la dérivée $F'(z)$ sera *reproductive de l'ordre* $(\sigma - 1)$ relativement à la même quantité, c'est-à-dire que

$$F'(\gamma^r z) = (\gamma^r)^{\sigma-1} . F'(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94).$$

En posant, dans la formule (93),

$$F(z) = \{\chi(z)\}^n - \{\varphi(z)\}^\sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95),$$

cette équation sera de degré $g\sigma$ par rapport à z, g désignant le plus grand des deux nombres $(\mu\sigma + 1)$ ou mn, s'ils diffèrent l'un de l'autre, et leur valeur commune, s'ils sont égaux, ce que nous représentons par la notation

$$g = \max . \left\{\begin{matrix} \mu\sigma + 1 \\ mn \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96).$$

Or, par rapport à z^σ, l'équation (95) est du degré g, et, par suite, les g racines de cette équation seront de la forme

$$z_1^\sigma, \quad z_2^\sigma, \quad \ldots, \quad z_g^\sigma .$$

Donc, l'équation (95), résolue par rapport à z, fournira g racines *à modules distincts*,

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_g,$$

les $(\sigma-1)g$ autres racines étant données en multipliant chacune des g premières par $\gamma,\ \gamma^2,\ \ldots,\ \gamma^{\sigma-1}$.

De plus, l'équation (95) se décomposera dans le système d'équations suivant,

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}} \\ \gamma.\varphi(z) &= \{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \gamma^{\sigma-1}.\varphi(z) &= \{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97),$$

où la première équation, comme reproduisant toutes les autres si l'on y remplace z par $\gamma.z,\ \ldots\ \gamma^{\sigma-1}.z$, doit être satisfaite par les racines à modules distincts $z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_g$.

Supposons maintenant que l'équation (95), lorsqu'on fait *varier* les paramètres $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_\mu$, soit satisfaite *identiquement;* alors z, comme représentant l'une quelconque des racines $z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_g$, doit aussi *varier*, d'où il résulte, en différentiant l'identité (95) par rapport à toutes ces variables:

$$dF(z) = F'(z)dz - \sigma\{\varphi(z)\}^{\sigma-1}.\delta\varphi(z) = 0 \quad \ldots \quad (98),$$

en désignant, comme l'a fait Abel, par $F'(z)$ la dérivée de $F(z)$ par rapport à z considéré comme variant, et par $\delta\varphi$ la différentielle *totale* de $\varphi(z)$ par rapport à *toutes* les autres variables $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_\mu$. En introduisant la notation

$$\{\varphi(z)\}^{\sigma-2}.\delta\varphi(z) = \Theta(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99),$$

où l'on doit observer que $\Theta(z)$ est un polynôme *entier* [(91)] et *reproductif de l'ordre* $(\sigma-1)$ par rapport à γ^r, ou

$$\Theta(\gamma^r.z) = (\gamma^r)^{\sigma-1}.\Theta(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100),$$

on pourra, à l'aide de l'identité $\varphi(z) = \{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}$ [(97)], mettre l'identité (98), sous la forme suivante

$$\frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = \sigma\cdot\frac{\Theta(z)}{F'(z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101).$$

Si l'on introduit dans cette formule les racines $z_1, z_2, \ldots, z_g$ au lieu de z, on aura, en ajoutant,

$$\sum_{r=1}^{r=g} \frac{dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = \sigma \cdot \sum_{r=1}^{r=g} \frac{\Theta(z_r)}{F'(z_r)} \quad \ldots\ldots\ldots (102).$$

La fonction $F(z)$ dans la formule (93) pourra, en introduisant les racines $z_1^\sigma, z_2^\sigma, \ldots, z_g^\sigma$, se mettre sous la forme

$$F(z) = \{\chi(z)\}^n - \{\varphi(z)\}^\sigma = A(z^\sigma - z_1^\sigma)(z^\sigma - z_2^\sigma) \ldots (z^\sigma - z_g^\sigma) \ldots (103),$$

où A est une quantité indépendante de z.

Enfin, en supposant qu'un contour fermé P renferme dans son intérieur toutes les racines $z_1, z_2, \ldots, z_g$, avec les racines qui proviennent de la multiplication de chacune de celles-ci par $\gamma, \ldots, \gamma^{\sigma-1}$, on aura, d'après les formules (43) et (41), toutes ces racines étant *simples:*

$$\int^P \frac{\Theta(\zeta)d\zeta}{F(\zeta)} = 2\pi i \cdot \sum_{r=1}^{r=g} \left\{ \frac{\Theta(z_r)}{F'(z_r)} + \frac{\Theta(\gamma z_r)}{F'(\gamma z_r)} + \ldots + \frac{\Theta(\gamma^{\sigma-1} \cdot z_r)}{F'(\gamma^{\sigma-1} \cdot z_r)} \right\}.$$

Mais, suivant les formules (94) et (100), on a

$$\frac{\Theta(z_r)}{F'(z_r)} = \frac{\Theta(\gamma z_r)}{F'(\gamma z_r)} = \ldots = \frac{\Theta(\gamma^{\sigma-1} \cdot z_r)}{F'(\gamma^{\sigma-1} \cdot z_r)};$$

donc, l'intégrale en question pourra se mettre sous la forme

$$\int^P \frac{\Theta(\zeta)d\zeta}{F(\zeta)} = 2\pi i\sigma \cdot \sum_{r=1}^{r=g} \frac{\Theta(z_r)}{F'(z_r)} \quad \ldots\ldots (104).$$

D'après cela, en supposant que l'on ait $\zeta = \varrho_\omega$ et $\varrho = \text{const.}$, c'est-à-dire, que P soit un cercle, le centre étant à l'origine, cette intégrale deviendra

$$\int^P \frac{\Theta(\zeta)d\zeta}{F(\zeta)} = i\int_0^{2\pi} \frac{\zeta\Theta(\zeta)d\omega}{F(\zeta)}.$$

Pour $\lim \varrho = \infty$, on aura $\lim \frac{\zeta\Theta(\zeta)}{F(\zeta)} = 0$ toutes les fois que l'excès E du degré D du dénominateur sur celui N du numérateur sera au moins égal à l'unité, ou que l'on aura

$$E = D - N \geq 1 \quad \ldots\ldots\ldots (105).$$

Or, la condition (105) est toujours satisfaite, puisque l'on a, suivant la formule (93), $D = g\sigma$ et, suivant la formule (99), $N = (\mu\sigma+1)(\sigma-1)+1 = (\mu\sigma+1)\sigma-\mu\sigma$; donc, on aura, d'après la formule (96), $E \geqq \mu\sigma$, d'où il s'ensuit, à l'aide de la formule (13), que *l'intégrale* $\int^{P} \frac{\omega(\zeta)\,d\zeta}{F(\zeta)}$ *sera identiquement nulle.* Nous aurons donc, en comparant les formules (104) et (102), *l'identité* suivante

$$\sum_{r=1}^{r=g} \frac{dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106),$$

où les quantités $z_1, z_2, \ldots z_g$ satisferont au système suivant d'équations [(97)]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \{\chi(z_1)\}^{\frac{n}{\sigma}} \\ \varphi(z_2) &= \{\chi(z_2)\}^{\frac{n}{\sigma}} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(z_g) &= \{\chi(z_g)\}^{\frac{n}{\sigma}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107).$$

Ce système d'équations contient $\mu+1$ paramètres arbitraires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, et g équations, d'où il suit, en observant les conditions (91) et (96), qu'on pourra toujours éliminer *tous* ces paramètres. Les résultats de l'élimination obtenus, exprimant des relations *distinctes*, seront donc au nombre de $(g-\mu-1)$, et nous les désignerons comme il suit,

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(z_1, z_2, \ldots) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{g-\mu-1}(z_1, z_2, \ldots) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108),$$

système d'équations, qui ne contient que les *racines* $z_1, z_2, \ldots, z_g$ et les *constantes* $a_0, a_1, \ldots, a_m$, et qui, de plus, *constitue un système complet de fonctions primitives de l'équation différentielle (106).*

Remarque. Puisque le système (107) contient $(\mu+1)$ paramètres arbitraires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, on pourra disposer, d'une manière quelconque, de $(\mu+1)$ des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_g$ en les considérant, comme des *variables indépendantes.* Pour le cas où l'on aura, dans la formule (96), $g = mn$, un ou plusieurs des paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ pourront être

nuls; alors, on pourra disposer *d'autant* des quantités $z_1, z_2, \ldots z_g$ prises comme variables indépendantes, qu'il y aura de paramètres dans la formule (107) qui ne seront pas nuls.

72. Si l'on pose

$$du = \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} \quad \text{et} \quad u = \int_a^z \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109),$$

z sera, en général, une fonction périodique de u [VIII] que nous désignons

$$z = \downarrow(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110),$$

en supposant que la limite inférieure de l'intégration corresponde à la valeur 0 de l'intégrale principale, ou que $a = \downarrow(0)$. La dérivée de la fonction périodique sera, d'après la formule (109),

$$\downarrow'(u) = \{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}} = \{\chi[\downarrow(u)]\}^{\frac{n}{\sigma}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111).$$

En intégrant la formule (106) depuis a jusqu'aux valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_g$ [(10)], on aura les deux expressions suivantes comme *identiques:*

$$\int_a^{z_1} \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} + \int_a^{z_2} \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} + \ldots + \int_a^{z_g} \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = 0 \quad . \ldots . \quad (112),$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_g = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113).$$

Si l'on introduit dans la formule (110) $z_1, z_2, \ldots, z_g$ au lieu de z, on aura

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \downarrow(u_1) \\ z_2 &= \downarrow(u_2) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ z_g &= \downarrow(u_g) \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114),$$

et, à l'aide de formule (113),

$$z_g = \downarrow(u_g) = \downarrow[-(u_1 + u_2 + \ldots + u_{g-1})] \quad . \quad . \quad . \quad (115),$$

c'est-à-dire que z_g ou $\downarrow[-(u_1 + u_2 + \ldots + u_{g-1})]$, selon la formule (108), pourra s'exprimer au moyen des quantités $z_1, z_2, \ldots z_{g-1}$ ou $\downarrow(u_1)$, $\downarrow(u_2)$, $\ldots \downarrow(u_{g-1})$. Donc, le *"théorème d'addition" est établi pour la fonction périodique* $\downarrow(u)$ *qui découle de l'équation différentielle* $du = \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}}$.

Remarque 1. Si l'on introduit dans les résultats de l'élimination (108) les fonctions $\psi(u_1)$, $\psi(u_2)$, ..., $\psi(u_{g-1})$ et $\psi[-(u_1+u_2+\ldots+u_{g-1})]$ au lieu des quantités z_1, z_2, ..., z_{g-1} et z_g, les paramètres éliminés étant au nombre de $(\mu+1)$, ces résultats de l'élimination devront contenir $\mu+1$ des quantités u_1, u_2, ..., u_{g-1} comme variables *indépendantes* [n° 71, *rem.*], les autres $g-\mu-2$ quantités étant, en vertu des équations (108), des variables *dépendantes.*

Remarque 2. La généralisation que nous venons de faire du "théorème d'addition" donné par Abel comprend la classe immense des fonctions périodiques qui découlent du type général de la différentielle $du = \frac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}}$. Quand le théorème d'Abel, dans sa forme la plus générale, est borné au cas où $n=1$ et $\sigma=2$, notre généralisation comprend tous les cas possibles, σ, μ, m et n représentant des entiers positifs quelconques, excepté $\sigma=1$ [(91)]. Nous ferons dans ce qui va suivre des applications très-importantes de cette généralisation.

73. En multipliant l'identité (101) par un polynôme entier et rationel $\theta(z)$ qui soit *irréproductif* relativement à γ^{ν} $[\gamma = 1_{2\tau}]$ et de degré $\tau\sigma$, savoir,

$$\theta(z) = b_0 + b_1 z^{\sigma} + \ldots + b_{\tau} z^{\tau\sigma},$$

on trouvera [voir (102)]

$$\sum_{r=1}^{r=g} \frac{\theta(z_r)\,dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = \sigma \cdot \sum_{r=1}^{r=g} \frac{\theta(z_r)\,\Theta(z_r)}{F'(z_r)},$$

où l'on démontre d'une manière toute semblable à celle du n° 71 que le second membre sera identiquement nul, sous la condition [voir (105)]

$$g\sigma - \{(\mu\sigma+1)\sigma + \tau\sigma - \mu\sigma\} \geqq 1 \quad \ldots\ldots \quad (116).$$

On aura donc l'identité suivante [voir (106)],

$$\sum_{r=1}^{r=g} \frac{\theta(z_r)\,dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117),$$

et par l'intégration [voir 112)]:

$$\int_a^{z_1} \frac{\theta(z)\,dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} + \int_a^{z_2} \frac{\theta(z)\,dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} + \ldots + \int_a^{z_g} \frac{\theta(z)\,dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = 0 \ldots (118),$$

les limites supérieures de l'intégration satisfaisant au système (107) ou, après l'élimination des paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$, au système (108), comme constituant *un système complet de fonctions primitives de l'équation différentielle* (*117*).

Remarque. Il faut observer comme un fait très remarquable que les limites supérieures de l'intégration, dans les formules (112) et (118), satisfont au même système d'équations (107) ou (108), comme système complet des fonctions primitives, la forme du polynôme $\theta(z)$ étant quelconque, pourvu que la condition (116) soit satisfaite pour les limites supérieures de la formule (118).

74. En multipliant l'identité (101) membre par membre par l'identité $\dfrac{dz}{\{\chi(z)\}^{\frac{n}{\sigma}}} = \dfrac{dz}{\varphi(z)}$ [(97)], et observant que $\dfrac{dz}{\varphi(z)}$ est *irréproductif* par rapport à γ' [$\gamma = 1_{2\tau}$]; en posant, de plus, l'égalité

$$\Theta_1(z) = dz \cdot \{\varphi(z)\}^{\sigma-3} \cdot \delta\varphi(z),$$

et la condition

$$\sigma \geqq 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119),$$

on aura l'identité suivante

$$\sum_{r=1}^{r=g} \left[\frac{dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}}\right]^2 = \sigma \cdot \sum_{r=1}^{r=g} \frac{\Theta_1(z_r)}{F'(z_r)},$$

où l'on démontre, d'après la méthode donnée au n° 71, que le second membre sera identiquement nul. Donc, l'équation différentielle

$$\sum_{r=1}^{r=g} \left[\frac{dz_r}{\{\chi(z_r)\}^{\frac{n}{\sigma}}}\right]^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

doit être satisfaite par les équations de la formule (107) ou de la formule (108) comme *fonctions primitives*, en observant la condition (119).

Remarque 1. En répétant le même procédé, on trouvera une équation différentielle d'un degré quelconque p, quand la condition, analogue à celle de (119), sera $\sigma \geqq p+1$.

Remarque 2. Outre les procédés donnés dans les n^{os} précédents, on en aura quelques autres qui conduiront aux équations différentielles analoques à celles des formules (106), (117) et (120). Parmi ces autres pro-

cédés, nous indiqueront le suivant comme très-remarquable. En multipliant l'identité (101) par $\frac{dz}{z}$ qui est irréproductif relativement à γ^r, et en observant que $\frac{\varphi(z)}{z}$ est un polynôme entier et rationel, on démontre, de la même manière qu'au n° 71, que

$$\sum_{r=1}^{r=g} \frac{(dz_r)^2}{z_r \cdot \{\chi(z_r)\}^n} = 0 ,$$

équation qui ne suppose aucunes autres conditions que celles de (91) et (96), et qui, à cause de cela, doit être satisfaite par les équations (107) ou (108) comme *fonctions primitives.* — Nous aborderons, une autre fois, cette généralisation du théorème d'Abel de points de vue nouveaux et plus généraux.

Nous allons maintenant traiter quelques fonctions d'un type plus simple, en les déduisant d'équations différentielles qui ne contiendront aucun paramètre constant.

XI. LA FONCTION EXPONENTIELLE ET SON INVERSE.

65. *Périodicité.* Nous prendrons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

et son intégrale générale

$$u = \int_1^z \frac{dz}{z} = u_0 + \varkappa \int^{(0)} \frac{dz}{z} = u_0 + \varkappa \cdot 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad (122),$$

où u_0 est l'intégrale principale, et $2\pi i$ la *période*, provenant de l'intégrale circulaire prise autour du point 0 [(41)], et où $\varkappa$ représente un entier quelconque ou zéro. On aura par conséquent, d'après la formule (71), la fonction *simplement périodique*

$$z = \psi(u) = \psi(u_0 + \varkappa \cdot 2\pi i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123),$$

où l'on suppose que la valeur $u_0 = 0$ corresponde à la limite inférieure de l'intégration 1, ou que

$$1 = \psi(0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124).$$

76. *Autres propriétés.* 1° L'équation différentielle (121) peut se mettre, à l'aide de la formule (123), sous la forme suivante,

$$\psi'(u) = \psi(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125),$$

d'où la loi de différentiation est donnée pour la fonction $\psi(u)$.

2° Si l'on introduit dans l'équation (121) $z = \frac{1}{\zeta}$, on aura $du = \frac{dz}{z} = -\frac{d\zeta}{\zeta}$ et, en ayant égard aux limites de l'intégration, $u = \int_1^z \frac{dz}{z} = -\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, d'où il suit $\frac{1}{z} = \psi(-u)$ [n° 47], ou

$$\psi(-u) = \frac{1}{\psi(u)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126).$$

Donc, en changeant u en $-u$ dans la fonction $\psi(u)$, on aura la valeur réciproque $\frac{1}{\psi(u)}$.

3° "*Théorème d'addition*". En posant $du = \frac{dz}{z}$, $du_1 = \frac{dz_1}{z_1}$ et

$$\frac{dz}{z} + \frac{dz_1}{z_1} = 0,$$

on aura les deux résultats d'intégration suivants, c et s désignant des constantes.

$$z z_1 = c,$$
$$u + u_1 = s,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned} \psi(u)\psi(u_1) &= c \\ u + u_1 &= s \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127),$$

où les quantités u et u_1 pourront varier d'une manière quelconque, pourvu que leur somme soit constamment égale à s. En faisant, dans la formule (127), $u_1 = 0$, on aura, d'après la formule (124), $\psi(s) = c$.

Donc, on aura enfin

$$\downarrow(u)\downarrow(u_1) = \downarrow(u + u_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128),$$

identité qui exprime le "théorème d'addition" de la fonction $\downarrow(u)$.

De l'identité (128) il s'ensuit immédiatement, m et n étant des entiers quelconques, que

$$\{\downarrow(u)\}^n = \downarrow(nu).$$

Si l'on introduit dans cette identité $v = nu$, on aura

$$\{\downarrow(v)\}^{\frac{1}{n}} = \downarrow\left(\frac{v}{n}\right),$$

et enfin, μ désignant un nombre quelconque [qui, comme cas-limite, pourra être irrationel],

$$\{\downarrow(v)\}^{\mu} = \downarrow(\mu v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129),$$

identité, qui exprime une propriété fondamentale de la fonction $\downarrow(u)$.

77. *Développement en série.* Puisque, d'après le n° 63, 1°, la fonction périodique $\downarrow(u)$ est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, il s'ensuit que $\downarrow(u)$ sera synectique pour tout point possible, sauf peut-être au point u qui correspond au point $z = 0$. On aura donc suivant la série (56), puisque, d'après les formules (124) et (125), on a $\downarrow(0) = \downarrow'(0) = \ldots = \downarrow^{(r)}(0) = 1$, r étant un entier positif quelconque:

$$\downarrow(u) = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{\lfloor 2} + \frac{u^3}{\lfloor 3} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130).$$

Puisque cette série croît avec u à l'infini, il suit de la formule (126) que le point u, qui correspond au point $z = 0$, sera $u = -\infty$. Donc, *la fonction* $\downarrow(u)$ *est développée en une série, convergente pour tout module fini de* u [n°s 42 et 43].

En désignant par e, comme on le fait ordinairement, la valeur $\downarrow(1)$ de la série (130), on aura, suivant la formule (129),

$$\downarrow(\mu) = e^{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131).$$

Donc, *la fonction exponentielle* e^u *provient comme un cas particulier de la fonction périodique* $\downarrow(u)$ *pour* u = *quantité "réelle"*.

78. *Notation symbolique.* En introduisant dans la formule (131) la quantité complexe $u = \xi + i\eta$ au lieu de la quantité "réelle" μ, on aura la notation suivante

$$z = \psi(u) = e^u = e^{\xi + i\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132).$$

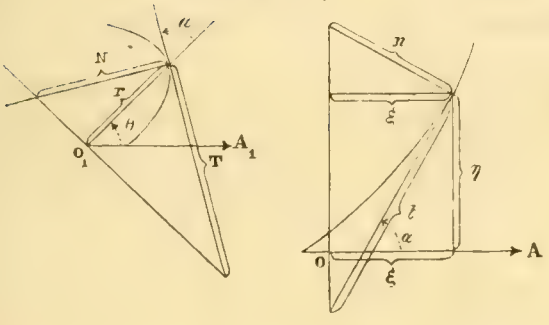
L'exponentielle e^u aura donc une signification *originaire* pour u = quantité "réelle", mais une signification *symbolique* pour u = quantité complexe, comme représentant, dans ce dernier cas, la fonction périodique $\psi(u)$ qui vient d'être obtenue et que l'on appelle, à cause de cela, *l'exponentielle dans le sens général.*

79. *Construction géométrique.* Si l'on introduit dans la formule (125) $z = \psi(u) = e^u = r_\theta$ et $u = \xi + i\eta$, on aura à l'aide des formules (3) et (4), en posant $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ et $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$:

$$\frac{dr_\theta}{du} = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)_{\operatorname{arctg}\frac{r\,d\theta}{dr} + \theta - \operatorname{arctg}\frac{d\eta}{d\xi}} = r_\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133),$$

égalité qui se décomposera dans les deux suivantes:

Fig. 12.



$$\left.\begin{aligned} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} &= r \cdot \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}, \\ \operatorname{arctg}\frac{r\,d\theta}{dr} &= \operatorname{arctg}\frac{d\eta}{d\xi} = \alpha, \end{aligned}\right\} \ldots (134)$$

où α représente tant l'inclinaison de l'élément du contour u sur l'axe OA [fig. 12] que celle de l'élément du contour z ou r_θ sur le rayon vecteur r, en des points correspondants. D'après cela, en désignant par T, N et t, n les tangentes et les normales des contours z et u, inclinées respectivement sur la perpendiculaire du rayon vecteur, menée par l'origine O_1, et sur l'axe des η, on aura cette relation remarquable:

$$\frac{T}{t} = \frac{N}{n} = \frac{r}{\xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135).$$

Cas particuliers. 1° En faisant, dans la formule (134), $\eta = 0$ et, par suite, $\alpha = 0$ ou π, c'est-à-dire, en représentant par u l'axe des ξ,

on aura $d\theta = 0$ et $dr = r d\xi$, d'où il s'ensuit, à l'aide de la formule (132), que z représente l'axe $O_1 A_1$ par l'équation

$$r = e^{\xi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (136),$$

équation qui, d'ailleurs, représente la courbe exponentielle, en considérant r comme l'ordonnée de l'abscisse ξ.

2° Si l'on fait, dans la formule (134), $\xi = 0$ et, par suite, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ou $\frac{3}{2}\pi$, c'est-à-dire, si l'on représente par u l'axe des η, on aura $dr = 0$ et $d\theta = d\eta$, d'où il s'ensuit, à l'aide de la formule (132), en ayant $\theta = \eta$, que z représente un *cercle de rayon 1;* donc,

$$e^{i\eta} = e^{i\theta} = 1_\theta = \operatorname{Cos}\theta + i \operatorname{Sin}\theta \quad \ldots\ldots \quad (137),$$

égalité qui explique la *notation symbolique* $e^{i\theta}$ de *l'unité géométrique* *) 1_θ [θ = une quantité "réelle"].

3° Enfin, en faisant dans la formule (134) $\alpha =$ constante, c'est-à-dire, en représentant par u une droite $\xi = \eta \operatorname{Cotg}\alpha + a$, z représentera une spirale logarithmique dont l'équation est la suivante [(132)]:

$$r = e^{\theta \operatorname{Cotg}\alpha + a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (138).$$

80. Si l'on introduit dans la formule (130) $i\theta$ au lieu de u, on aura pour l'unité géométrique la série suivante,

$$1_\theta = 1 + \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^2}{\lfloor 2} - \frac{i\theta^3}{\lfloor 3} + \frac{\theta^4}{\lfloor 4} + \frac{i\theta^5}{\lfloor 5} - \ldots \quad \ldots \quad (139),$$

d'où l'on tire les développements connus des fonctions trigonométriques sinus et cosinus en séries

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\theta &= \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{\lfloor 3} + \frac{\theta^5}{\lfloor 5} - \ldots \\ \operatorname{Cos}\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{\lfloor 2} + \frac{\theta^4}{\lfloor 4} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (140).$$

81. En faisant décrire par $u = \xi + i\eta$, dans la formule (132), un contour fermé, $z = r_\theta$ décrira aussi un contour fermé qui ne pourra jamais renfermer l'origine, puisque il s'ensuit de l'égalité $\theta = \eta$ que θ devra décrire l'angle 0 pour chaque contour fermé décrit par u.

---

*) Voir Geometrisk kalkyl af G. DILLNER, Tidskrift för Matem. och fysik, årgång 1868, pag. 131.

Remarque. De là il suit qu'un radical de forme $(e^u)^{\frac{1}{n}}$ ne pourra représenter que la valeur principale $e^{\frac{u}{n}}$.

72. *L'inverse de l'exponentielle.* Si nous voulons, dans la formule (132), exprimer u en fonction de z, cette fonction sera représentée par la notation $u_0 = \psi^{-1}(z)$ et $u = \psi^{-1}((z))$, d'où l'on aura suivant la formule (123):

$$u = \psi^{-1}((z)) = \psi^{-1}(z) + \varkappa . 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141),$$

où les crochets simples désignent la *valeur principale* et les crochets doubles la *valeur générale* de la fonction inverse.

Quoique la fonction *logarithmique* signifie *originairement* l'inverse de l'exponentielle sous la forme *particulière* (131), elle est définie, dans le sens *général*, comme l'inverse de l'exponentielle sous la forme *générale* (132), et alors l'égalité (141) se pose sous la forme

$$u = \log((z)) = \log(z) + \varkappa . 2\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142).$$

83. Si nous voulons développer la valeur principale $u_0 = \log z$ en une série convergente, cela se pourra faire pour un cercle de convergence qui ne renferme pas le point critique $z = 0$, d'où l'on aura, d'après la série (55), le développement connu de la fonction $\log(a + z)$.

84. Puisque les racines de l'équation $\psi'(u) = e^u = 0$ sont $-\infty + \varkappa . 2\pi i$, la fonction $\log((z))$ représentera un nombre illimité de branches parallèles, sortant de tout point $-\infty + \varkappa . 2\pi i$, le point d'embranchement étant $z = 0$ [n° 64].

XII. LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS ET LEURS INVERSES.

85. *Périodicité.* Prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

et son intégrale générale

$$du = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144).$$

où les points critiques $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$ sont des points d'embranchement, $\sqrt{1-z^2}$ étant la racine principale, c'est-à-dire, la racine qui sera 1 pour $z = 0$.

En posant $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, la fonction $F(z)$ étant la primitive de $f(z)$, on aura, suivant les n°s 33 et 34, $f_1(z) = \frac{f(z)}{\gamma}$, $f_2(z) = \frac{f_1(z)}{\gamma} = f(z)$ et, par suite, $F_1(z) = \frac{F(z)}{\gamma}$, $F_2(z) = F(z)$, les quantités 1 et γ étant les deux racines carrées de l'unité.

Or, pour $z < 1$ on aura le développement [n° 42]

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot z^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot z^6 + \cdots,$$

d'où

$$F(z) = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7} + \cdots \quad \ldots \quad (145),$$

en supposant que la valeur principale $u_0 = 0$ corresponde à $z = 0$ [(144)], ou

$$u_0 = F(0) = 0 \quad \ldots \quad (146).$$

Puisque la série (145), pour $z = 1$, ou $F(1)$, étant convergente d'après les règles ordinaires de convergence [cfr n° 28, *rem.*], est égale à $\frac{1}{2}\pi$, on aura, suivant la formule (74) et à l'aide de la formule (146), les deux *périodoïdes*

$$\left.\begin{aligned} \omega_{(1)} &= \int^{|a_1|} f(z)\,dz = \int^{1} \{F(z) - F_1(z)\} = \pi \\ \omega_{(2)} &= \int^{|a_2|} f(z)\,dz = \int^{-1} \{F(z) - F_1(z)\} = -\pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (147),$$

les intégrales *spéciales* étant, d'après la formule (73),

$$u_{(1)} = u_{(2)} = -u_0 .$$

Donc, puisque l'on a, suivant la même formule, la *période*

$$\omega_{(1,\,2)} = \omega_{(1)} - \omega_{(2)} = 2\pi \quad \ldots \quad (148),$$

l'intégrale générale de la formule (144) sera représentée par les valeurs

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \varkappa\,.\,2\pi \\ u &= -u_0 \pm \pi + \varkappa\,.\,2\pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (149),$$

$\varkappa$ étant un entier quelconque ou zéro. On aura donc enfin la fonction *simplement périodique* [VIII]

$$z = \psi(u) = \psi(u_0 + \varkappa \cdot 2\pi) = \psi(-u_0 \pm \pi + \varkappa \cdot 2\pi) \quad . \quad . \quad . \quad (150),$$

en observant, quant à la valeur principale u_0 [(146)], que

$$\psi(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151).$$

86. *Autres propriétés.* 1° L'équation (143) peut se poser, à l'aide de la formule (150), sous la forme

$$\psi'(u) = \sqrt{1 - \{\psi(u)\}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152),$$

d'où la règle de différentiation est établie pour la fonction périodique $\psi(u)$.

2° Puisque la fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$ [(143)] est *irréproductive* relativement à $\dfrac{1}{\gamma}$, les quantités 1 et γ étant les deux racines carrées de 1, on aura, suivant la formule (90),

$$\psi(\gamma u) = \gamma \psi(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153),$$

d'où il suit que la fonction $\psi(u)$ est *reproductive* ["impaire"] par rapport à γ [$= -1$].

3° À l'aide des formules (150) et (151), et puisque $F(\pm 1) = \pm \frac{1}{2}\pi$ [(145)], on aura les valeurs cardinales de la fonction $\psi(u)$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \psi(\pm\pi + 2\varkappa\pi) = \psi(\varkappa\pi) \\ 1 &= \psi(-\tfrac{1}{2}\pi \pm \pi + 2\varkappa\pi) \\ -1 &= \psi(\tfrac{1}{2}\pi \pm \pi + 2\varkappa\pi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154).$$

4° Si l'on introduit dans la formule (143) $\zeta = \sqrt{1 - z^2}$ et, par suite, $z = \sqrt{1 - \zeta^2}$, on aura $du = \dfrac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -\dfrac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$ et, en intégrant,

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -\int_1^{\sqrt{1-z^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} - \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

d'où résulte $z = \psi(u)$ et $\zeta = \sqrt{1 - z^2} = \psi(\frac{1}{2}\pi - u)$. En désignant la fonction ζ par $\psi_1(u)$ et faisant $\frac{1}{2}\pi - u = v$, on aura donc les identités suivantes,

$$\{\psi(u)\}^2 + \{\psi_1(u)\}^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155),$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(u) &= \psi(\tfrac{1}{2}\pi - u) \\ \psi_1(\tfrac{1}{2}\pi - v) &= \psi(v) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156),$$

les fonctions $\psi(u)$ et $\psi_1(u)$ étant ainsi des *"fonctions complémentaires"* l'une de l'autre.

À l'aide de ces deux formules, la formule (152) pourra s'écrire

$$\psi'(u) = \psi_1(u) = \psi(\tfrac{1}{2}\pi - u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157).$$

5° Puisque $\psi(u)$ est reproductive par rapport à γ $[= -1]$, la dérivée $\psi'(u) = \psi_1(u)$ sera irréproductive par rapport à γ [n° 66]; donc,

$$\psi_1(\gamma u) = \psi_1(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158),$$

c'est-à-dire que *la fonction complémentaire* $\psi_1(u)$ *sera irréproductive* ["paire"] par rapport à γ $[= -1]$.

De là il suit, à l'aide de la formule (157), que

$$\psi'(u) = \psi_1(u) = \psi(\tfrac{1}{2}\pi + u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159),$$

formule qui se déduira aussi de la formule (150), puisque $\psi(\frac{1}{2}\pi - u) = \psi\{-(\frac{1}{2}\pi - u) + \pi\}$.

6° À l'aide des formules (154) et (156) on aura les valeurs *cardinales* de la fonction $\psi_1(u)$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \psi_1(\tfrac{1}{2}\pi + \varkappa\pi) \\ 1 &= \psi_1(2\varkappa\pi) \\ -1 &= \psi_1(\pm\pi + 2\varkappa\pi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160).$$

87. *Développement en série.* Puisque la fonction $\psi(u)$, suivant le n° 63, 1°, est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, il s'ensuit que $\psi(u)$ sera synectique pour tout point possible, sauf peut-être aux points $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ qui correspondent aux points critiques $z = \pm 1$; mais, puisque la condition de continuité $\psi'(u) = \psi(\frac{1}{2}\pi + u) =$ quantité finie est satisfaite en ces points $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ [n° 6], qui, du reste, ne sont pas des points d'embranchement [(156)], et que la fonction $\psi(u)$ ne deviendra infinie pour aucune valeur finie de u [ce qui se démontre, en introduisant $z = \dfrac{1}{\zeta}$ dans

l'équation différentielle (143) et prenant l'intégrale $u = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, on en conclura que la fonction $\downarrow(u)$ sera synectique pour un cercle de convergence quelconque. La fonction $\downarrow(u)$, étant reproductive relativement aux racines carrées de 1 [(153)], sera donc développable suivant la série (88) de cette manière $[\sigma = 2]$:

$$\downarrow(u) = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{\lfloor 3} + \frac{u^5}{\lfloor 5} - \ldots \quad \ldots \ldots \quad (161),$$

les dérivées successives étant calculées d'après la formule $\downarrow^{(r)}(0) = \downarrow\left(\frac{r}{2}\cdot\pi\right)$ [(159)].

La fonction $\downarrow_1(u)$, étant irréproductive par rapport à $\gamma = -1$, sera développable suivant la formule (86), en observant que $\downarrow_1^{(r)}(0) = \downarrow^{(r+1)}(0) = \downarrow\left(\frac{r+1}{2}\cdot\pi\right)$ [(159)]. On aura donc $[\sigma = 2]$:

$$\downarrow_1(u) = 1 - \frac{u^2}{\lfloor 2} + \frac{u^4}{\lfloor 4} - \ldots \quad \ldots \ldots \quad (162).$$

88. "*Théorème d'addition*". En posant $z_1 = \downarrow(u_1)$ et $z_2 = \downarrow(u_2)$, on aura, suivant les formules (115) et (153), pour $\sigma = 2$, $n = 1$, $m = 1$ et $\mu = 1$:

$$z_3 = -\downarrow(u_1 + u_2) \quad \ldots \ldots \quad (163),$$

les quantités z_1, z_2 et z_3 devant satisfaire au système (107) ou

$$\left.\begin{aligned} z_1(\alpha_0 + \alpha_1 z_1^2) &= \sqrt{1-z_1^2} \\ z_2(\alpha_0 + \alpha_1 z_2^2) &= \sqrt{1-z_2^2} \\ z_3(\alpha_0 + \alpha_1 z_3^2) &= \sqrt{1-z_3^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (164).$$

De ce système on tire, en éliminant α_0 et en chassant le facteur $z_2^2 - z_1^2$ du résultat,

$$-\frac{1}{\alpha_1} = z_1 z_2 \{z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2}\} \quad \ldots \quad (165).$$

Or, d'après la formule (103) on a

$$F(0) = 1 = \alpha_1^2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 \quad \ldots \ldots \quad (166).$$

Donc, on aura, en comparant les formules (165) et (166), le *théorème d'addition* suivant

$$\downarrow(u_1+u_2) = \downarrow(u_1)\downarrow_1(u_2)+\downarrow(u_2)\downarrow_1(u_1) \quad . \quad . \quad . \quad (167),$$

en prenant la racine carrée $1 = \alpha_0 z_1 z_2 z_3$ de la formule (166), puisque les égalités (163) et (165) ne seront satisfaites, pour des petites valeurs de u_1 et u_2, que sous cette condition.

Si l'on introduit dans cette formule $u_1 = v_1 + \frac{1}{2}\pi$, on aura le théorème d'addition de la fonction $\downarrow_1(u)$, exprimé de cette manière [(159)]:

$$\downarrow_1(v_1+u_2) = \downarrow_1(v_1)\downarrow_1(u_2) - \downarrow(v_1)\downarrow(u_2) \quad . \quad . \quad . \quad (168).$$

Remarque. Puisque la formule (164) contient deux paramètres arbitraires, les quantités u_1 et u_2 sont des *variables indépendantes*, et les formules (167) et (168) ne présentent que des *identités* [n° 72, *rem. 1*].

89. *Notation symbolique.* Si l'on introduit dans la formule (140) la quantité complexe u au lieu de la quantité "réelle" v, on retrouvera les séries (161) et (162). Par conséquent, on pourra faire usage des notations suivantes

$$\left.\begin{aligned}\downarrow(u) &= \operatorname{Sin} u\\ \downarrow_1(u) &= \operatorname{Cos} u\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169),$$

en observant toutefois que les fonctions sinus et cosinus jouiront d'une signification *originaire* [celle qui se trouve dans la trigonométrie élémentaire] pour u = quantité "réelle", mais d'une signification *symbolique* pour u = quantité complexe, représentant, dans ce dernier cas, les fonctions simplement périodiques $\downarrow(u)$ et $\downarrow_1(u)$ qui viennent d'être déduites et qui s'appellent, à cause de cela, le sinus et le cosinus *dans le sens général.*

En comparant la série (130) avec les séries (161) et (162), on aura, à l'aide des formules (153) et (158),

$$\left.\begin{aligned}e^{iu} &= \operatorname{Cos} u + i \operatorname{Sin} u\\ e^{-iu} &= \operatorname{Cos} u - i \operatorname{Sin} u\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170),$$

ou, qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned}i \operatorname{Sin} u &= \tfrac{1}{2}(e^{iu}-e^{-iu})\\ \operatorname{Cos} u &= \tfrac{1}{2}(e^{iu}+e^{-iu})\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171).$$

En comparant les formules (137) et (170), on tirera

$$e^{iu} = 1_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172),$$

où 1_u a une signification *originaire* [l'unité géométrique] pour u = quantité "réelle", mais une signification *symbolique* pour u = quantité complexe. En ce dernier cas nous appellons 1_u l'unité géométrique dans le *sens général.*

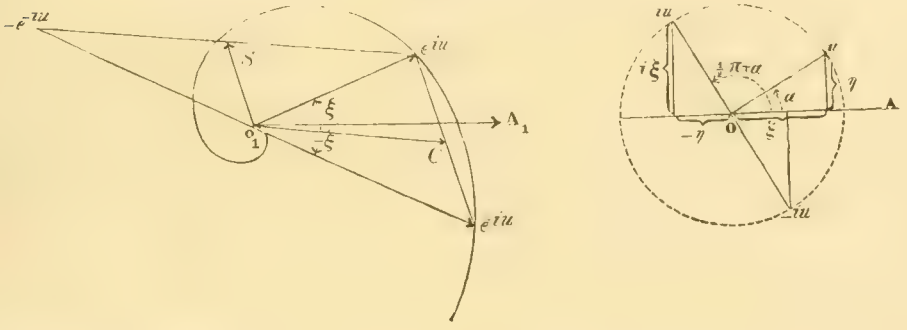
Si l'on fait, dans la formule (171), $iu = v$, en supposant v = quantité "réelle", on aura

$$\left.\begin{aligned} i\,\mathrm{Sin}\,\frac{v}{i} &= \tfrac{1}{2}(e^{v} - e^{-v}) = Sh(v) \\ \mathrm{Cos}\,\frac{v}{i} &= \tfrac{1}{2}(e^{v} + e^{-v}) = Ch(v) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (173),$$

où $i\,\mathrm{Sin}\,\frac{v}{i}$ et $\mathrm{Cos}\,\frac{v}{i}$ représentent les expressions *symboliques* du *Sinus hyperbolique* et du *Cosinus hyperbolique.*

90. *Construction géométrique.* Si l'on veut, pour un point donné $u = \xi + i\eta$, construire les points C et S, représentés par $\mathrm{Cos}\,u$ et $i\,\mathrm{Sin}\,u$ [fig. 13], on trace, d'après le n° 79, 3°, une spirale logarithmique, allant par le point 1 de l'axe O_1A_1 et faisant avec son rayon vec-

Fig. 13.



teur constamment l'angle $\frac{1}{2}\pi + \alpha$, cet angle étant le même que fait la droite $O(iu)$ avec l'axe OA, le point u étant joint à l'origine O par la droite Ou qui fait l'angle α avec OA. D'après cela, on trace le rayon vecteur e^{iu}, faisant l'angle ξ avec O_1A_1, et le rayon vecteur e^{-iu}, faisant l'angle $-\xi$ avec O_1A_1; alors, la médiane O_1C du triangle $O_1(e^{iu})(e^{-iu})$ représentera, tant en grandeur qu'en direction, $\mathrm{Cos}\,u$ [voir Geometrisk kalkyl af G. DILLNER, Tidskrift för matem. och fysik, årg. 1870, pag. 30]. Au contraire, si l'on veut construire $i\,\mathrm{Sin}\,u$, on mènera la médiane O_1S dans le triangle $O_1(e^{iu})(-e^{-iu})$, laquelle représentera donc, tant en gran-

deur qu'en direction, $i \operatorname{Sin} u$. La somme $\operatorname{Cos} u + i \operatorname{Sin} u$ est aussi, selon la figure, $= e^{iu}$, puisque $\operatorname{Cos} u$ et $i \operatorname{Sin} u$ représentent les côtés du parallélogramme CS dont la diagonale est e^{iu}.

Remarque. Pour le cas où $\alpha = 0$ ou $u =$ quantité "réelle", la spirale logarithmique e^{iu} se transformera, selon le n° 79, 2°, en un cercle de rayon 1; alors, cette construction de $\operatorname{Cos} u$ et $i \operatorname{Sin} u$ va se confondre avec celle du cosinus et du sinus trigonométrique [voir Geom. kalkyl af G. DILLNER, Tidskrift för matem. och fysik, årg. 1868, pag. 212].

91. *Les fonctions inverses du sinus et du cosinus.* Si l'on veut, dans la formule (150), exprimer u comme fonction de z, on posera, conformément à la formule (141),

$$u = \operatorname{Sin}^{-1}((z)) = \operatorname{Sin}^{-1}(z) + 2\varkappa\pi = -\operatorname{Sin}^{-1}(z) \pm \pi + 2\varkappa\pi \ldots (174),$$

ou, qui est la même chose,

$$u = \operatorname{Arc\,Sin}((z)) = \operatorname{Arc\,Sin}(z) + 2\varkappa\pi = -\operatorname{Arc\,Sin}(z) \pm \pi + 2\varkappa\pi \ldots (175).$$

En ces formules on désigne par les crochets simples la valeur *principale* u_0, et par les crochets doubles la valeur *générale* u de la fonction inverse.

Quoique la fonction Arc Sin signifie *originairement* l'inverse du sinus trigonométrique, elle est définie *généralement* comme l'inverse du sinus, pris dans le *sens général* de la formule (169).

La valeur principale $u_0 = \operatorname{Arc\,Sin}(z)$ étant reproductive par rapport à γ $[= -1]$, on pourra la développer d'après la formule (88) en une série convergente pour $\bar{z} < 1$ [(145)].

92. Puisque, d'après la formule (160), les racines $\frac{1}{2}\pi + \varkappa\pi$ de l'équation $(\operatorname{Sin} u)' = \operatorname{Cos} u = 0$ sont simples, la fonction $u = \operatorname{Arc\,Sin}((z))$ représentera, suivant le n° 64, deux branches égales et symétriquement placées autour de tout point $u = \frac{1}{2}\pi + \varkappa\pi$, les points d'embranchement étant $z = \pm 1$.

93. En vertu de la formule (156), on aura la fonction $\operatorname{Arc\,Cos}((z))$ déterminée de cette manière:

$$\operatorname{Arc\,Sin}((z)) + \operatorname{Arc\,Cos}((z)) = \tfrac{1}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176).$$

la quantité z étant "réelle" ou complexe.

XIII. LES FONCTIONS TANGENTE ET COTANGENTE ET LEURS INVERSES.

94. *Périodicité.* Nous prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{1+z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

et son intégrale générale [n° 48]

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = u_0 + \sum_{r=1}^{r=2} \varkappa_r \int^{a_r} \frac{dz}{1+z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178),$$

où $a_1 = i$ et $a_2 = -i$, les intégrales circulaires étant respectivement π et $-\pi$. On aura donc la fonction *simplement périodique*

$$z = \psi(u) = \psi(u_0 + \varkappa\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179),$$

où $\varkappa$ représente un entier quelconque ou zéro, la valeur principale $u_0 = 0$ correspondant à $z = 0$, ou

$$\psi(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (180).$$

95. *Autres propriétés.* 1° L'équation (177) peut se poser, à l'aide de la formule (179), sous la forme:

$$\psi'(u) = 1 + \{\psi(u)\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181),$$

d'où la loi de différentiation est établie pour la fonction périodique $\psi(u)$.

2° En désignant par 1 et γ les deux racines carrées de 1, on aura d'après la formule (90), la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ étant irréproductive par rapport à $\frac{1}{\gamma}$,

$$\psi(\gamma u) = \gamma\psi(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182).$$

Donc, la fonction $\psi(u)$ est *reproductive* ["impaire"], relativement à γ [$= -1$].

3° Si l'on fait, dans la formule (177), $z = \frac{1}{\zeta}$, on aura $dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$ et $u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = -\int_\infty^{\frac{1}{z}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} - \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$, d'où il

suit, puisque $\int_0^\infty \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = 2\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2}\pi$ *), que $z = \psi(u)$ et $\frac{1}{z} = \psi(\frac{1}{2}\pi - u)$, c'est-à-dire, en posant $\zeta = \psi_1(u)$ et $\frac{1}{2}\pi - u = v$, que l'on aura les égalités

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(u) = \psi(\tfrac{1}{2}\pi - u) &= \frac{1}{\psi(u)} \\ \psi(v) = \psi_1(\tfrac{1}{2}\pi - v) &= \frac{1}{\psi_1(v)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (183).$$

Donc, $\psi(u)$ et $\psi_1(u)$ seront des *fonctions complémentaires* l'une de l'autre.

4° À l'aide des formules (179), (180) et (183) on aura les valeurs *cardinales* des fonctions $\psi(u)$ et $\psi_1(u)$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \psi(\varkappa\pi) = \psi_1(\tfrac{1}{2}\pi + \varkappa\pi) \\ 1 &= \psi(\tfrac{1}{4}\pi + \varkappa\pi) = \psi_1(\tfrac{1}{4}\pi + \varkappa\pi) \\ \infty &= \psi(\tfrac{1}{2}\pi + \varkappa\pi) = \psi_1(\varkappa\pi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (184).$$

96. *"Théorème d'addition"*. En posant $z_1 = \psi(u_1)$ et $z_2 = \psi(u_2)$, on aura, suivant la formule (115) et à l'aide de la formule (182), pour $\sigma = 2$, $n = 2$, $m = 1$ et $\mu = 1$:

$$z_3 = -\psi(u_1 + u_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (185),$$

les quantités z_1, z_2 et z_3 devant satisfaire au système (107) ou

$$\left.\begin{aligned} z_1(\alpha_0 + \alpha_1 z_1^2) &= 1 + z_1^2 \\ z_2(\alpha_0 + \alpha_1 z_2^2) &= 1 + z_2^2 \\ z_3(\alpha_0 + \alpha_1 z_3^2) &= 1 + z_3^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (186).$$

De là on tire, en éliminant α_0 et chassant le facteur $z_2 - z_1$ du résultat:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2)}{z_1 z_2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (187).$$

*) Nous considérons comme connu que l'intégrale, prise depuis 0 à 1, du développement $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots$ forme une série convergente et $= \frac{1}{4}\pi$.

D'après la formule on (103) a

$$F(0) = 1 = (\alpha_1 z_1 z_2 z_3)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188);$$

donc, en comparant cette formule avec la formule (187), on aura enfin, eu égard aux signes des z_1, z_2 et z_3 pour des valeurs petites de u_1 et u_2,

$$\downarrow(u_1 + u_2) = \frac{\downarrow(u_1) + \downarrow(u_2)}{1 - \downarrow(u_1)\downarrow(u_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189),$$

égalité qui exprime le *théorème d'addition* de la fonction $\downarrow(u)$.

Remarque. Puisque la formule (186) contient deux paramètres arbitraires α_0 et α_1, les quantités u_1 et u_2 sont des *variables indépendantes* [n° 72, *rem. 1*], et la formule (189) sera, par conséquent, une *identité.*

97. En écrivant la formule (177) sous la forme $du = \frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z-i} - \frac{dz}{z+i}\right)$, d'où $u = \frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z} + \varkappa\pi$, on aura $z = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i(e^{iu} + e^{-iu})}$ et par suite, à l'aide de la formule (171),

$$\downarrow(u) = \frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Cos} u} = \operatorname{Tg} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190),$$

la fonction Tg u *étant ainsi définie comme le quotient* $\frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Cos} u}$, *aussi pour le cas que* u *est une quantité complexe.* À l'aide de la formule (183), on aura ensuite

$$\downarrow_1(u) = \frac{\operatorname{Cos} u}{\operatorname{Sin} u} = \operatorname{Cotg} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (191),$$

la fonction Cotg u *étant ainsi définie comme le quotient* $\frac{\operatorname{Cos} u}{\operatorname{Sin} u}$, *aussi pour* u = *quantité complexe.*

Les fonctions $\downarrow(u)$ et $\downarrow_1(u)$ ou Tg u et Cotg u, étant composées des fonctions Sin u et Cos u, seront traitées désormais comme des fonctions composées. Pour u = quantité "réelle", les fonctions Tg u et Cotg u ont une signification *originaire* [celle de la trigonométrie élémentaire]; pour u = quantité complexe, ces mêmes fonctions ne présentent qu'une signification *symbolique*, et s'appellent, à cause de cela, la tangente et la

cotangente *dans le sens général.* De la formule (173) découlent ces notations symboliques des fonctions tang. hyp. et cotang. hyp.:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Th}(v) &= i \operatorname{Tg} \frac{v}{i} \\ \operatorname{Coth}(v) &= \frac{1}{i} \operatorname{Cotg} \frac{v}{i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (192).$$

Remarque. La construction géométrique de la fonction $\operatorname{Tg} u$ pourra s'exécuter en construisant, selon la figure 13, les fonctions $\operatorname{Cos} u$ et $i \operatorname{Sin} u$; alors, à l'aide de l'égalité $\frac{i \operatorname{Tg} u}{1} = \frac{i \operatorname{Sin} u}{\operatorname{Cos} u} = \frac{OS}{OC}$, ou construira facilement la droite $i \operatorname{Tg} u$, le triangle OCS étant semblable à celui dont les côtes $i \operatorname{Tg} u$ et 1 correspondent aux côtés OS et OC [voir Geom. kalkyl, Tidskrift för matem. och fysik, årg. 1870, pag. 31].

98. *Les inverses des fonctions tangente et cotangente.* Si l'on veut, dans la formule (179), exprimer u en fonction de z, on aura, conformément aux formules (174) et (175),

$$u = \operatorname{Tg}^{-1}((z)) = \operatorname{Tg}^{-1}(z) + \varkappa\pi \quad \ldots\ldots \quad (193)$$

ou

$$u = \operatorname{Arctg}((z)) = \operatorname{Arctg}(z) + \varkappa\pi \quad \ldots\ldots \quad (194),$$

où l'on désigne par les crochets simples la valeur principale, et par les crochets doubles la valeur générale de la fonction inverse.

Quoique la fonction Arctg signifie *originairement* l'inverse de la tangente trigonométrique, elle est définie, *généralement*, comme l'inverse de la fonction tangente, prise dans le *sens général* de la formule (190).

La valeur principale $u_0 = \operatorname{Arctg}(z)$, étant reproductive par rapport aux deux racines carrées 1 et γ [$= -1$] de l'unité [(182)], sera développable, d'après la formule (88), en une série convergente pour $z < 1$.

99. Puisque, d'après la formule (181), les racines de l'équation $(\operatorname{Tg} u)' = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 u} = 0$ sont représentées par les valeurs $u = \pm i\infty + \varkappa\pi$ [(171)], la fonction $\operatorname{Arctg}((z))$ représentera, suivant le n° 64, des branches *parallèles*, partant de tout point $\pm i\infty + \varkappa\pi$, les points d'embranchement étant $z = \pm i$.

100. La fonction Arc Cotg $((z))$ sera, en vertu de la formule (183), déterminée de cette manière:

$$\text{Arctg}\,((z)) + \text{Arc Cotg}\,((z)) = \tfrac{1}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195),$$

où z représente une quantité "réelle" ou complexe.

XIV. LES FONCTIONS $T(u)$ ET $\mathfrak{T}(u)$ ET LEURS INVERSES.

101. *Périodicité.* Prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{1+z^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

et son intégrale générale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^3} = u_0 + \sum_{r=1}^{r=3} \varkappa_r \int^{(a_r)} \frac{dz}{1+z^3} \quad . \quad . \quad . \quad (197),$$

où $a_1 = \gamma^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = \gamma^{\frac{3}{2}}$, $a_2 = \gamma^{\frac{5}{2}}$, les quantités 1, γ et γ^2 désignant les trois racines cubiques de 1 $[\gamma = 1_{\frac{2}{3}\pi}]$.

Alors, les trois intégrales circulaires seront respectivement

$$\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\pi i}{\gamma}, \quad \tfrac{2}{3}\cdot\pi i, \quad \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\pi i}{\gamma^2}.$$

On pourra donc poser [n° 48]

$$z = T(u) = T\left(u_0 + \tfrac{2}{3}\pi i \sum_{r=1}^{r=3} \frac{\varkappa_r}{\gamma^r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198),$$

où $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ représentent des entiers quelconques ou zéro. On suppose que la valeur principale $u_0 = 0$ corresponde à $z = 0$, ou que

$$T(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199).$$

102. Ensuite, en partant de l'équation différentielle

$$du = \frac{d\zeta}{1-\zeta^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200),$$

où l'on a les infinis $a_1 = \gamma$, $a_2 = \gamma^2$ et $a_3 = \gamma^3 = 1$, on aura les intégrales circulaires respectives

$$-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\pi i}{\gamma^2},\quad -\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\pi i}{\gamma},\quad -\tfrac{2}{3}\cdot\pi i.$$

Donc, on pourra poser [n° 48], conformément à la formule (198):

$$\zeta = \mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}\Big(u_0 + \tfrac{2}{3}\pi i \sum_{r=1}^{r=3} \frac{\varkappa_r}{\gamma^r}\Big) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201),$$

en supposant que la valeur principale $u_0 = 0$ corresponde à $\zeta = 0$, ou que

$$\mathfrak{T}(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202).$$

103. Puisque $\gamma^3 = 1$ et $1+\gamma+\gamma^2 = 0$, les deux multiples de périodes $\frac{2}{3}\pi i.\varkappa_1$ et $\frac{2}{3}\pi i.\varkappa_2\gamma$ reproduiront par leur combinaison le troisième multiple $\frac{2}{3}\pi i.\varkappa_3\gamma^2$. Donc, les fonctions $T(u)$ et $\mathfrak{T}(u)$ n'ont que *deux périodes distinctes* et sont par cela même *doublement périodiques*. Il n'y aura donc qu'un réseau de périodes, formé par des triangles équilatéraux situés de manière que le côté de l'un de ces triangles soit représenté, tant en grandeur qu'en direction, par la quantité $\frac{2}{3}\pi i$.

104. *Autres propriétés.* 1° Les équations (196) et (200) pourront s'écrire, à l'aide des formules (198) et (201), sous la forme suivante,

$$\left.\begin{aligned} T'(u) &= 1 + T^3(u) \\ \mathfrak{T}'(u) &= 1 - \mathfrak{T}^3(u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203),$$

ce qui donne la règle de différentiation pour les fonctions $T(u)$ et $\mathfrak{T}(u)$.

2° Si l'on désigne, suivant le n° 101, par 1, γ et γ^2 les trois racines cubiques de l'unité, les fonctions $\frac{1}{1+z^3}$ et $\frac{1}{1-\zeta^3}$ étant irréproductives par rapport à $\frac{1}{\gamma}$, on aura en vertu de la formule (90),

$$\left.\begin{aligned} T(\gamma u) &= \gamma\, T(u) \\ \mathfrak{T}(\gamma u) &= \gamma\, \mathfrak{T}(u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204).$$

Donc, les fonctions $T(u)$ et $\mathfrak{T}(u)$ sont *reproductives* relativement aux trois racines cubiques de 1.

3° Si l'on pose, dans la formule (200), $\gamma^{\frac{1}{2}}z = \zeta$, on aura $du = \frac{d\zeta}{1-\zeta^3} = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}dz}{1+z^3}$, et, par suite, $\zeta = \mathfrak{T}(u)$ et $z = T\Big(\frac{u}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\Big)$. Donc, en observant

que $\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} = -\gamma$, on aura $-\gamma\,\mathfrak{T}(u) = T(-\gamma u)$ ou, à l'aide de la formule (204),

$$\left.\begin{aligned} T(u) &= -\mathfrak{T}(-u) \\ \mathfrak{T}(u) &= -T(-u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (205),$$

d'où l'on conclura que les fonctions $T(u)$ et $\mathfrak{T}(u)$ jouissent de la propriété, *que leur somme sera nulle, si la somme de leurs variables indépendantes est nulle.*

De la formule (205) on déduit immédiatement cette règle de différentiation:

$$\left.\begin{aligned} T^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1}\,.\,\mathfrak{T}^{(r)}(-u) \\ \mathfrak{T}^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1}\,.\,T^{(r)}(-u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (206).$$

105. *"Théorème d'addition"*. En posant $z_1 = T(u_1)$, $z_2 = T(u_2)$, $z_3 = T(u_3)$, on aura d'après les formules (115) et (205), pour $\sigma = 3$, $n = 3$, $m = 1$ et $\mu = 1$,

$$z_4 = T[-(u_1+u_2+u_3)] = -\mathfrak{T}(u_1+u_2+u_3) \quad \ldots\ldots \quad (207),$$

les quantités z_1, z_2, z_3 et z_4 devant être déterminées, suivant la formule (107), par le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} z_1(\alpha_0+\alpha_1 z_1^3) &= 1+z_1^3 \\ z_2(\alpha_0+\alpha_1 z_2^3) &= 1+z_2^3 \\ z_3(\alpha_0+\alpha_1 z_3^3) &= 1+z_3^3 \\ z_4(\alpha_0+\alpha_1 z_4^3) &= 1+z_4^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (208).$$

De ce système résulteront, suivant la formule (108), les deux équations *distinctes*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z_1,\ z_2,\ z_3) &= 0 \\ \Phi_2(z_1,\ z_2,\ z_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (209),$$

les quantités z_1, z_2, z_3 et z_4 pouvant être combinées trois à trois de toutes les manières possibles dans ces deux équations.

En éliminant α_0 entre les deux premières équations du système (208) et en chassant du résultat le facteur $z_2 - z_1$, on aura

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{z_1 z_2 (z_1^2+z_1 z_2+z_2^2)}{z_1 z_2 (z_1+z_2)-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (210).$$

Or, d'après la formule (103), on aura

$$F(0) = 1 = -(\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4)^3 \quad \ldots\ldots \quad (211).$$

De cette formule on tirera, en comparant la seule racine possible $\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$ avec la formule précédente, et en s'appuyant sur la formule (207),

$$\mathfrak{T}(u_1 + u_2 + u_3)\, T(u_3) = \frac{T^2(u_1) + T(u_1)\, T(u_2) + T^2(u_2)}{T(u_1)\, T(u_2)\, \{T(u_1) + T(u_2)\} - 1} \quad \ldots (212),$$

égalité qui exprime le *théorème d'addition de la fonction* $\mathfrak{T}(u)$. À l'aide de la formule (205), on tirera immédiatement de cette formule le *théorème d'addition de la fonction* $T(u)$.

En permutant, dans la formule (212), u_3 et u_1, et de même u_3 et u_2, on aura deux formules nouvelles, exprimant aussi le théorème d'addition de la fonction $\mathfrak{T}(u)$. Ces deux formules, combinées avec la formule (212), équivaudront à deux équations distinctes (209).

Remarque 1. Puisque le système (208) contient deux paramètres arbitraires, deux des trois quantités u_1, u_2, u_3 sont des *variables indépendantes* [n° 72, *rem. 1*]. Donc, une des égalités qui expriment le théorème d'addition étant satisfaite, les autres devront être satisfaites *identiquement.*

Remarque 2. Si l'on prend, dans la formule (103), $z = -1$, on aura, à l'aide des formules (208) et (210), le théorème d'addition de la dérivée $T'(u)$ [(203)]. De celui-ci on tirera, à l'aide des formules (205) et (206), le théorème d'addition de la dérivée $\mathfrak{T}'(u)$.

106. En introduisant dans la formule (197)

$$\frac{1}{1+z^3} = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1}{\gamma(z-a_1)} + \frac{1}{z-a_2} + \frac{1}{\gamma^2(z-a_3)}\right\},$$

où 1, γ, γ^2 sont les trois racines cubiques de 1, et $a_1 = \gamma^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = a_1\gamma$, $a_3 = a_1\gamma^2$, on trouvera

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1+z^3} = \left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{3}\left\{\frac{1}{\gamma}\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right) + \log\left(1-\frac{z}{a_2}\right) + \frac{1}{\gamma^2}\log\left(1-\frac{z}{a_3}\right)\right\} \\ &+ \tfrac{2}{3}\pi i \cdot \sum_{r=1}^{r=3} \frac{\varkappa_r}{\gamma^r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (213),$$

d'où il s'ensuit que l'intégrale principale u_0, considérée comme fonction de z, aura les infinis a_1, a_2 et a_3, c'est-à-dire que

$$\int^{a_1} u_0 = -\frac{1}{\gamma}\cdot\infty\,,\quad \int^{a_2} u_0 = -\infty\,,\quad \int^{a_3} u_0 = -\frac{1}{\gamma^2}\cdot\infty\,,$$

ou, ce qui est la même chose, suivant les formules (204) et (205),

$$\left.\begin{aligned} -1 &= T(-\infty)\\ 1 &= \mathfrak{T}(\infty)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (214).$$

107. *Développement en série.* Puisque, d'après le n° 63, 1°, la fonction périodique $T(u)$ est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$, il s'ensuit que $T(u)$ sera synectique pour tout point possible, sauf peut-être aux points u qui correspondent aux points $z = a_1$, $z = a_2$ et $z = a_3$. Mais, comme tous ces points sont situés à l'infini, ils ne pourront être renfermes dans aucun cercle de convergence de rayon *fini.* Au contraire, en faisant $z = \frac{1}{\zeta}$ dans l'équation différentielle (196) et prenant l'intégrale $u' = \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^3}$ d'où $\infty = T(u')$, on démontrera aisément que cette valeur u' de u sera *finie.* Donc, la fonction $T(u)$ aura trois infinis u', $\gamma u'$ et $\gamma^2 u'$ [(204)]. À l'aide de la formule (203) [n° 6, *rem. 2*], le cercle de convergence de la fonction $T(u)$ aura, par conséquent, une étendue quelconque, pourvu qu'il ne renferme aucun de ces infinis. Donc, on tirera de la formule (88), pour $\sigma = 3$, en observant que la fonction $T(u)$ est reproductive par rapport aux trois racines cubiques de 1,

$$T(u) = \frac{u}{1}\cdot T'(0) + \frac{u^4}{\lfloor 4}\cdot T^{\mathrm{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7}\cdot T^{\mathrm{VII}}(0) + \ldots \quad \ldots \quad (215),$$

les dérivées $T'(0)$, $T^{\mathrm{IV}}(0)$ etc. devant être calculées d'après la formule (203). Le développement de la fonction $\mathfrak{T}(u)$ se déduira immédiatement de cette formule à l'aide de la formule (205),

$$\mathfrak{T}(u) = \frac{u}{1}\cdot T'(0) - \frac{u^4}{\lfloor 4}\cdot T^{\mathrm{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7}\cdot T^{\mathrm{VII}}(0) - \ldots \quad \ldots \quad (216).$$

108. *Les inverses des fonctions* $T(u)$ *et* $\mathfrak{T}(u)$. Si l'on veut, dans la formule (198), exprimer u comme fonction de z, on aura, conformément au n° 98,

$$u = T^{-1}((z)) = T^{-1}(z) + \tfrac{2}{3}\pi i \cdot \sum_{r=1}^{r=3} \frac{\varkappa_r}{\gamma^r} \quad \ldots\ldots \quad (217),$$

où l'on désigne par des crochets simples la valeur *principale* et par des crochets doubles la valeur *générale* de la fonction u. La valeur principale $T^{-1}(z)$, étant reproductive, selon la formule (204), par rapport aux trois racines cubiques de 1, sera développable en une série convergente pour $\bar{z} < 1$, d'après la formule (88) $[\sigma = 3]$.

109. Puisque, d'après les formules (203) et (214), les racines de l'équation $T'(u) = 1 + T^3(u) = 0$ sont $-\frac{\infty}{\gamma^r} + \frac{2}{3}\pi i \cdot \frac{\varkappa_r}{\gamma^r}$ pour $r = 1, 2, 3$, la fonction $T^{-1}((z))$ représentera un nombre illimité des branches parallèles [n° 64], partant de tout point $u = -\frac{\infty}{\gamma^r} + \frac{2}{3}\pi i \cdot \frac{\varkappa_r}{\gamma^r}$, les points d'embranchement étant $z = -\frac{1}{\gamma^r}$, pour $r = 1, 2, 3$.

110. En vertu de la formule (205), on aura la fonction $\mathfrak{T}^{-1}((z))$ déterminée de cette manière:

$$\mathfrak{T}^{-1}((z)) + T^{-1}((z)) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (218).$$

Remarque. Nous pourrions, d'une manière toute semblable, approfondir l'étude d'un nombre illimité des nouvelles fonctions périodiques, provenant des équations différentielles de la forme $du = \frac{dz}{1 \pm z^\sigma}$ [σ étant un entier positif], en ayant des moyens les plus généraux de préciser leurs propriétés fondamentales, comme la périodicité [VIII], le théorème d'addition [X], le développement en série [IX, VII], etc. Mais il faut que nous laissions de côté toute recherche ultérieure de cette nature.

XV. LES FONCTIONS $V(u)$ ET $\mathfrak{V}(u)$ ET LEURS INVERSES.

111. *Périodicité.* Prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{(1 - z^3)^{\frac{1}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

et son intégrale générale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (220),$$

où les points critiques $a_1 = 1$, $a_2 = \gamma$, $a_3 = \gamma^2$ sont des points d'embranchement, les quantités 1, γ, γ^2 étant les trois racines cubiques de 1, et où $(1-z^3)^{\frac{1}{3}}$ représente la racine cubique principale, c'est-à-dire, la racine cubique qui sera 1 pour $z = 0$.

En posant $f(z) = \frac{1}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$, et en supposant, de plus, que $F(z)$ soit la fonction primitive de $f(z)$, on aura, suivant les n°s 33 et 34, $f_1(z) = \frac{f(z)}{\gamma}$, $f_2(z) = \frac{f(z)}{\gamma^2}$, $f_3(z) = f(z)$ et $F_1(z) = \frac{F(z)}{\gamma}$, $F_2(z) = \frac{F(z)}{\gamma^2}$, $F_3(z) = F(z)$. Pour $z < 1$ on aura le développement suivant

$$(1-z^3)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot z^3 + \frac{1.4}{3^2\lfloor 2}\cdot z^6 + \frac{1.4.7}{3^3\lfloor 3}\cdot z^9 + \ldots,$$

d'où résulte, en intégrant,

$$F(z) = z + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^4}{4} + \frac{1.4}{3^2\lfloor 2}\cdot\frac{z^7}{7} + \frac{1.4.7}{3^3\lfloor 3}\cdot\frac{z^{10}}{10} + \ldots \quad \ldots \quad (221),$$

la valeur principale u_0 de l'intégrale (220) étant supposée $= 0$ pour $z = 0$, ou

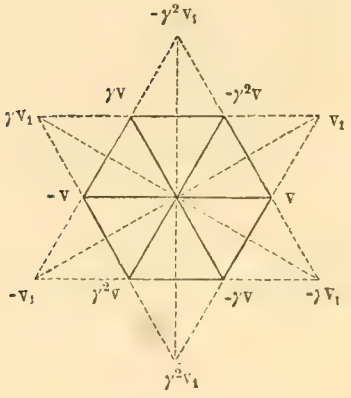
$$u_0 = F(0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (222).$$

Si l'on désigne la série $F(1)$ [qui, d'après les règles ordinaires, est convergente pour $z = 1$] par v, ou

$$\mathrm{v} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1.4}{3^2\lfloor 2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.4.7}{3^3\lfloor 3}\cdot\frac{1}{10} + \ldots \quad \ldots\ldots \quad (223),$$

on aura les *périodoïdes* exprimées de la manière suivante [(74), (77), (78)], en observant la formule (222) et les égalités $\gamma^3 = 1$, $1+\gamma+\gamma^2 = 0$, $F(\gamma) = \gamma\mathrm{v}$, $F(\gamma^2) = \gamma^2\mathrm{v}$:

Fig. 14.



$$\left.\begin{aligned}
\omega_{(1)} &= F(1)\left\{1-\frac{1}{\gamma}\right\} = v_1 \\
\omega_{(2)} &= F(\gamma)\left\{1-\frac{1}{\gamma}\right\} = \gamma v_1 \\
\omega_{(3)} &= F(\gamma^2)\left\{1-\frac{1}{\gamma}\right\} = \gamma^2 v_1 \\
\omega_{(1^2)} &= F(1)\left\{1-\frac{1}{\gamma^2}\right\} = -\gamma v_1 \\
\omega_{(2^2)} &= F(\gamma)\left\{1-\frac{1}{\gamma^2}\right\} = -\gamma^2 v_1 \\
\omega_{(3^2)} &= F(\gamma^2)\left\{1-\frac{1}{\gamma^2}\right\} = -v_1 \\
\omega_{(1,2)} &= \omega_{(1)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(2)} = 2v_1 \\
\omega_{(2,1)} &= \omega_{(2)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(1)} = -v_1 \\
\omega_{(1,3)} &= \omega_{(1)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(3)} = -\gamma^2 v_1 \\
\omega_{(3,1)} &= \omega_{(3)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(1)} = 2\gamma^2 v_1 \\
\omega_{(2,3)} &= \omega_{(2)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(3)} = 2\gamma v_1 \\
\omega_{(3,2)} &= \omega_{(3)}+\frac{1}{\gamma}\omega_{(2)} = -\gamma v_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (224),$$

où l'on a posé, pour abréger, $v_1 = 3^{\frac{1}{4}} \cdot v_{\frac{1}{6}\pi}$. Les *six périodoïdes* calculées: $\pm v_1$, $\pm\gamma v_1$, $\pm\gamma^2 v_1$ représentant les points de rencontre des six côtés prolongés d'un hexagone régulier de rayon v [fig. 14], les autres *trois périodoïdes* étant $2v_1$, $2\gamma v_1$, $2\gamma^2 v_1$. Ensuite, représentons, dans la formule (219), les trois points critiques par $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{\gamma}$ et $a_3 = \frac{1}{\gamma^2}$, et supposons, de plus, que la fonction $f(z)$ décrive les circonférences ⓐ₁, ⓐ₂, ⓐ₃ dans le sens *négatif;* alors, on aura $f_1(z) = \gamma f(z)$, $f_2(z) = \gamma^2 f(z)$, d'où résultera un *système* de *périodoïdes*, contenant les trois périodoïdes nouvelles $-2v_1$, $-2\gamma v_1$, $-2\gamma^2 v_1$. Donc, le nombre de toutes les périodoïdes

possibles sera 12, savoir, $\pm v_1$, $\pm \gamma v_1$, $\pm \gamma^2 v_1$, $\pm 2 v_1$, $\pm 2\gamma v_1$, $\pm 2\gamma^2 v_1$. Les *intégrales spéciales*, correspondant à ces douze périodoïdes, seront toutes représentées par $\gamma^{\pm 1} . u_0$, l'intégrale principale étant désignée par u_0.

À l'aide des formules (224), on aura, suivant les formules (74) et (47), ce système de *périodes:*

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{(1,2,3)} &= \omega_{(1,2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(3)} = 3v_1 \\
\omega_{(1,3,2)} &= \omega_{(1,3)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(2)} = 0, \\
\omega_{(2,3,1)} &= \omega_{(2,3)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(1)} = 3\gamma v_1 \\
\omega_{(2,1,3)} &= \omega_{(2,1)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(3)} = 0 \\
\omega_{(3,1,2)} &= \omega_{(3,1)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(2)} = 2\gamma^2 v_1 \\
\omega_{(3,2,1)} &= \omega_{(3,2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(1)} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (225),$$

Un autre système de périodes se trouvera de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{(1^2,3)} &= \omega_{(1^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(3)} = 3v \\
\omega_{(3^2,1)} &= \omega_{(3^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(1)} = -3v \\
\omega_{(2^2,1)} &= \omega_{(2^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(1)} = 3\gamma v \\
\omega_{(1^2,2)} &= \omega_{(1^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(2)} = -3\gamma v \\
\omega_{(3^2,2)} &= \omega_{(3^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(2)} = 3\gamma^2 v \\
\omega_{(2^2,3)} &= \omega_{(2^2)} + \frac{1}{\gamma^2}\omega_{(3)} = -3\gamma_2 v
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (226).$$

En permutant, dans le système (226), les indices de sorte que l'on ait $\omega_{(3,1^2)}$, etc., on retombera sur un système des mêmes périodes. Donc, on aura en somme *six périodes*, $\Omega_1 = 3v$, $\Omega_2 = 3\gamma v$, $\Omega_3 = 3\gamma^2 v$,

$\Omega_4 = 3\mathrm{v}_1$, $\Omega_5 = 3\gamma\mathrm{v}_1$, $\Omega_6 = 3\gamma^2\mathrm{v}_1$, et, par suite, la somme des multiples de périodes $\sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r$, $\varkappa_r$ représentant un entier quelconque ou zéro. La limite supérieure z, dans la formule (220), considérée comme une fonction $V(u)$ de l'intégrale u, sera par conséquent

$$z = V(u) = V\Big(u_0 + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) = V\Big(\gamma^{\pm 1} . u_0 + P(\mathrm{v}_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) \ldots (227),$$

où $P(\mathrm{v}_1)$ désigne une ou plusieurs périodoïdes ajoutées à $\gamma^{\pm 1} . u_0$ qui est l'intégrale spéciale correspondante. La fonction $V(u)$ a, suivant la formule (222), une valeur nulle pour la valeur principale $u_0 = 0$, c'est-à-dire que

$$V(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228).$$

Remarque. Comme la somme $\sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r$ ne peut fixer que les croix d'un réseau, formé par des triangles équilatéraux, et étendu à l'infini dans tous les sens, le côté de l'un de ces triangles étant $3\mathrm{v}$ [fig. 14], les six périodes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_6$ pourront être réduites aux deux périodes *distinctes* $3\mathrm{v}$ et $3\gamma\mathrm{v}$, la somme des multiples de celles-ci $3\mathrm{v}\sum_{r=1}^{r=2} \varkappa_r \gamma^{r-1}$ pouvant fixer toutes les croix du réseau en question. Donc la fonction $V(u)$ ne sera *actuellement* que *doublement périodique*, les périodoïdes étant toutefois les douze mentionnées ci-dessus ou $\pm\mathrm{v}_1$, $\pm\gamma\mathrm{v}_1$, $\pm\gamma^2\mathrm{v}_1$, $\pm 2\mathrm{v}_1$, $\pm 2\gamma\mathrm{v}_1$, $\pm 2\gamma^2\mathrm{v}_1$.

112. Ensuite, en prenant pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{d\zeta}{(1+\zeta^3)^{\frac{1}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229),$$

où les trois points d'embranchement sont $a_1 = \gamma^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\gamma}$, $a_2 = a_1\gamma$, $a_3 = a_1\gamma^2$, et où $(1+\zeta^3)^{\frac{1}{3}}$ représente la racine cubique principale, c'est-à-dire, la racine qui sera 1 pour $\zeta = 0$, on trouvera la *même périodicité* qu'au n° précédent. Donc, en désignant ζ, considérée comme fonction de u, par $\mathfrak{B}(u)$, on aura, conformément à la formule (227),

$$\zeta = \mathfrak{B}(u) = \mathfrak{B}\Big(u_0 + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) = \mathfrak{B}\Big(\gamma^{+1} u_0 + P(\mathfrak{v}_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) \ldots (230),$$

la quantité $\mathfrak{v}$ représentant ici la série convergente $-F(-1)$ ou $1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1.4}{3^2\lfloor\underline{2}}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1.4.7}{3^3\lfloor\underline{3}}\cdot\frac{1}{10}+\ldots$ [voir (223)], et $\mathfrak{v}_1$ la quantité $\mathfrak{v}.\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)$ ou $3^{\frac{1}{2}}.\mathfrak{v}_{\frac{1}{6}\pi}$. La fonction $\mathfrak{V}(u)$ sera donc aussi *doublement périodique* [n° 111, *rem.*], ayant les deux périodes *distinctes* $3\mathfrak{v}$ et $3\gamma\mathfrak{v}$ et les douze périodoïdes $\pm\mathfrak{v}_1$, $\pm\gamma\mathfrak{v}_1$, $\pm\gamma^2\mathfrak{v}_1$, $\pm 2\mathfrak{v}_1$, $\pm 2\gamma\mathfrak{v}_1$, $\pm 2\gamma^2\mathfrak{v}_1$. Suivant (228) on aura, de plus,

$$\mathfrak{V}(0)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231).$$

113. *Autres propriétés.* 1° Les équations différentielles (219) et (229) peuvent se mettre, en vertu des formules (227) et (230), sous la forme

$$\left.\begin{aligned} V'(u) &= \{1-V^3(u)\}^{\frac{1}{3}} \\ \mathfrak{V}'(u) &= \{1+\mathfrak{V}^3(u)\}^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (232),$$

ce qui donne la règle de différentiation pour les fonctions $V(u)$ et $\mathfrak{V}(u)$.

2° En désignant par 1, γ, γ^2 les trois racines cubiques de 1, on aura, suivant la formule (90), les fonctions $\frac{1}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{1}{(1+\zeta^3)^{\frac{1}{3}}}$ étant irréproductives par rapport à $\frac{1}{\gamma}$,

$$\left.\begin{aligned} V(\gamma u) &= \gamma\, V(u) \\ \mathfrak{V}(\gamma u) &= \gamma\,\mathfrak{V}(u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (233).$$

Donc, les fonctions $V(u)$ et $\mathfrak{V}(u)$ sont *reproductives* relativement aux trois racines cubiques de 1.

3° Si l'on introduit dans la formule (229) $\zeta=\gamma^{\frac{1}{2}}.z$ on aura $du=\frac{d\zeta}{(1+\zeta^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$ et, par suite, $\zeta=\mathfrak{V}(u)$ et $z=V\left(\frac{u}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)$. Donc, puisque $\gamma^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\gamma}$, on aura $-\gamma\mathfrak{V}(u)=V(-\gamma u)$ ou, à l'aide de (233),

$$\left.\begin{aligned} V(u) &= -\mathfrak{V}(-u) \\ \mathfrak{V}(u) &= -V(-u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (234),$$

d'où il suit, que les fonctions $V(u)$ et $\mathfrak{V}(u)$ jouissent de la propriété que *leur somme sera nulle si la somme de leurs variables indépendantes est nulle.*

4° D'après la formule (223), la valeur $z = 1$ correspond à la valeur principale $u_0 = \mathrm{v}$, d'où il résulte, suivant la formule (234), que $V(\mathrm{v}) = 1$ et $\mathfrak{V}(-\mathrm{v}) = -1$. En substituant dans les formules (227) et (230) la valeur $u_0 = 0$ et les valeurs respectives v et $-\mathrm{v}$, on aura donc les valeurs *cardinales* 0 et 1 de la fonction $V(u)$, et les valeurs *cardinales* 0 et -1 de la fonction $\mathfrak{V}(u)$, [voir (228) et (231)].

5° De la formule (234) découle la régle de différentiation suivante,

$$\left.\begin{aligned} V^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1}\,.\,\mathfrak{V}^{(r)}(-u) \\ \mathfrak{V}^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1}\,.\,V^{(r)}(-u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (235).$$

114. *"Théorème d'addition"*. En posant $z_1 = V(u_1)$, $z_2 = V(u_2)$, $z_3 = V(u_3)$, on aura d'après les formules (115) et (234), pour $\sigma = 3$, $n = 1$, $m = 1$ et $\mu = 1$,

$$z_4 = V[-(u_1 + u_2 + u_3)] = -\mathfrak{V}(u_1 + u_2 + u_3) \ldots\ldots (236),$$

les quantités z_1, z_2, z_3 et z_4 devant être déterminées, suivant la formule (107), par le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} z_1(\alpha_0 + \alpha_1 z_1^3) &= (1 - z_1^3)^{\frac{1}{3}} \\ z_2(\alpha_0 + \alpha_1 z_2^3) &= (1 - z_2^3)^{\frac{1}{3}} \\ z_3(\alpha_0 + \alpha_1 z_3^3) &= (1 - z_3^3)^{\frac{1}{3}} \\ z_4(\alpha_0 + \alpha_1 z_4^3) &= (1 - z_4^3)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237).$$

De ce système résulteront, suivant la formule (108), les deux équations *distinctes*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ \Phi_2(z_1, z_2, z_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (238),$$

les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 pouvant être combinées trois à trois de toutes les manières possibles dans ces deux équations.

En éliminant α_0 entre les deux premières équations du système (237) et en chassant du résultat le facteur $z_2^3 - z_1^3$, on aura

$$-\frac{1}{\alpha_1} = z_1 z_2 \{z_1^2(1 - z_2^3)^{\frac{2}{3}} + z_1 z_2 (1 - z_1^3)^{\frac{1}{3}}(1 - z_2^3)^{\frac{1}{3}} + z_2^2(1 - z_1^3)^{\frac{1}{3}}\} \ldots (239).$$

Or, d'après la formule (103) on aura

$$F(0) = 1 = -(\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4)^3 \quad \ldots\ldots \quad (240).$$

De cette formule on tirera, en comparant la seule racine possible $\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$ avec la formule précédente, et en s'appuyant sur les formules (236) et (232),

$$-\mathfrak{V}(u_1+u_2+u_3)\,V'(u_3) = V'^2(u_1)\,V'^2(u_2) + V'(u_1)\,V'(u_2)\,V''(u_1)\,V''(u_2) + V'^2(u_2)\,V'^2(u_1) \ldots (241),$$

égalité qui exprime le *théorème d'addition de la fonction* $\mathfrak{V}(u)$. À l'aide de la formule (234), on déduira immédiatement de cette formule le *théorème d'addition de la fonction* $V(u)$.

En permutant, dans la formule (241), u_3 et u_1 et, ensuite, u_3 et u_2, on aura deux formules nouvelles, exprimant le théorème d'addition de la fonction $\mathfrak{V}(u)$. Ces deux formules, combinées avec la formule (241), équivaudront aux deux équations distinctes (238).

Remarque 1. Puisque le système (237) contient deux paramètres arbitraires α_0 et α_1, deux des trois quantités u_1, u_2, u_3 sont des *variables indépendantes* [n° 72, *rem. 1*]. Donc, une des égalités qui expriment le théorème d'addition de la fonction $\mathfrak{V}(u)$ étant satisfaite, les autres devront être satisfaites *identiquement.*

Remarque 2. Si l'on fait dans la formule (103) $z = 1$, on aura, à l'aide du système (237) et de la formule (240), une foule de formules bien remarquables [cfr n° 166], exprimant les théorèmes d'addition des fonction $V(u)$, $\mathfrak{V}(u)$, et de leurs premières dérivées [(232)].

115. *Développement en série.* Puisque, d'après le n° 63, 1°, la fonction périodique $V(u)$ est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$, il s'ensuit que $V(u)$ sera synectique pour tout point possible, sauf peut-être aux points $u = \mathrm{v}$, $u = \gamma\mathrm{v}$ et $u = \gamma^2\mathrm{v}$ [n° 113, 4° et (233)], correspondants aux points critiques $z = 1$, $z = \gamma$ et $z = \gamma^2$ [n° 111]; et, actuellement, ces points de la fonction $V(u)$ sont critiques [des points d'embranchement], ce qui se fera voir parce que la dérivée seconde $V''(u)$ devient infinie et la dérivée première $V'(u)$ commence à se ramifier aux points v, $\gamma\mathrm{v}$ et $\gamma^2\mathrm{v}$ [(232)]. Du reste, la fonction $V(u)$ ne sera infinie pour aucune valeur finie de u, ce qui se démontrera en faisant $z = \dfrac{1}{\zeta}$ dans la formule (219) et prenant l'intégrale $u = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$, [voir n° 107]. Donc, on tirera de la formule (88), pour $\sigma = 3$, le développement suivant, la fonc-

tion $V(u)$ étant reproductive par rapport aux trois racines cubiques de 1 [(233)], et le rayon du cercle de convergence étant $< \nu$,

$$V(u) = \frac{u}{1} \cdot V'(0) + \frac{u^4}{\lfloor 4} \cdot V^{\text{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7} \cdot V^{\text{VII}}(0) + \ldots \quad \ldots \quad (242),$$

les dérivées $V'(0)$, $V^{\text{IV}}(0)$ etc. devant être calculées d'après la formule (232).

Le développement de la fonction $\mathfrak{V}(u)$ se déduira immédiatement de la formule (242), à l'aide des formules (234) et (235), et sera le suivant:

$$\mathfrak{V}(u) = \frac{u}{1} \cdot V'(0) - \frac{u^4}{\lfloor 4} \cdot V^{\text{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7} \cdot V^{\text{VII}}(0) - \ldots \quad \ldots \quad (243).$$

116. *Les inverses des fonctions* $V(u)$ *et* $\mathfrak{V}(u)$. Si l'on veut, dans la formule (227), exprimer u comme fonction de z, on aura, conformément au n° 91:

$$u = V^{-1}((z)) \doteq V^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r = \gamma^{\pm 1} \cdot V^{-1}(z) + P(\nu_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r \ldots (244),$$

où l'on désigne par les crochets simples la valeur *principale*, et par les crochets doubles la valeur *générale* de la fonction u. La valeur principale $V^{-1}(z)$, étant *reproductive*, d'après la formule (233), par rapport aux trois racines cubiques de 1, sera développable en une série convergente pour $\bar{z} < 1$, suivant la formule (88) $[\sigma = 3]$.

117. En vertu de la formule (234), la fonction $\mathfrak{V}^{-1}((z))$ sera déterminée comme il suit,

$$\mathfrak{V}^{-1}((z)) + V^{-1}((-z)) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (245).$$

XVI. LES FONCTIONS $W(u)$, $\mathfrak{W}(u)$ ET $W_1(u)$ ET LEURS INVERSES.

118. Nous allons maintenant étudier un groupe de fonctions qui seront d'un intérêt spécial par le grand nombre de propriétés remarquables dont elles jouissent.

119. *Périodicité.* Nous prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (246)$$

et son intégrale générale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (247),$$

où les points critiques $a_1 = 1$, $a_2 = \gamma$, $a_3 = \gamma^2$ sont des points d'embranchement, les quantites 1, γ, γ^2 étant les trois racines cubiques de 1, et où la quantité radicale $(1-z^3)^{\frac{1}{3}}$ représente la racine cubique principale. En faisant $f(z) = \frac{1}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$ et supposant que $F(z)$ soit la fonction primitive de $f(z)$, on aura, suivant les n°s 33 et 34, si l'on fait décrire à z les cercles infiniment petits ⓐ, ⓐ, ⓐ dans le sens *négatif*, $f_1(z) = \gamma^2 f(z) = \frac{f(z)}{\gamma}$, $f_2(z) = \gamma^4 f(z) = \frac{f(z)}{\gamma^2}$, $f_3(z) = \gamma^6 f(z) = f(z)$ et, par suite, $F_1(z) = \frac{F(z)}{\gamma}$, $F_2(z) = \frac{F(z)}{\gamma^2}$, $F_3(z) = F(z)$. Pour $\bar{z} < 1$ on trouve le développement suivant

$$(1-z^3)^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}\cdot z^3 + \frac{2.5}{3^2\lfloor 2}\cdot z^6 + \frac{2.5.8}{3^3\lfloor 3}\cdot z^9 + \ldots,$$

d'où résulte la fonction primitive

$$F(z) = z + \frac{2}{3}\cdot\frac{z^4}{4} + \frac{2.5}{3^2\lfloor 2}\cdot\frac{z^7}{7} + \frac{2.5.8}{3^3\lfloor 3}\cdot\frac{z^{10}}{10} + \ldots \quad \ldots \quad (248),$$

la valeur principale u_0 de l'intégrale (247) étant supposée $= 0$ pour $z = 0$, ou

$$u_0 = F(0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (249).$$

Si l'on désigne la série $F(1)$ [convergente, d'après les règles ordinaires, pour $z = 1$] par w, ou

$$\mathrm{w} = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.5}{3^2\lfloor 2}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2.5.8}{3^3\lfloor 3}\cdot\frac{1}{10} + \ldots \quad \ldots\ldots \quad (250),$$

on trouvera suivant le n° 111, en posant $\mathrm{w}_1 = 3^{\frac{1}{2}}.\mathrm{w}_{\frac{1}{6}\pi}$, les douze *périodoïdes*

$$\pm\mathrm{w}_1,\quad \pm\mathrm{w}_1\gamma,\quad \pm\mathrm{w}_1\gamma^2,\quad \pm 2\mathrm{w}_1,\quad \pm 2\mathrm{w}_1\gamma,\quad \pm 2\mathrm{w}_1\gamma^2,$$

dont les six premières représenteront les point de rencontre des six côtés prolongés d'un hexagone régulier de rayon w. Les *intégrales spéciales*,

correspondantes à ces douze périodoïdes, seront toutes représentées par $\gamma^{\pm 1}.u_0$, l'intégrale principale étant désignée par u_0. Ensuite, on aura les six *périodes*

$$\Omega_1 = 3\mathrm{w}, \quad \Omega_2 = 3\gamma\mathrm{w}, \quad \Omega_3 = 3\gamma^2\mathrm{w}, \quad \Omega_4 = 3\mathrm{w}_1, \quad \Omega_5 = 3\gamma\mathrm{w}_1, \quad \Omega_6 = 3\gamma^2\mathrm{w}_1,$$

et, par suite, la somme des multiples de périodes $\sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r$, $\varkappa_r$ représentant un entier quelconque ou zéro. La limite supérieure de l'intégrale (247), considérée comme une fonction $W(u)$ de l'intégrale elle-même, sera par conséquent

$$z = W(u) = W\Big(u_0 + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) = W\Big(\gamma^{\pm 1}.u_0 + P(\mathrm{w}_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) \ldots (251),$$

où $P(\mathrm{w}_1)$ désigne une ou plusieurs périodoïdes ajoutées à l'intégrale spéciale correspondante $\gamma^{\pm 1}u_0$. La fonction $W(u)$ a une valeur nulle pour la valeur principale $u_0 = 0$ [(249)], c'est-à-dire que

$$W(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252).$$

Remarque. Conformément au n° 111, *rem.*, on peut remplacer la somme $\sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r$ par la somme $3\mathrm{w} \sum_{r=1}^{r=2} \varkappa_r \gamma^{r-1}$, le réseau de périodes étant formé par des triangles équilatéraux dont chacun a pour côté $3\mathrm{w}$. Alors, les périodes *distinctes* ne sont qu'au nombre de deux, et la fonction $W(u)$ sera par suite *doublement périodique*, ayant, du rest, les douze périodoïdes mentionnées ci-dessus.

120. Ensuite, en prenant pour point de départ

$$du = \frac{d\zeta}{(1+\zeta^3)^{\frac{2}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253),$$

où les trois points d'embranchement sont $a_1 = \gamma^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\gamma}$, $a_2 = a_1\gamma$, $a_3 = a_1\gamma^2$, le signe radical $(1-\zeta^3)^{\frac{2}{3}}$ représentant la racine cubique principale, c'est-à-dire, la racine qui sera 1 pour $\zeta = 0$, on trouvera la *même périodicité* qu'au n° précédent, en remplaçant w par la série convergente $\mathfrak{w} = -F(-1)$ [(248)] ou

$$\mathfrak{w} = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.5}{3^2\lfloor 2}\cdot\frac{1}{7} - \frac{2.5.8}{3^3\lfloor 3}\cdot\frac{1}{10} + \cdots,$$

et w_1 par la quantité $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_{\frac{1}{6}\pi}$. Donc on aura, conformément à la formule (251), en désignant ζ, considérée comme fonction de u, par $\mathfrak{W}(u)$,

$$\zeta = \mathfrak{W}(u) = \mathfrak{W}\Big(u_0 + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) = \mathfrak{W}\Big(\gamma^{\pm 1} u_0 + P(\mathfrak{w}_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r\Big) \ldots (254),$$

la valeur $\zeta = 0$ correspondant à la valeur principale $u_0 = 0$ [(252)], d'où

$$\mathfrak{W}(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255).$$

121. *Autres propriétés.* 1° Les équations différentielles (246) et (253) peuvent s'écrire, à l'aide des formules (251) et (254),

$$\left.\begin{aligned} W'(u) &= \{1 - W^3(u)\}^{\frac{2}{3}} \\ \mathfrak{W}'(u) &= \{1 + \mathfrak{W}^3(u)\}^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256),$$

ce qui établit la règle de différentiation pour les fonctions $W(u)$ et $\mathfrak{W}(u)$.

2° En désignant par 1, γ, γ^2 les trois racines cubiques de 1, on aura, suivant la formule (90), les fonctions $\dfrac{1}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$ et $\dfrac{1}{(1+\zeta^3)^{\frac{2}{3}}}$ étant irréproductives par rapport à $\dfrac{1}{\gamma}$,

$$\left.\begin{aligned} W(\gamma u) &= \gamma W(u) \\ \mathfrak{W}(\gamma u) &= \gamma \mathfrak{W}(u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (257).$$

Donc, les fonctions $W(u)$ et $\mathfrak{W}(u)$ sont *reproductives* relativement aux trois racines cubiques de 1.

3° Si l'on pose, dans la formule (253), $\gamma^{\frac{1}{2}} z = \zeta$, on aura $du = \dfrac{d\zeta}{(1+\zeta^3)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\gamma^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$ et, par suite, $\zeta = \mathfrak{W}(u)$ et $z = W\Big(\dfrac{u}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\Big)$. Donc, puisque $\gamma^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\gamma}$, on aura $-\gamma \mathfrak{W}(u) = W(-\gamma u)$ ou, à l'aide de la formule (257),

$$\left.\begin{aligned} W(u) &= -\mathfrak{W}(-u) \\ \mathfrak{W}(u) &= -W(-u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258),$$

d'où s'ensuit cette propriété des fonctions $W(u)$ et $\mathfrak{W}(u)$, *que leur somme sera nulle, si la somme de leurs variables indépendantes est nulle.*

4° De la formule précédente résulte la règle de différentiation suivante,

$$\left.\begin{aligned} W^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1} . \mathfrak{W}^{(r)}(-u) \\ \mathfrak{W}^{(r)}(u) &= (-1)^{r-1} . W^{(r)}(-u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259).$$

5° Si l'on introduit dans la formule (246) $\eta = (1-z^3)^{\frac{1}{3}}$ et, par suite, $z = (1-\eta^3)^{\frac{1}{3}}$, on aura $du = \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{d\eta}{(1-\eta^3)^{\frac{2}{3}}}$ et

$$u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = -\int_1^{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \frac{d\eta}{(1-\eta^3)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{(1-\eta^3)^{\frac{2}{3}}} - \int_0^{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \frac{d\eta}{(1-\eta^3)^{\frac{2}{3}}},$$ d'où

l'on tire $z = W(u)$ et $\eta = (1-z^3)^{\frac{1}{3}} = W(\mathrm{w}-u)$, [(250)]. Donc, en désignant la fonction η par $W_1(u)$, on aura les identités suivantes,

$$W^3(u) + W_1^3(u) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

et, en posant $\mathrm{w}-u = v$,

$$\left.\begin{aligned} W_1(u) &= W(\mathrm{w}-u) \\ W_1(\mathrm{w}-v) &= W(v) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261).$$

Donc, les fonctions $W(u)$ et $W_1(u)$ seront des *fonctions complémentaires* l'une de l'autre, comme le sont les fonctions sinus et cosinus.

À l'aide des formules (256), (260) et (261) on aura la règle de différentiation suivante,

$$\left.\begin{aligned} W'(u) &= W_1^2(u) = W^2(\mathrm{w}-u) \\ W_1'(u) &= -W^2(u) = -W_1^2(\mathrm{w}-u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262),$$

règle qui exprime d'une manière élégante et très-simple les dérivées des fonctions $W(u)$ et $W_1(u)$.

6° Si l'on fait dans la formule (246) $\xi = \frac{1}{z}$, on aura

$$du = \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{d\xi}{\gamma(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}}$$

et

$$u = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\gamma}\int_\infty^{\frac{1}{z}} \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\gamma}\left\{\int_0^\infty \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}} - \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}}\right\},$$

d'où il s'ensuit, puisque l'on a $\mathrm{w} = \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\gamma}\int_1^\infty \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}}$, et

par suite $\int_0^\infty \frac{d\xi}{(1-\xi^3)^{\frac{2}{3}}} = (1+\gamma)\mathrm{w} = -\gamma^2\mathrm{w}$, que $z = W(u)$ et

$\frac{1}{z} = W(-\gamma^2\mathrm{w}-\gamma u)$ et, par conséquent, en posant $u = \gamma v$ [(257)] et ayant égard à la période $3\mathrm{w}$,

$$\frac{1}{W(v)} = W(-\mathrm{w}-v) = W(2\mathrm{w}-v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263).$$

Par suite on aura, à l'aide de la formule (258), en remplaçant v par $-v$,

$$\frac{1}{\mathfrak{W}(v)} = \mathfrak{W}(\mathrm{w}-v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264).$$

Donc, les fonctions $\mathfrak{W}(v)$ et $\frac{1}{\mathfrak{W}(v)}$ seront des *fonctions complémentaires* l'une de l'autre, comme le sont les fonctions $\mathrm{Tg}\,(v)$ et $\frac{1}{\mathrm{Tg}\,(v)}$.

7° En vertu de la formule (250), la valeur $z = 1$ correspond à la valeur principale $u_0 = \mathrm{w}$, d'où il résulte, suivant la formule (258), que $1 = W(\mathrm{w}) = -\mathfrak{W}(-\mathrm{w})$. Ensuite, on aura, d'après la formule (261), $W_1(0) = W(\mathrm{w}) = 1$ et $W_1(\mathrm{w}) = W(0) = 0$, et, d'après la formule (263), $\frac{1}{\mathfrak{W}(0)} = W(-\mathrm{w}) = W(2\mathrm{w}) = \pm\infty$. Donc, en substituant dans les fonctions $W(u)$ et $\mathfrak{W}(u)$ les valeurs $u = 0$, w, 2w ou $-\mathrm{w}$, on aura les valeurs *cardinales* respectives 0, 1, $\pm\infty$ de la fonction $W(u)$, et 0, -1, $\mp\infty$ de la fonction $\mathfrak{W}(u)$ [(258)]. De même, en substituant dans la fonction $W_1(u)$ les valeurs 0, w et 2w ou $-\mathrm{w}$ [(261)], on aura les valeurs *cardinales* de cette fonction 1, 0 et $\mp\infty$. Ainsi, en s'appuyant sur ces valeurs cardinales et à l'aide de la loi de différentiation (262), on construira facilement, pour des valeurs "réelles" de u, les traces principales des courbes représentées par les fonctions $W(u)$, $\mathfrak{W}(u)$ et $W_1(u)$.

122. *"Théorème d'addition"*. En posant $z_1 = W(u_1)$, $z_2 = W(u_2)$, $z_3 = W(u_3)$, on aura d'après les formules (115) et (258), pour $\sigma = 3$, $n = 2$, $m = 1$ et $\mu = 1$,

$$z_4 = W[-(u_1+u_2+u_3)] = -\mathfrak{W}(u_1+u_2+u_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (265),$$

les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 devant être déterminées, suivant la formule (107), par le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} z_1(\alpha_0+\alpha_1 z_1^3) &= (1-z_1^3)^{\frac{2}{3}} \\ z_2(\alpha_0+\alpha_1 z_2^3) &= (1-z_2^3)^{\frac{2}{3}} \\ z_3(\alpha_0+\alpha_1 z_3^3) &= (1-z_3^3)^{\frac{2}{3}} \\ z_4(\alpha_0+\alpha_1 z_4^3) &= (1-z_4^3)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (266),$$

d'où l'on tirera, suivant la formule (108), les deux équations *distinctes*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ \Phi_2(z_1, z_2, z_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267),$$

les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 pouvant être combinées trois à trois de toutes les manières possibles dans ces deux équations.

En éliminant α_0 entre les deux premières équations du système (266), et chassant le facteur $z_2^3 - z_1^3$ du résultat, on aura

$$-\frac{1}{\alpha_1} = \frac{z_1 z_2 (z_1^2 (1-z_2^3)^{\frac{1}{3}} + z_1 z_2 (1-z_1^3)^{\frac{1}{3}} (1-z_2^3)^{\frac{2}{3}} + z_2^2 (1-z_1^3)^{\frac{2}{3}})}{1-z_1^3 z_2^3} \quad \ldots (268).$$

Or, d'après la formule (103), on aura

$$F(0) = 1 = -(\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269),$$

d'où l'on tire, en comparant la seule racine possible $\alpha_1 z_1 z_2 z_3 z_4 = -1$ avec la formule précédente, et en s'appuyant sur la formule (265) et (256),

$$-\mathfrak{W}(u_1+u_2+u_3)\, W(u_3) = \frac{W^2(u_1)\, W'^2(u_2) + W(u_1)\, W(u_2)\, W'(u_1)\, W'(u_2) + W^2(u_2)\, W'^2(u_1)}{1 - W^3(u_1)\, W^3(u_2)} \quad \ldots (270),$$

égalité qui exprime par conséquent le *théorème d'addition de la fonction* $\mathfrak{W}(u)$. De cette formule on déduira immédiatement, à l'aide de la formule (258), *le théorème d'addition de la fonction* $W(u)$, et, à l'aide de la formule (261), *celui de la fonction* $W_1(u)$.

En permutant, dans la formule (270), u_3 et u_1, et, ensuite, u_3 et u_2, on aura deux formules nouvelles, exprimant le théorème d'addition de la fonction $\mathfrak{W}(u)$. Ces deux formules, combinées avec la formule (270), équivaudront aux deux équations distinctes (267).

Remarque 1. Puisque le système (266) contient deux paramètres arbitraires α_0 et α_1, deux des trois quantités u_1, u_2 et u_3 sont des *variables indépendantes* [n° 72, *rem. 1*]. Donc, une des égalités qui expriment le théorème d'addition de la fonction $\mathfrak{W}(u)$ étant satisfaite, les autres le devront être *identiquement.*

Remarque 2. Si l'on fait, dans la formule (103), $z = 1$, on trouvera, en s'appuyant sur le système (266) et à l'aide de la formule (269), une foule de formules bien intéressantes, concernant les théorèmes d'addition des fonctions $W(u)$, $\mathfrak{W}(u)$ et $W_1(u)$, [cfr n° 166].

123. *Développement en série.* Puisque, d'après le n° 121, 7°, $W(-\mathrm{w}) = \infty$, le rayon du cercle de convergence doit être $< \mathrm{w}$. À l'intérieur de ce cercle, la fonction $W(u)$ remplira, d'après le n° 115, toutes les conditions de synecticité. Cette fonction étant, de plus, reproductive par rapport aux trois racines cubiques de 1, on aura, suivant la formule (88) [$\sigma = 3$], le développement

$$W(u) = \frac{u}{1} \cdot W'(0) + \frac{u^4}{\lfloor 4} \cdot W^{\text{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7} \cdot W^{\text{VII}}(0) + \ldots \quad \ldots \quad (271),$$

les dérivées $W'(0)$, $W^{\text{IV}}(0)$ etc. devant être calculées d'après la formule (256) ou la formule (262). Le développement de la fonction $\mathfrak{W}(u)$ se déduira immédiatement de cette formule à l'aide de la formule (258), et sera

$$\mathfrak{W}(u) = \frac{u}{1} \cdot W'(0) - \frac{u^4}{\lfloor 4} \cdot W^{\text{IV}}(0) + \frac{u^7}{\lfloor 7} \cdot W^{\text{VII}}(0) - \ldots \quad \ldots \quad (272).$$

124. *Les inverses des fonctions* $W(u)$, $\mathfrak{W}(u)$ *et* $W_1(u)$. Si l'on veut exprimer, dans la formule (251), u en fonction de z, on aura, conformément au n° 116,

$$u = W^{-1}((z)) = W^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r = \gamma^{\pm 1} \cdot W^{-1}(z) + P(\mathrm{w}_1) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r \ldots (273),$$

où l'on désigne par des crochets simples la valeur *principale* et par des crochets doubles la valeur *générale* de la fonction u. La valeur principale $W^{-1}(z)$, étant reproductive par rapport aux trois racines cubiques de 1 [257], sera développable en une série convergente pour $\bar{z} < 1$, suivant la formule (88) $[\sigma = 3]$.

125. Puisque, d'après la formule (262), les racines de l'équation $W'(u) = 0$ sont représentées par $\mathrm{w}\gamma^r$ pour $r = 0, 1, 2,$ en y ajoutant les périodes et les périodoïdes (251), et que toutes ces racines sont, de plus, *doubles* [puisque $W''(u)$ est la première dérivée qui ne s'annule pour aucune de ces racines], la fonction $W^{-1}((z))$ représentera, suivant le n° 64, *trois* branches égales et symétriquement placées autour de tout point u, représenté par l'une quelconque des racines en question, les points d'embranchement étant $z = \gamma^r$, pour $r = 0, 1, 2$.

126. En vertu de la formule (258), la fonction $\mathfrak{W}^{-1}((z))$ sera déterminée comme il suit,

$$\mathfrak{W}^{-1}((z)) + W^{-1}((-z)) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (274).$$

De même, la fonction $\mathfrak{W}_1^{-1}((z))$ sera déterminée de cette manière [(261)],

$$\mathfrak{W}_1^{-1}((z)) + W^{-1}((z)) = \mathrm{w} \quad \ldots \quad \ldots \quad (275).$$

Remarque 1. On pourrait maintenant, d'une manière toute semblable étudier toute fonction périodique, provenant d'une équation différentielle de

la forme $du = \frac{dz}{(1 \mp z^\sigma)^{\frac{n}{\sigma}}}$, en possédant les moyens les plus généraux d'en préciser les propriétés fondamentales, comme la périodicité, le théorème d'addition, le développement en série, etc. Quoique plusieurs de ces fonctions nouvelles fussent, sans doute, très-intéressantes à étudier, l'espace restreint de ce traité nous oblige à nous arrêter ici.

Remarque 2. La fonction simplement périodique et doublement indiquée [n° 55] $z = \psi(u)$, provenant de l'équation différentielle $du = \frac{e^z dz}{z(z-a)}$ et son intégrale générale $u = \int_1^z \frac{e^z dz}{z(z-a)}$ pour a = quantité "réelle", a étant autre que 0 ou 1 et, de plus, $\psi(0) = 1$, aura un intérêt spécial comme fournissant un exemple à deux périodes en raison irrationelle. D'après le n° 63, 1°, cette fonction $z = \psi(u)$ est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $f(z) = \frac{e^z}{z(z-a)}$. Pour un cercle de convergence situé à l'intérieur de ce contour R, la fonction $\psi(u)$ sera donc développable en une série convergente. En formant les coefficients $\psi(u) = 1$, $\psi'(0) = (1-a)e^{-1}$, etc., [la dérivée $\psi'(u)$ étant $= \psi(u)\{\psi(u)-a\}e^{-\psi(u)}$], on aura donc le développement $\psi(u) = 1 + (1-a)e^{-1} \cdot \frac{u}{1} +$ etc., ce qui montre que la fonction $\psi(u)$ ne pourra être considérée d'aucune manière comme une constante [voir n° 55, note *].

XVII. LES FONCTIONS KEPLERIENNES.

127. Nous allons maintenant traiter un groupe de fonctions que nous appellons *keplériennes* à cause de leur propriété d'exprimer, entre autres choses, les relations qui existent entre les trois anomalies du problème de KEPLER. Ces fonctions sont caractérisées comme celles qui s'appellent elliptiques par cette circonstance qu'elles proviennent d'une équation différentielle où entre un paramètre constant.

Pour cela, prenons pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{d\varphi}{\square\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (276),$$

où nous posons, pour abréger,

$$\square\varphi = (1 - k^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (277),$$

k représentant un paramètre constant, lié à un autre paramètre k_1, par la relation

$$k^2 + k_1^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278).$$

Si l'on introduit dans l'équation (276)

$$\eta = \operatorname{Sin}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (279),$$

on aura l'équation différentielle suivante

$$du = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-k^2\eta^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (280).$$

Ensuite, si l'on fait, dans la même équation,

$$\zeta = \operatorname{Tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (281),$$

on trouvera l'équation différentielle

$$du = \frac{(1+\zeta^2)\,d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (282).$$

Enfin, si l'on fait dans cette équation

$$\operatorname{Tg}\chi = k_1 \operatorname{Tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (283),$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{1+k_1^2}{2k_1^3} \\ \varepsilon &= \frac{k^2}{1+k_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (284),$$

on aura l'équation différentielle très-simple

$$du = c(1 - \varepsilon \operatorname{Cos} 2\chi)\,d\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (285).$$

Les quantités φ et χ, considérées comme fonctions de u, ainsi que les fonctions $\operatorname{Sin}\varphi$, $\operatorname{Tg}\varphi$ et $\operatorname{Tg}\chi$ et celles qui s'en déduisent, sont des fonctions qui s'appellent kepleriennes.

Les fonctions $\varphi = K(u)$ et $\chi = \mathfrak{K}\left(\frac{u}{c}\right)$.

128. En écrivant l'intégrale de l'équation différentielle (276) sous la forme

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\square\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (286),$$

on désignera la limite supérieure φ, considérée comme fonction de l'intégrale u, par la notation

$$\varphi = K(u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (287),$$

l'intégrale principale $u_0 = 0$ correspondant à $\varphi = 0$, ou

$$0 = K(0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (288).$$

À l'aide de la relation (283), l'intégrale de l'équation (285) sera

$$v = \int_0^{\chi} (1 - \varepsilon \operatorname{Cos} 2\chi) d\chi = \chi - \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{Sin} 2\chi \quad \ldots \quad (289),$$

où l'on a posé

$$v = \frac{u}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (290).$$

On désignera la limite supérieure χ de l'intégrale (289), considérée comme fonction de l'intégrale elle-même, par la notation

$$\chi = \mathfrak{K}(v) = \mathfrak{K}\left(\frac{u}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (291),$$

où l'on aura, d'après la formule (288), la relation

$$0 = \mathfrak{K}(0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (292).$$

Remarque. Si l'on veut distinguer par une notation spéciale le paramètre k qui entre dans les fonctions $K(u)$ et $\mathfrak{K}(v)$, on écrira $K_k(u)$ et $\mathfrak{K}_k(v)$.

129. En désignant par $\varphi = a_1$ et $\varphi = a_2$ les racines de l'équation $\square\varphi = 0$ qui sont doubles, on aura, suivant la formule (42), les intégrales circulaires $\int^{(a_1)} \frac{d\varphi}{\square\varphi} = \int^{(a_2)} \frac{d\varphi}{\square\varphi} = 0$, d'où il s'ensuit que la fonction $K(u)$ est privée de période. De même, on trouvera que la fonc-

tion $\mathfrak{K}(v)$ est privée de période, parce que la fonction $(1-\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,2\chi)$, sous le signe d'intégration dans la formule (289), n'a pas des points critiques.

130. La règle de différentiation des fonctions $K(u)$ et $\mathfrak{K}(v)$ s'exprimera, d'après les formules (276) et (285), de la manière suivante,

$$\left.\begin{aligned} K'(u) &= \square K(u) \\ \mathfrak{K}'(v) &= \frac{1}{1-\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,2\mathfrak{K}(v)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (293).$$

131. En désignant par 1 et γ $[=-1]$ les deux racines carrées de 1, on aura, suivant la formule (90), les fonctions $\frac{1}{\square\varphi}$ et $(1-\varepsilon\mathrm{Cos}\,2\chi)$ étant irréproductives par rapport à $\frac{1}{\gamma}$,

$$\left.\begin{aligned} K(-u) &= -K(u) \\ \mathfrak{K}(-v) &= -\mathfrak{K}(v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (294),$$

d'où il suit, que les fonctions $K(u)$ et $\mathfrak{K}(v)$ sont *reproductives* ["impaires"] par rapport à -1.

132. *Développement en série.* Puisque, d'après le n° 60, la fonction $K(u)$ est synectique pour un champ R, correspondant au champ de synecticité P de la fonction $\frac{1}{\square\varphi}$, il s'ensuit que $K(u)$ sera synectique pour tout point possible, sauf peut-être aux points $u=u_1$ et $u=u_2$, correspondants aux points critiques $\varphi=a_1$ et $\varphi=a_2$. Mais, comme ces points u_1 et u_2 ne sont pas des points d'embranchement et que la fonction $\varphi=K(u)$ ne pourra être infinie pour aucune valeur finie de u [voir n° 115], la condition de continuité $[K'(u)=\square K(u)$ = quantité non infinie] étant satisfaite, le cercle de convergence de la fonction $K(u)$ aura une étendue quelconque. Donc, on tirera de la formule (88), pour $\sigma=3$, le développement suivant, la fonction $K(u)$ étant reproductive par rapport aux deux racines carrées de 1,

$$K(u)=\frac{u}{1}K'(0)+\frac{u^3}{\lfloor 3}\cdot K'''(0)+\frac{u^5}{\lfloor 5}\cdot K^{\mathrm{v}}(0)+\ldots \quad \ldots\ldots \quad (295),$$

les dérivées $K'(0)$, $K'''(0)$ etc. devant être calculées d'après la formule (293) à l'aide de la formule (288).

Ensuite, puisque la fonction $(1-\varepsilon\operatorname{Cos}2\chi)$, sous le signe d'intégration de la formule (289), s'annule pour $\chi_r = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} + \varkappa\pi$ [k = un entier quelconque ou zéro], et que ces racines sont *simples*, la fonction $\mathfrak{N}(v)$ représentera, suivant le n° 61, deux branches égales et symétriquement placées autour de tout point χ_r, les points d'embranchement correspondants étant représentés par la solution $v_r = \pm\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon^2}\right\} + \varkappa\pi$. Pour un cercle de convergence qui ne comprendra dans son intérieur aucun de ces points v_r, la fonction $\mathfrak{N}(v)$ sera synectique par la même raison que la fonction $K(u)$. Cette fonction $\mathfrak{N}(v)$ étant, de plus, reproductive par rapport aux deux racines carrées de 1, on aura, suivant la formule (88) pour $\sigma = 2$, le développement

$$\mathfrak{N}(v) = \frac{v}{1}\cdot\mathfrak{N}'(0) + \frac{v^3}{\lfloor 3}\cdot\mathfrak{N}'''(0) + \frac{v^5}{\lfloor 5}\cdot K^{\mathrm{v}}(0) + \ldots \quad \ldots \quad (296),$$

où l'on devra calculer les dérivées $\mathfrak{N}'(0)$, $\mathfrak{N}'''(0)$ etc. d'après la formule (293) à l'aide de la formule (292).

133. *Construction géométrique.* Prenons pour point de départ l'égalité géométrique

$$R_\Omega = \frac{\tau}{3}\cdot(1_\omega - a)^3 \quad \ldots \quad (297),$$

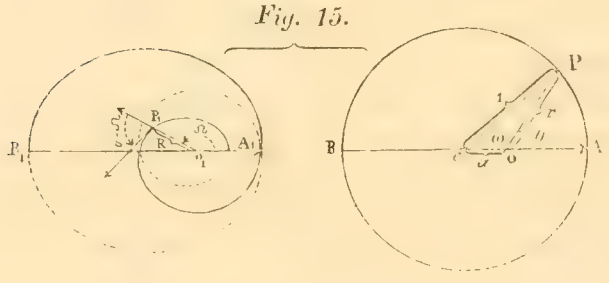
où l'on suppose $1 > a > 0$ et τ = une quantité positive; posons, de plus,

$$1_\omega = a + r_\omega \quad \ldots \quad (298);$$

alors on trouvera

$$\left.\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{3}\tau\cdot r^3 \\ \Omega &= 3\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (299).$$

Fig. 15.



D'après cela, en faisant décrire à 1_ω le cercle AP de centre C [fig. 15], R_Ω décrira un contour correspondant A_1P_1, de sorte que Ω ira de 0 à 3π, tandis que ω va de 0 à π [les argu-

ments θ et ω étant nuls, π, 2π etc. en même temps (298)], le module R, au contraire, ira de son minimum $\overline{O_1A_1} = \frac{1}{3}\tau \cdot \overline{OA}^3$ à son maximum $\overline{O_1B_1} = \frac{1}{3}\tau \cdot \overline{OB}^3$. Ensuite, en faisant passer ω de π à 2π, Ω passera de 3π à 6π, et R_Ω décrira un contour B_1A_1, désigné par la ligne pointillée, lequel est égal à celui $(A_1P_1B_1)$ que R_Ω vient de décrire. Or, en posant

$$\left.\begin{aligned} dR_\Omega &= (d\sigma)_\alpha \\ a &= \operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (300),$$

et en différentiant l'égalité (297) [voir (3)], on aura

$$(d\sigma)_\alpha = i\tau(1_\omega - a)^2 \cdot 1_\omega \cdot d\omega$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\tau}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\lambda}(1 - \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Cos}\omega)d\omega \\ \tfrac{1}{2}\pi &= (\alpha - \Omega) + (\theta - \omega) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (301),$$

d'où il s'ensuit que la différentielle $d\sigma$ de l'arc $A_1P_1B_1$ est liée à la différentielle $d\omega$ par une équation, analogue à celle de (285), et que l'angle $(\alpha - \Omega)$, entre le rayon vecteur et la tangente du contour décrit par R_Ω, est complémentaire à l'angle $CPO = (\theta - \omega)$.

Si l'on pose, dans la formule (301),

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}\lambda \\ \varepsilon &= \operatorname{Sin}\lambda \\ \omega &= 2\chi \\ \sigma &= 2v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (302),$$

on aura l'équation différentielle de l'intégrale (289) ou

$$dv = (1 - \varepsilon \operatorname{Cos} 2\chi)d\chi .$$

Donc, la fonction $\chi = \mathfrak{K}(v)$, pour des valeurs données v et ε, se construira comme il suit:

Étant données les valeurs τ et σ [(302)], on pourra construire, d'après la formule (299), le contour $A_1P_1B_1A_1$ sur lequel on mènera l'arc $2v = \sigma$, dans le sens positif, du point A_1; alors, le point R_Ω sera trouvé. Ensuite, on construira l'angle $AOP = \theta = \frac{1}{3}\Omega$, et l'angle $2\chi = \wedge OCP = \omega$ sera enfin trouvé.

La fonction $\chi = \mathfrak{K}(v)$ étant construite, on construira facilement la fonction $\varphi = K(u)$, au moyen de l'égalité $\operatorname{Tg}\chi = k_1 \operatorname{Tg}\varphi$ [(283)] et de la valeur suivante de k_1 [(284)]

$$k_1^2 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \operatorname{Tg}^2 \tfrac{1}{2}(90^0 - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (303).$$

Remarque. Suivant la formule (289), on aura la longueur de l'arc $A_1P_1B_1 = \pi$ pour une valeur quelconque de ε.

Les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$.

134. *Périodicité.* D'après le n° 48, on aura, pour l'intégrale générale de l'équation (282),

$$u = \int_0^{\zeta} \frac{(1+\zeta^2)\,d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2} = u_0 + \sum_{r=1}^{r=2} \int^{(a_r)} \frac{(1+\zeta^2)\,d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (303'),$$

où les intégrales circulaires autour des infinis $a_1 = \dfrac{i}{k_1}$ et $a_2 = -\dfrac{i}{k_2}$ seront respectivement $c\pi$ et $-c\pi$ [(42)]. Donc, suivant les formules (281) et (287), on aura

$$\zeta = \operatorname{Tg} K(u) = \operatorname{Tg} K(u_0 + \varkappa \,.\, c\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (304),$$

$\varkappa$ représentant un entier quelconque ou zéro.

En ayant égard à l'identité (283) ou

$$\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v) = k_1 \operatorname{Tg} K(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305),$$

la *périodicité* de la fonction $\mathfrak{K}(v)$ s'exprimera, à l'aide de (290), comme il suit,

$$\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v) = \operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v_0 + \varkappa \,.\, \pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306).$$

Donc, les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$ sont *simplement périodiques*, les périodes respectives étant $c\pi$ et π.

135. *Autres propriétés.* 1° Suivant la formule (293), on exprimera la règle de différentiation des fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$ comme il suit,

$$\left.\begin{aligned} \{\operatorname{Tg} K(u)\}' &= \frac{\square K(u)}{\operatorname{Cos}^2 K(u)} \\ \{\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)\}' &= \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \mathfrak{K}(v)\,\{1-\varepsilon \operatorname{Cos} 2\mathfrak{K}(v)\}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (307).$$

2° De la formule (294) on tire immédiatement

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Tg} K(-u) &= -\operatorname{Tg} K(u) \\ \operatorname{Tg} \mathfrak{K}(-v) &= -\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (308),$$

c'est-à-dire que les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$ sont *reproductives* ["impaires"] par rapport à -1.

3° Puisque, d'après la formule (289), on a, pour $\varkappa = \frac{1}{2}\pi$, les valeurs $u = \frac{1}{2}c\pi$ et $v = \frac{1}{2}\pi$, on trouvera, à l'aide des formules (288), (292), (304) et (306), les *valeurs cardinales* suivantes des fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Tg} K(\varkappa \,.\, \pi c) = \operatorname{Tg} \mathfrak{K}(\varkappa \,.\, \pi) \\ \infty &= \operatorname{Tg} K[(\tfrac{1}{2}+\varkappa)c\pi] = \operatorname{Tg} \mathfrak{K}[(\tfrac{1}{2}+\varkappa)\pi] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (309).$$

4° Si l'on fait, dans la formule (282), $x = \dfrac{1}{\zeta}$, on aura

$$du = \frac{(1+\zeta^2)d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2} = -\frac{(1+x^2)dx}{k_1^4\left(1+\dfrac{1}{k_1^2}x^2\right)^2},$$

d'où l'on tire, en posant

$$h_1^2 = \frac{1}{k_1^2} \quad \text{et} \quad h^2 + h_1^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (310),$$

l'intégrale suivante

$$u = \int_0^{\zeta} \frac{(1+\zeta^2)d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2} = -\int_{\infty}^{\frac{1}{\zeta}} \frac{(1+x^2)dx}{k_1^4(1+h_1^2x^2)^2} = \frac{1}{k_1^4}\left\{\int_0^{\infty} \frac{(1+x^2)dx}{(1+h_1^2x^2)^2} - \int_0^{\frac{1}{\zeta}} \frac{(1+x^2)dx}{(1+h_1^2x^2)^2}\right\},$$

d'où il s'ensuit que $\zeta = \operatorname{Tg} K_h(u)$ et $\dfrac{1}{\zeta} = \operatorname{Tg} K_h[k_1^4(\frac{1}{2}c\pi - u)]$, ou

$$\frac{1}{\operatorname{Tg} K_h(u)} = \operatorname{Tg} K_h[k_1^4(\tfrac{1}{2}c\pi - u)] \quad \ldots\ldots \quad (311).$$

De cette formule on tire, à l'aide des formules (305) et (290), la formule analogue pour la fonction $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$,

$$\frac{k_1^2}{\operatorname{Tg} \mathfrak{K}_h(v)} = \operatorname{Tg} \mathfrak{K}_h[k_1^4(\tfrac{1}{2}\pi - v] \quad \ldots\ldots \quad (312).$$

5° Puisque la fonction $\dfrac{1+\zeta^2}{(1+k_1^2\zeta^2)^2}$, sous le signe d'intégration de la formule (303′), s'annule pour $\zeta = \pm i$, ces racines étant *simples*, il

s'ensuit, d'après le n° 61, que la fonction $\operatorname{Tg} K(u)$ représentera deux branches égales et symétriquiment placées autour de l'un et de l'autre des deux points $\zeta = \pm i$, les points d'embranchement correspondants de u étant donnés par l'équation $\pm i = \operatorname{Tg} K(u)$. De même, la fonction $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$ représentera deux branches égales et symétriquement placées autour de l'un et de l'autre des deux points $\pm i k_1 = \operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$, les points d'embranchement correspondants de v pouvant être calculés d'après la formule (289).

136. *Développement en série.* Les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$ pourront être développées, suivant la formule (88) [$\sigma = 2$], pour un cercle de convergence qui ne renfermera aucun infini ni aucun point d'embranchement. Mais nous laissons de côté ces développements, puisque les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Tg} \mathfrak{K}(v)$, comme nous le ferons voir plus loin, se développeront, d'une manière plus convenable, en produits infinis.

137. *"Théorème d'addition".* En considérant l'équation différentielle (282) ou

$$du = \frac{(1+\zeta^2)\,d\zeta}{(1+k_1^2\zeta^2)^2},$$

ou voit qu'elle est de la forme (117) pour $\sigma = 2$, $n = 4$, $m = 1$, $\tau = 1$ et $g = mn = 4$, en posant, suivant la formule (96), $\mu\sigma + 1 < 4$, c'est-à-dire, $\mu = 1$. La condition (116) étant satisfaite par ces valeurs des nombres en question, les fonctions

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \operatorname{Tg} K(u_1) \\ \zeta_2 &= \operatorname{Tg} K(u_2) \\ \zeta_3 &= \operatorname{Tg} K(u_3) \\ \zeta_4 &= -\operatorname{Tg} K(u_1+u_2+u_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (313)$$

devront satisfaire, suivant les formules (114) et (115), au système d'équations

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1(\alpha_0+\alpha_1\zeta_1^2) &= (1+k_1^2\zeta_1^2)^2 \\ \zeta_2(\alpha_0+\alpha_1\zeta_2^2) &= (1+k_1^2\zeta_2^2)^2 \\ \zeta_3(\alpha_0+\alpha_1\zeta_3^2) &= (1+k_1^2\zeta_3^2)^2 \\ \zeta_4(\alpha_0+\alpha_1\zeta_4^2) &= (1+k_1^2\zeta_4^2)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (314),$$

où deux des trois quantités u_1, u_2 et u_3 sont *indépendantes* [n° 72, *rem. I*] et une *dépendante*, excepté dans le cas où l'on suppose l'une des quantités

α_0 ou α_1 nulle, quand une de ces trois quantités sera indépendante et les deux autres dépendantes. En éliminant α_0 et α_1 entre ces quatre équations, on aura les deux équations *distinctes* [(108)]

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= 0 \\ \Phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (315),$$

les quantités ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 pouvant être combinées trois à trois d'une autre manière quelconque. Si l'une de ces deux équations distinctes est satisfaite, l'autre le sera *identiquement*.

Puisque ζ_1, ζ_2, ζ_3 et ζ_4, d'après le système (314), sont les racines d'une équation biquadratique de la forme

$$\zeta^4 - \frac{\alpha_1}{k_1^4}\cdot\zeta^3 + \frac{2}{k_1^2}\cdot\zeta^2 - \frac{\alpha_0}{k_1^4}\cdot\zeta + \frac{1}{k_1^4} = 0 \quad \ldots \quad (316),$$

on aura les relationes suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4 &= \frac{1}{k_1^4} \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 &= \frac{\alpha_1}{k_1^4} \\ \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_1\zeta_4 + \zeta_2\zeta_3 + \zeta_2\zeta_4 + \zeta_3\zeta_4 &= \frac{2}{k_1^2} \\ \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} + \frac{1}{\zeta_3} + \frac{1}{\zeta_4} &= \alpha_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (317).$$

Du système (314) on tire les solutions suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{k_1^4\zeta_1\zeta_2(\zeta_1^2 + \zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2) + 2k_1^2\zeta_1\zeta_2 - 1}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 + \zeta_2)} \\ \alpha_0 &= \frac{(\zeta_1^2 + \zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2) + 2k_1^2\zeta_1^2\zeta_2^2 - k_1^4\zeta_1^3\zeta_2^3}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 + \zeta_2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (318),$$

où l'on pourra remplacer ζ_1 par ζ_3 ou ζ_4, ζ_2 par ζ_3 ou ζ_4, et enfin ζ_1 et ζ_2 respectivement par ζ_3 et ζ_4, et l'on obtient ainsi cinq nouvelles formules, soit en tout six formules de la forme (318). Si l'on introduit dans le système (317) ces six expressions pour l'un et l'autre des deux paramètres α_0 et α_1, on obtiendra, en somme, quatorze formules, qui ensemble formeront le *théorème d'addition de la fonction* $\operatorname{Tg} K(u)$, et équivaudront aux deux équations distinctes (315). Donc, deux des trois quantités u_1, u_2 et u_3

étant indépendantes, il faut et il suffit que l'une de ces quatorze formules soit satisfaite pour que les autres le soient identiquement

Si l'on pose, suivant la formule (313),

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v_1) \\ z_2 &= \operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v_2) \\ z_3 &= \operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v_3) \\ z_4 &= -\operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v_1+v_2+v_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (319),$$

on tirera, à l'aide de l'identité (305), immédiatement des formules (317) et (318) le théorème d'addition suivant de la fonction $\operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v)$:

$$\left.\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 z_4 &= 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= \frac{\alpha_1}{k_1^3} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 &= 2 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} &= \frac{\alpha_0}{k_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (320),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{k_1^3} &= \frac{z_1 z_2 (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + 2 z_1 z_2 - 1}{z_1 z_2 (z_1 + z_2)} \\ \frac{\alpha_0}{k_1} &= \frac{(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + 2 z_1^2 z_2^2 - z_1^3 z_2^3}{z_1 z_2 (z_1 + z_2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (321),$$

deux systèmes d'équations qui, en permutant d'une manière convenable z_1, z_2, z_3 et z_4, fourniront, comme l'ont fait les formules (317) et (318), quatorze formules qui ensemble formeront le *théorème d'addition de la fonction* $\operatorname{Tg}\mathfrak{K}(v)$, deux des quantités v_1, v_2 et v_3 étant *indépendantes* et une *dépendante*. Donc, une de ces quatorze formules étant satisfaite, les autres le seront identiquement.

Remarque. Pour le cas où l'on suppose, dans le système (314), l'une des quantités α_0 ou α_1 nulle, l'une des quantités u_1, u_2 et u_3, dans les systèmes (317) et (318), sera indépendante et les deux autres dépendantes. La même chose autre lieu, dans la même supposition, pour les quantités v_1, v_2 et v_3 dans les systèmes (320) et (321).

Les fonctions $\operatorname{Sin} K(u)$, $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$.

138. Prenons pour point de départ l'équation différentielle (280) ou

$$du = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2 \cdot (1-k^2\eta^2)^2}}$$

et son intégrale générale

$$u = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2 \cdot (1-k^2\eta^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (322);$$

alors on aura, suivant la formule (279),

$$\eta = \operatorname{Sin} K(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (323)$$

et, suivant la formule (288),

$$0 = \operatorname{Sin} K(0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324).$$

De plus, on aura, suivant la formule (294),

$$\operatorname{Sin} K(-u) = -\operatorname{Sin} K(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325).$$

139. *Périodicité.* Si l'on pose dans la formule (322) $f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2\,(1-k^2\eta^2)^2}}$, la fonction $f(\eta)$ aura deux points d'embranchement $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, et deux infinis $a_3 = \frac{1}{k}$, $a_4 = -\frac{1}{k}$. En désignant par 1 et γ les deux racines carrées de 1, on aura donc, d'après les n°s 33 et 34, $f_1(\eta) = \frac{f(\eta)}{\gamma}$, $f_2(\eta) = \frac{f_1(\eta)}{\gamma} = f(\eta)$, d'où proviendront les deux *périodoïdes* suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \omega_{(1)} &= \int^{|a_1|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^1 f(\eta)\,d\eta \\ \omega_{(2)} &= \int^{|a_2|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^{-1} f(\eta)\,d\eta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326).$$

Or, aux limites d'intégration 0 et ± 1 correspondent les valeurs respectives 0 et $\pm\frac{1}{2}\pi$ des quantités φ et χ [n° 127 et 128], d'où l'on tire, à l'aide de (289), les valeurs suivantes des périodoïdes

$$\left.\begin{aligned} \omega_{(1)} &= c\pi \\ \omega_{(2)} &= -c\pi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (327),$$

les intégrales spéciales étant, d'après la formule (73),

$$u_{(1)} = u_{(2)} = -u_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (328).$$

À l'aide du n° 50, on aura, par conséquent, la *période*

$$\omega_{(1,\,2)} = \omega_{(1)} - \omega_{(2)} = 2c\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329).$$

En vertu des formules (327)—(329), on pourra donc poser

$$\operatorname{Sin} K(u) = \operatorname{Sin} K(u_0 + \varkappa \,.\, 2c\pi) = \operatorname{Sin} K(-u_0 \pm c\pi + \varkappa \,.\, 2c\pi) \ldots (330),$$

$\varkappa$ représentant un entier quelconque ou zéro.

Ensuite, les deux intégrales circulaires, prises autour des infinis $a_3 = \frac{1}{k}$ et $a_4 = -\frac{1}{k}$, acquerront les valeurs respectives $+c\pi$ et $-c\pi$ [(42)], d'où suit, d'après la formule (71), l'égalité

$$\operatorname{Sin} K(u) = \operatorname{Sin} K(u_0 + \varkappa \,.\, c\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331).$$

Or, d'après les formules (330) et (325), on a $\operatorname{Sin} K(u) = \operatorname{Sin} K(-u_0 \pm c\pi) = -\operatorname{Sin} K(u_0 \mp c\pi)$, d'où il s'ensuit, en comparant cette égalité avec la formule (331), que $\operatorname{Sin} K(u)$ représentera l'une quelconque des deux valeurs $\pm \operatorname{Sin} K(u_0)$, propriété qui s'exprime par l'égalité

$$\operatorname{Sin} K((u)) = \pm \operatorname{Sin} K(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (332),$$

où l'on désigne par les crochets doubles la valeur *générale* et par les crochets *simples* la valeur *spéciale* de la fonction, cette dernière valeur étant supposée positive pour $c\pi > u > 0$.

Les fonctions $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$ se détermineront comme il suit,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} K(u) \,.\, \operatorname{Tg} K(u) &= \operatorname{Sin} K(u) \\ \square K(u) &= \{1 - k^2 \operatorname{Sin}^2 K(u)\}^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333),$$

d'où il suit que les fonctions $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$ ont la même période $c\pi$ que les fonctions $\operatorname{Tg} K(u)$ et $\operatorname{Sin} K(u)$.

140. Conformément à la formule (309), on trouvera les valeurs *cardinales* suivantes des fonctions $\operatorname{Sin} K(u)$, $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Sin} K(\varkappa c\pi) = \operatorname{Cos} K\{(\tfrac{1}{2} + \varkappa) c\pi\} \\ 1 &= \operatorname{Sin} K(\tfrac{1}{2} c\pi) = \operatorname{Cos} K(0) = \square K(0) \\ k_1^4 &= \square K\{(\tfrac{1}{2} + \varkappa) c\pi\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (334),$$

où $\varkappa$ représente un entier quelconque ou zéro.

Remarque. D'après le n° 132, les cercles de convergence des fonctions $\operatorname{Sin} K(u)$, $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$ auront une étendue quelconque, la première fonction pouvant se développer suivant la formule (88) pour $\sigma = 2$, et les deux autres suivant la formule (86) pour la même valeur de σ [(294)]. Mais, ces fonctions, comme nous le ferons voir plus loin, se développeront, d'une manière plus convenable, en produits infinis.

141. *Théorème d'addition.* Si l'on pose suivant la formule (114),

$$\left.\begin{array}{l}
\eta_1 = \operatorname{Sin} K(u_1),\ \xi_1 = \sqrt{1-\eta_1^2} = \operatorname{Cos} K(u_1),\ \square_1 = (1-k^2\eta_1^2)^2 = \square K(u_1) \\
\eta_2 = \operatorname{Sin} K(u_2),\ \xi_2 = \sqrt{1-\eta_2^2} = \operatorname{Cos} K(u_2),\ \square_2 = (1-k^2\eta_2^2)^2 = \square K(u_2) \\
\eta_3 = \operatorname{Sin} K(u_3),\ \xi_3 = \sqrt{1-\eta_3^2} = \operatorname{Cos} K(u_3),\ \square_3 = (1-k^2\eta_3^2)^2 = \square K(u_3) \\
\eta_4 = \operatorname{Sin} K(u_4),\ \xi_4 = \sqrt{1-\eta_4^2} = \operatorname{Cos} K(u_4),\ \square_4 = (1-k^2\eta_4^2)^2 = \square K(u_4)
\end{array}\right\} \ldots (335),$$

et suivant la formule (115),

$$\left.\begin{array}{l}
\eta_5 = -\operatorname{Sin} K(u_1+u_2+u_3+u_4) \\
\xi_5 = \sqrt{1-\eta_5^2} = \operatorname{Cos} K(u_1+u_2+u_3+u_4) \\
\square_5 = (1-k^2\eta_5^2)^2 = \square K(u_1+u_2+u_3+u_4)
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (336),$$

on aura d'après la formule (107), pour $\sigma = 2$, $n = 1$, $m = 5$ et $g = mn = 5$, le système équations suivant, $(\mu\sigma+1)$ étant ≤ 5,

$$\left.\begin{array}{l}
\eta_1(\alpha_0+\alpha_1\eta_1^2+\alpha_2\eta_1^4) = \xi_1\square_1 \\
\eta_2(\alpha_0+\alpha_1\eta_2^2+\alpha_2\eta_2^4) = \xi_2\square_2 \\
\eta_3(\alpha_0+\alpha_1\eta_3^2+\alpha_2\eta_3^4) = \xi_3\square_3 \\
\eta_4(\alpha_0+\alpha_1\eta_4^2+\alpha_2\eta_4^4) = \xi_4\square_4 \\
\eta_5(\alpha_0+\alpha_1\eta_5^2+\alpha_2\eta_5^4) = \xi_5\square_5
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (337).$$

Dans ce système, trois des quatre quantités u_1, u_2, u_3 et u_4 sont *indépendantes* et *une dépendante*, excepté dans le cas où *un* ou *deux* des trois paramètres α_0, α_1 ou α_2 sera supposé nul, quand on prendra respectivement *deux* ou *une* des quautités u_1, u_2, u_3 et u_4 comme variables indépendantes [n° 72, *rem. 1*]. En éliminant α_0, α_1 et α_2 du système (337), on aura, suivant la formule (108), les deux équations *distinctes*,

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = 0 \\
\Phi_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_5) = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (338),$$

les quantités η_1, η_2, η_3, η_4 et η_5 pouvant être combinées quatre à quatre d'une autre manière quelconque. Ces deux équations sont caractérisées par ceci que, l'une d'elles étant satisfaite, l'autre sera satisfaite identiquement. La formule (338) contient donc le *théorème d'addition* de la fonction $\operatorname{Sin} K(u)$.

Remarque. Si l'on fait, dans la formule (103), $\eta = 0$, $\eta = 1$ et $\eta = \frac{1}{k}$, on en tirera trois formules qui, combinées avec le système (337), donneront naissance à une foule de formules exprimant les théorèmes d'addition des fonctions $\operatorname{Sin} K(u)$, $\operatorname{Cos} K(u)$ et $\square K(u)$.

Application au problème de KEPLER.

142. Prenons pour point de départ l'équation différentielle du problème de KEPLER,

$$\frac{d(\mathrm{v}-\varpi)}{\{1+e\operatorname{Cos}(\mathrm{v}-\varpi)\}^2} = \frac{n\,dt}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots \quad (339),$$

où $\mathrm{v}-\varpi$ représente l'anomalie vraie, e l'excentricité, $n = \frac{2\pi}{T}$ le moyen mouvement, T la durée d'une révolution, et t le temps. Cette équation se réduira au type normal de l'équation (276) en posant

$$\frac{d\frac{1}{2}(\mathrm{v}-\varpi)}{\left\{1-\frac{2e}{1+e}\cdot\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(\mathrm{v}-\varpi)\right\}^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\tfrac{1}{2}n\,dt \quad \ldots \quad (340);$$

alors, en comparant cette formule avec les formules (276), (278) et (284), on déterminera les constantes k, k_1, c et ε comme il suit,

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{2e}{1+e} \\ k_1^2 &= \frac{1-e}{1+e} \\ c &= \frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \varepsilon &= e \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (341).$$

D'après cela, on déterminera les variables u et v, à l'aide de la formule (290), de la manière suivante,

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}cnt \\ v &= \frac{u}{c} = \tfrac{1}{2}nt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (342).$$

Si l'on désigne par U l'anomalie excentrique, on trouvera à l'aide des formules (287) et (291),

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\mathrm{v}-\varpi) &= \varphi = K(\tfrac{1}{2}cnt) \\ \tfrac{1}{2}U &= \chi = \mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (343);$$

alors on pourra écrire l'identité (283) sous la forme

$$\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt) = \left\{\frac{1-e}{1+e}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{Tg}\,K(\tfrac{1}{2}cnt) \quad \ldots\ldots \quad (344).$$

D'ailleurs, l'équation (289) prendra la forme connue,

$$nt = U - e\,\mathrm{Sin}\,U \quad \ldots\ldots\ldots \quad (345).$$

Puisque, d'après le n° 134, $c\pi$ et π sont les périodes des fonctions respectives $\mathrm{Tg}\,K(u)$ et $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(v)$, et qu'aux valeurs $u = c\pi$ et $v = \pi$ correspond le temps $t = T$, le temps d'une révolution T sera la période des fonctions simplement périodiques $\mathrm{Tg}\,K(\tfrac{1}{2}cnt)$ et $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt)$.

Remarque. D'après les formules (295) et (296) on pourra développer l'anomalie vraie $\mathrm{v}-\varpi$ et l'anomalie excentrique U en séries de t. Les fonctions $\mathrm{Tg}\,K(\tfrac{1}{2}cnt)$ et $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt)$ se développeront plus convenablement en produits infinis [n° 136].

143. Suivant le n° 133, on pourra construire l'anomalie excentrique $2\chi = U$, étant donnés l'anomalie moyenne $nt = 2v$ et l'excentricité e [(302)]. Pour cela, on portera la valeur $nt = A_1P_1$ [fig. 15] sur l'arc $A_1P_1B_1$, que l'on suppose construit pour la valeur donnée de e; alors l'angle $A_1O_1P_1 = \Omega$ sera trouvé. Ensuite, en construisant l'angle $\theta = \frac{1}{2}\Omega$, on aura l'angle $\omega = U$. Enfin, U étant donné, on construira facilement l'anomalie vraie $\mathrm{v}-\varpi$, soit à l'aide de la relation $\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}U = k_1\,\mathrm{Tg}\,\frac{1}{2}(\mathrm{v}-\varpi)$, soit en s'appuyant sur la construction connue au moyen de l'ellipse. La figure 15 donnera donc une représentation claire de la variabilité des trois anomalies dans le problème de KEPLER.

144. Si l'on pose, suivant la formule (310),

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{1}{k_1^2} = \frac{1+e}{1-e} \\ h^2 &= 1-h_1^2 = -\frac{2}{1-e} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (346),$$

on aura d'après les formules (311) et (312)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{Tg}\,K_k(\frac{1}{2}cnt)} &= \mathrm{Tg}\,K_h\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\pi-nt}{1+e}\right\} \\ \frac{1}{\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}_k(\frac{1}{2}nt)} &= \mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}_h\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{2}(\pi-nt)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (347).$$

Ces formules seront utiles pour le calcul de l'anomalie vraie ou excentrique dans le voisinage de l'aphélie.

145. À l'aide de la formule (342), le système (319) pourra s'écrire,

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt_1) \\ z_2 &= \mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt_2) \\ z_3 &= \mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\tfrac{1}{2}nt_3) \\ z_4 &= -\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}[\tfrac{1}{2}n(t_1+t_2+t_3)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (348),$$

d'ou l'on déduit, d'après le formules (320) et (321), le *théorème d'addition* de la fonction $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\frac{1}{2}nt)$,

$$\left.\begin{aligned} z_1z_2z_3z_4 &= 1 \\ z_1+z_2+z_3+z_4 &= \frac{\alpha_1}{k_1^3} \\ z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4 &= 2 \\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4} &= \frac{\alpha_0}{k_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (349),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{k_1^3} &= \frac{z_1z_2(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+2z_1z_2-1}{z_1z_2(z_1+z_2)} \\ \frac{\alpha_0}{k_1} &= \frac{(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+2z_1^2z_2^2-z_1^3z_2^3}{z_1z_2(z_1+z_2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (350),$$

deux systèmes d'équations qui, en permutant d'une manière convenable z_1, z_2, z_3 et z_4, fourniront quatorze égalités, contenant deux des trois temps t_1, t_2 et t_3 comme variables *indépendantes*. Donc, une de ces égalités étant satisfaite, les autres le seront identiquement.

Remarque. Le théorème d'addition de la fonction $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{K}(\frac{1}{2}nt)$ étant donné par les formules (349) et (350), on en déduira immédiatement, à l'aide de formule (344), celui de la fonction $\mathrm{Tg}\,K(\frac{1}{2}cnt)$. Les théorèmes d'addition des fonctions $\mathrm{Sin}\,K(\frac{1}{2}cnt)$ et $\square K(\frac{1}{2}cnt)$ se trouveront immédiatement du n° 141.

Nous allons maintenant traiter un nouveau groupe de fonctions qui découlent d'une équation différentielle contenant aussi un paramètre constant.

XVIII. LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

146. On prendra pour point de départ l'équation différentielle

$$du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352),$$

k étant un *paramètre* *) constant, lié à un autre paramètre k_1, dit paramètre "*complémentaire*", par la relation,

$$k^2 + k_1^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353).$$

En mettant l'intégrale de l'équation (351) sous la forme

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354),$$

la limite supérieure de l'intégration, considérée comme fonction de l'intégrale, s'appelle "*amplitude*". On la désigne par

$$\varphi = \mathrm{am}\,u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (355),$$

*) Nous dirons paramètre plutôt que "module" puisque ce dernier mot a une autre signification dans la théorie des quantités géométriques. Par la même raison, on évitera le mot "argument" en nommant la quantité u intégrale ou, tout simplement, variable.

en supposant que la valeur $\varphi = 0$ corresponde à la valeur $u = 0$ ou que

$$0 = \operatorname{am} 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (356).$$

Maintenant, les fonctions φ, $\operatorname{Sin}\varphi$, $\operatorname{Tg}\varphi$, $\operatorname{Cos}\varphi$ et $\Delta\varphi$ s'appellent *fonctions elliptiques* ou plus particulièrement, fonctions elliptiques *de prémière espèce.*

Si l'on fait dans la formule (351)

$$\eta = \operatorname{Sin}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (357),$$

$$\zeta = i\operatorname{Tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (358),$$

$$k_1\sigma = \Delta\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (359),$$

on en déduira les l'équations différentielles suivantes

$$du = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-k^2\eta^2}} \quad \ldots\ldots \quad (360),$$

$$diu = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-k_1^2\zeta^2}} \quad \ldots\ldots \quad (361),$$

$$du = \frac{id\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-k_1^2\sigma^2}} \quad \ldots\ldots \quad (362).$$

Remarque. Si l'on veut indiquer par une notation spéciale que le paramètre contenu dans la fonction $\operatorname{am} u$ est k, on écrira $\operatorname{am}(u, k)$ ou, plus simplement, $\operatorname{am}_k(u)$.

147. L'intégrale (354), prise entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, s'exprimera, d'après un calcul élémentaire, par la série convergente suivante,

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right\} \ldots (363).$$

Si l'on remplace dans la formule (354) le paramètre k par k_1, on posera

$$K_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta_{k_1}\varphi} = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2k_1^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k_1^6 + \ldots\right\} \ldots (364).$$

148. Puisque la fonction $\frac{1}{\Delta\varphi}$ de la formule (354) est irréproductive par rapport à $\frac{1}{\gamma}$, la quantité γ étant $= -1$, on aura, suivant la formule (90),

$$\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365).$$

Donc, la fonction $\operatorname{am} u$ est *reproductive* ["impaire"] par rapport à -1.

Remarque. De la formule précédente il s'ensuit immédiatement que les fonctions $\operatorname{Sin am} u$ et $\operatorname{Tg am} u$ sont reproductives ["impaires"], mais les fonctions $\operatorname{Cos am} u$ et $\Delta \operatorname{am} u$ irréproductives ["paires"] par rapport à -1.

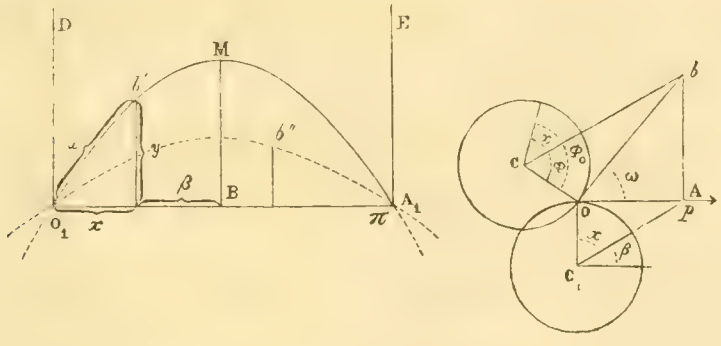
Construction géométrique des fonctions elliptiques.

149. Prenons pour point de départ l'égalité géométrique

$$R_\Omega = \frac{1}{i} \log \frac{i - \varrho_\omega}{i + \varrho_\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (366),$$

où ϱ_ω représentera une droite Ob [fig. 16], passant par l'origine O et faisant l'angle ω avec l'axe OA. Alors, puisque ω est constant, on pourra poser

Fig. 16.



$$\left.\begin{aligned} k &= \operatorname{Sin}\omega \\ k_1 &= \operatorname{Cos}\omega \\ k_2 &= \operatorname{Tg}\omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367).$$

Si l'on fait dans la formule (366)

$$\varrho = \operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (368)$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\varrho}{1+\varrho^2} &= \operatorname{Sin}\varphi \\ \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} &= \operatorname{Cos}\varphi \\ \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} &= \operatorname{Tg}\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369),$$

on en tirera, en posant $R_\Omega = x + iy$,

$$\operatorname{Tg} x = k_1 \operatorname{Tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (370),$$

$$y = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + k \operatorname{Sin}\varphi}{1 - k \operatorname{Sin}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (371),$$

ou, en éliminant φ,

$$\tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \operatorname{Sh} y = k_2 \operatorname{Sin} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (372).$$

Cette équation représentera donc, en coordonnées rectangulaires, la courbe R_Ω, correspondante à la droite ϱ_ω ou Ob. D'après cela, soit O_1A_1 l'axe des abscisses x, et menons deux cercles de rayon 1 et de centres C et C_1, touchant respectivement les droites Ob et OA à l'origine O; posons. de plus, l'angle $OCb = \varphi$. Alors l'angle OC_1p sera $= x$ [(370)], le point p étant la projection du point b sur l'axe OA. Donc, les angles φ et x passeront en croissant en même temps par les valeurs 0, $\frac{1}{2}\pi = O_1B$ et $\pi = O_1A_1$, etc., et aussi l'ordonnée y passera en même temps par les valeurs respectives 0, $\frac{1}{2}\log \operatorname{Cotg}^2 \frac{1}{2}(90^0 - \omega) = \text{max. } BM$ et 0, etc. [(371)]. La courbe $O_1MA_1 \ldots$, représentée par R_Ω ou l'équation (372), sera donc symétrique de part et d'autre de l'ordonnée max. BM, et formera un système ondulé, étendu à l'infini dans le sens positif et dans le sens négatif, et coupant l'axe des x en tout point représenté par $\varkappa\pi$ [$\varkappa =$ un entier quelconque ou zéro]. Pour $k = 0$ [(367)], la courbe O_1MA_1 va se confondre avec l'axe O_1BA_1, et sa longueur sera $= \pi$; pour k convergeant vers 1, au contraire, la courbe O_1MA_1 s'approchera indéfiniment de se confondre avec les perpendiculaires infinies O_1D et A_1E, et sa longueur sera en ce cas $= \infty$.

150. Si l'on pose la différentielle

$$dR_{\Omega} = (du)_{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (373),$$

où du désigne l'élément de l'arc O_1MA_1 et α l'inclinaison de cet élément sur l'axe O_1A_1 [n° 6], on aura, en différentiant l'égalité (366),

$$\tfrac{1}{2}(du)_{\alpha} = \frac{d\varrho_{\omega}}{1+(\varrho_{\omega})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (374),$$

d'où l'on tire, à l'aide des formules (367)—(369),

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (375),$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Tg}\alpha = k_2 \operatorname{Cos}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (376).$$

151. De la formule (375) on conclura que l'angle OCb ou φ sera la fonction $\operatorname{am} u$, la quantité u étant = l'arc O_1b' quand les points b et b' correspondent l'un à l'autre. Donc, à l'amplitude $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ correspondra l'arc $u = O_1M = K$ [(363)], et, en général, à l'amplitude $\varkappa . \frac{1}{2}\pi$ correspondra l'arc $\varkappa K$, c'est-à-dire que [(355)]

$$\varkappa . \tfrac{1}{2}\pi = \operatorname{am}(\varkappa . K) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (377),$$

$\varkappa$ représentant un entier quelconque ou zéro.

Ensuite, de la formule (376) on conclura que l'inclinaison α de l'élément du sur l'axe O_1A_1 aux points O_1 et A_1 sera respectivement ω et $-\omega$ [(367)], et que la même inclinaison au point M sera nulle. Donc on aura cette règle importante pour construire soit l'intégrale u, soit l'amplitude φ:

La courbe O_1MA_1 [(372)] étant construite pour un paramètre donné $k = \operatorname{Sin}\omega$, on pourra, pour une amplitude donnée $\varphi = \bigwedge OCb$, construire $x = \bigwedge OC_1p$; donc, l'intégrale u = l'arc O_1b' s'obtiendra en portant x *sur l'axe O_1A_1 et élevant l'ordonnée* y. *De même, on pourra, pour une valeur donnée u = l'arc O_1b', construire* x *en abaissant l'ordonnée* y; *donc en portant cette valeur de* x *sur l'arc de cercle, comme l'indique la fig. 16, l'amplitude φ se construira en menant la droite C_1p, la perpendiculaire pb et, enfin, la droite bC.*

152. De la formule (370) on déduira les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} x &= \frac{k_1 \operatorname{Sin}\varphi}{\Delta\varphi} \\ \operatorname{Cos} x &= \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\Delta\varphi} \\ \sqrt{1-k^2\operatorname{Cos}^2 x} &= \frac{k_1}{\Delta\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (378).$$

Remarque. Puisque on peut construire, suivant le n° précédent, pour une valeur donnée de u, tant $\operatorname{Sin} x$ et $\operatorname{Cos} x$ que $\operatorname{Sin}\varphi$ et $\operatorname{Cos}\varphi$, on pourra aisément, à l'aide des relations (378), construire la fonction $\Delta\varphi$ ou $\Delta\operatorname{am} u$.

153. Des formules (375) et (376) on tire les égalités $k_1 du = \Delta\varphi . dx$ et $k\operatorname{Cos}\varphi du = \Delta\varphi . dy$, d'où l'on trouvera, à l'aide des formules (378) et (372),

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\operatorname{Cos}^2 x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (379),$$

$$du = \frac{dy}{\sqrt{1-k_1^2\operatorname{Cos}^2 iy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (380),$$

égalités qui expriment l'élément d'arc du en fonctions des coordonnées x et y et de leurs différentielles.

154. Si l'on pose dans la formule (379)

$$x+\beta = \tfrac{1}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (381),$$

on en tirera, en tenant compte de l'égalité (375),

$$du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{d\beta}{\Delta\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (382),$$

d'où il s'ensuit, en ayant égard aux limites de l'integration,

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\beta} \frac{d\beta}{\Delta\beta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\Delta\beta} - \int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\Delta\beta}$$

ou, qui est la même chose [(363)],

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{am}(u) \\ \beta &= \operatorname{am}(K-u) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (383),$$

Donc, l'angle β qui est l'angle complémentaire de x [(381)] est ce que l'on appelle la *coamplitude*, dont la *construction* s'ensuivra directement du n° 151.

Des formules (370) et (378) on tire immédiatement, à l'aide de la formule (381), les relations suivantes entre l'amplitude et la coamplitude,

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Cotg}\operatorname{am}(K-u) &= k_1 \operatorname{Tg}\operatorname{am} u \\
\operatorname{Cos}\operatorname{am}(K-u) &= \frac{k_1 \operatorname{Sin}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} \\
\operatorname{Sin}\operatorname{am}(K-u) &= \frac{\operatorname{Cos}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} \\
\Delta\operatorname{am}(K-u) &= \frac{k_1}{\Delta\operatorname{am} u}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (384),$$

Si l'on remplace dans ces égalités u par $-u$, on aura un nouveau groupe d'égalités, dont les seconds membres ne diffèrent de ceux de la formule (384) qu'en ce que les deux premiers sont changés de signe [n° 148, *rem.*].

155. De la formule (376) on tirera

$$d\alpha = -kk_1 \cdot \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\Delta\varphi} \cdot du \quad \ldots\ldots \quad (385),$$

et, après avoir éliminé φ,

$$du = -\frac{d\alpha}{\sqrt{k^2 - \operatorname{Sin}^2\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (386),$$

égalité qui exprime l'élément d'arc du en fonction de son inclinaison α sur l'axe O_1A_1 et de la différentielle $d\alpha$.

156. Si l'on désigne par r le rayon de courbure de l'arc u, on tirera de la formule (385) à l'aide de la formule (378) $\left[\text{puisque } \frac{du}{-d\alpha} = r\right]$:

$$\frac{1}{r} = \frac{kk_1 \operatorname{Sin}\varphi}{\Delta\varphi} = k \operatorname{Sin} x \quad \ldots\ldots \quad (387),$$

d'où s'ensuivra la *construction* du rayon de courbure r, étant donnée une des quantités x, φ ou u [n° 151].

Si l'on introduit dans la formule (379) r au lieu de x, on trouvera à l'aide de la formule précédente,

$$du = \frac{-dr}{\sqrt{(kr)^2 - 1}\sqrt{1 + (k_1 r)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (388),$$

formule qui exprime l'élément d'arc du en fonction du rayon de courbure r et de sa différentielle. En posant

$$kr = \operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Cos} i\gamma = \tfrac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma}) \quad \ldots\ldots \quad (389),$$

on tirera de la formule (388) l'équation différentielle suivante

$$diu = \frac{d\downarrow}{\sqrt{1-k_1^2 \operatorname{Sin}^2 \downarrow}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (390),$$

où la quantité $\downarrow$ variera de 0 à $i\infty$, tandis que kr varie de son minimum 1 au point M à son maximum ∞ au point A_1 ou O_1. Donc, en faisant partir u du point M comme origine, on aura, par conséquent, $iu = \int_0^{i\gamma} \frac{d\downarrow}{\Delta_{k_1} \downarrow}$ ou, ce qui est la même chose,

$$\downarrow = i\gamma = \operatorname{am}_{k_1}(iu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (391),$$

les valeurs $\gamma = 0$ et $\gamma = \infty$ correspondant aux valeurs $u = 0$ et $u = K$. Pour construire la fonction $\operatorname{am}_{k_1}(iu)$, on aura donc la règle suivante:

La courbe O_1MA_1 étant construite pour le paramètre complémentaire k, on portera sur cette courbe, à partir du point M comme origine, la valeur u, *à l'extrémité de laquelle on abaissera l'ordonnée* y, *ce qui fera connaître l'abscisse* x; *d'après cela, on construira* $kr = \frac{1}{\operatorname{Sin} x}$ *[(387)] et enfin* $\gamma = \operatorname{Arc\,Ch}(kr)$ *[(389)]; donc on trouvera la fonction* $i\gamma$ *ou* $\operatorname{am}_{k_1}(iu)$.

De l'égalité $\operatorname{Cos} i\gamma = kr$ résultera la construction des fonctions $\operatorname{Sin} i\gamma = i\sqrt{(kr)^2-1}$ et $\Delta\, i\gamma = \sqrt{k_1^2 + k^4 r^2}$.

Si l'on pose $x = \frac{1}{2}\pi + \chi$, lorsque $\chi = 0$ correspond aux valeurs $\downarrow = 0$ et $u = 0$, on aura, d'après la formule (379),

$$\chi = \operatorname{am} u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (392).$$

En comparant les formules (387) et (389) on trouvera

$$\operatorname{Cos} \downarrow = \frac{1}{\operatorname{Cos} \chi}$$

ou, qui est la même chose [(391), (392)],

$$\operatorname{Cos} \operatorname{am}_{k_1}(iu) = \frac{1}{\operatorname{Cos} \operatorname{am}_k(u)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (393),$$

d'où résulte

$$\operatorname{Sin} \operatorname{am}_{k_1}(iu) = i \operatorname{Tg} \operatorname{am}_k(u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (394),$$

formule qui pourra se déduire aussi de la formule (361).

157. Si on pose $x+\varphi=\varphi_0$ [voir fig. 16], la formule (370) pourra s'écrire

$$\operatorname{Tg}(\varphi_0-\varphi)=k_1\operatorname{Tg}\varphi \quad \ldots\ldots \quad (395),$$

où φ_0 variera de 0 à π tandis que φ varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$. Selon la "transformation de LANDEN" on aura donc

$$du=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{1}{1+k_1}\cdot\frac{d\varphi_0}{\sqrt{1-k_0^2\operatorname{Sin}^2\varphi_0}} \quad \ldots \quad (396),$$

où l'on doit observer, d'après la formule (367), que $1+k_1=2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega$ et que

$$k_0=\frac{1-k_1}{1+k_1}=\operatorname{Tg}^2\tfrac{1}{2}\omega=\operatorname{Sin}\omega_0 \quad \ldots\ldots \quad (397).$$

Alors, si l'on construit pour le paramètre k_0 l'arc $O_1b''A_1=2K_0$ [fig. 16], et que l'on porte sur cet arc l'arc $O_1b''=u_0$ correspondant à l'amplitude φ_0 [n° 151], il s'ensuit de la formule (396) que $2u\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega=u_0$ et par conséquent, puisque $\varphi_0=\pi$ en même temps que $\varphi=\frac{1}{2}\pi$,

$$K=\frac{K_0}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (398).$$

De la même manière on trouvera $K_0=\dfrac{K_{00}}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega_0}$, etc., et enfin $\lim K_{00}\ldots=\frac{1}{2}\pi=O_1B$ [voir fig. 16]; donc

$$K=\frac{\frac{1}{2}\pi}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega_0\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega_{00}\ldots} \quad \ldots\ldots \quad (399).$$

La figure (16) nous fournira donc une image très-claire de la transformation de LANDEN.

Remarque. Si l'on suppose, dans la formule (366), que ϱ_m décrit un cercle, le centre étant à l'origine, on en déduira aussi des formules d'où l'on tirerait une construction géométrique des fonctions elliptiques [voir: En grupp formler etc., af G. DILLNER, Kongl. Vet.-Akademiens Handlingar, 1864].

Application au pendule simple.

158. La construction géométrique des fonctions elliptiques que nous venons de donner aura une très-belle application au *pendule simple.*

En effet, soit l la longueur du pendule, g l'accélération et λ l'angle que fait le pendule avec la verticale dirigée suivant la pesanteur; donc on aura la formule connue

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \operatorname{Sin} \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (400)$$

et, d'après avoir intégré une fois,

$$dt = \frac{d\lambda}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4g}{l} \cdot \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (401),$$

v_0 étant la vitesse angulaire du pendule à l'instant où il passe par la verticale. Maintenant, on distinguera les trois cas suivants:

1° $lv_0^2 < 4g$, c'est-à-dire, *l'accélération centripète sur la verticale étant* $< 4g$.

Si l'on fait, en intégrant la formule (400), $\lambda \max. = \mu$, on aura

$$v_0^2 = \frac{4g}{l} \cdot \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (402),$$

d'où l'intégrale (401) pourra s'écrire, en faisant $t = 0$ pour $\lambda = \mu$,

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt = \frac{-d\tfrac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\mu - \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (403).$$

En comparant cette formule avec la formule (386), on aura les relations très-simples:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (404),$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 2\alpha \\ \mu &= 2\omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (405).$$

Donc, pour construire l'angle λ *que fait le pendule avec la verticale, on portera sur l'arc* O_1MA_1 *la valeur* $u = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$ *[fig. 16], la courbe* O_1MA_1 *étant supposée construite pour le paramètre* $k = \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\mu$; *alors l'angle*

λ *sera égal à 2 fois l'inclinaison* α *de l'élément d'arc* du *sur l'axe* O_1A_1 *au point* u.

Si l'on appelle T la durée d'une oscillation, c'est-à-dire, le temps qu'emploie le pendule pour aller de μ à $-\mu$, on aura suivant les formules (363) et (404),

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\mu + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \mathrm{Sin}^4\tfrac{1}{2}\mu + \ldots\right\} \ldots (406),$$

formule qui exprime exactement la durée d'une oscillation.

2° $lv_0^2 = 4g$ c'est-à-dire, *l'accélération centripète sur la verticale étant* $= 4g$.

Pour ce cas, on a suivant la formule (402) $\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\mu = 1$ ou $\mu = \pi$; alors la courbe O_1MA_1 coïncidera avec les perpendiculaires infinies O_1D et A_1E [fig. 16]. Donc, on aura constamment $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ et par suite $\lambda = \pi$ [(405)], c'est-à-dire, le pendule n'oscillera pas, mais sera en équilibre dirigé vers le zénith.

3° $lv_0^2 > 4g$, c'est-à-dire, *l'accélération centripète sur la verticale étant* $> 4g$.

Pour ce cas, nous poserons dans la formule (401)

$$\frac{4g}{lv_0^2} = k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (407),$$

d'où résultera l'équation différentielle suivante, en faisant $t = 0$ pour $\lambda = 0$,

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = \frac{d\tfrac{1}{2}\lambda}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\lambda}} \quad \ldots\ldots \quad (408).$$

En comparant cette formule avec la formule (351), on en tire les relations très-simples,

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (409),$$

$$\lambda = 2\varphi = 2\,\mathrm{am}\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \quad \ldots\ldots \quad (410).$$

Donc, *pour construire l'angle* λ *que fait le pendule avec la verticale, on portera sur l'arc* $O_1MA_1 \ldots$ *la valeur* $u = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$ *[fig. 16], la courbe* $O_1MA_1 \ldots$ *étant supposée construite pour le paramètre* $k = \frac{2}{v_0}\sqrt{\frac{g}{l}}$; *alors*

l'angle λ *sera égal à 2 fois l'amplitude* φ *correspondante à la valeur* u. Puisque φ croît avec u à l'infini, on en conclut que le pendule tournera incessamment autour de son point de suspension. Si l'on appelle T_1 la durée d'une révolution entière, on tire de la formule (409),

$$T_1 = 2k\sqrt{\frac{l}{g}}.K = k\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\ldots\right\} \quad \ldots (411).$$

Périodicité des fonctions elliptiques.

159. Prenons pour point de départ l'équation différentielle (360) ou

$$du = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-k^2\eta^2}}$$

et son intégrale générale

$$u = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-k^2\eta^2}} \quad \ldots\ldots (412);$$

alors, on aura, suivant la formule (357),

$$\eta = \text{Sin am } u \quad \ldots\ldots (413),$$

où $\text{Sin am } 0 = 0$ [(356)] et $\text{Sin am}(-u) = -\text{Sin am } u$ [(365)].

Maintenant, on a dans la formule (412) quatre points d'embranchement $\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\} = \pm 1$ et $\left.\begin{matrix}a_3\\a_4\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{k}$; donc, la fonction $\text{Sin am } u$ sera, d'après le n° 57, *doublement périodique*. En effet, si l'on pose $f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-k^2\eta^2}}$, on aura suivant les n°s 33 et 34 pour $\gamma = -1$, $f_1(\eta) = \frac{f(\eta)}{\gamma}$, $f_2(\eta) = f(\eta)$, d'où résulteront suivant la formule (74) les *périodoïdes* [(363)],

$$\left.\begin{aligned}\omega_{(1)} &= \int^{|a_1|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^1 f(\eta)\,d\eta = 2K\\ \omega_{(2)} &= \int^{|a_2|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^{-1} f(\eta)\,d\eta = -2K\end{aligned}\right\} \quad \ldots (414),$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_{(3)} &= \int^{|a_3|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^{\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta = 2K+2\int_1^{\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta\\ \omega_{(4)} &= \int^{|a_4|} f(\eta)\,d\eta = 2\int_0^{-\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta = -2K-2\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta\end{aligned}\right\} \quad \ldots (415).$$

Or, en comparant les formules (360) et (362) et ayant égard à la relation (359) ou $k_1\sigma = \sqrt{1-k^2\eta^2}$ entre les limites de l'intégration, on trouvera, à l'aide de la formule (364),

$$\int_1^{\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta = \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta = i\int_1^0 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-k_1^2\sigma^2}} = -iK_1 \ldots (416).$$

Donc, la formule (415) deviendra

$$\left.\begin{aligned} \omega_{(3)} &= 2K - 2iK_1 \\ \omega_{(4)} &= -2K - 2iK_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (417).$$

Les valeurs *spéciales* de l'intégrale (412), correspondantes à ces quatre périodoïdes, deviendront suivant la formule (73)

$$u_{(1)} = u_{(2)} = u_{(3)} = u_{(4)} = -u_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (418),$$

la quantité u_0 désignant l'intégrale principale.

Puisque, d'après le n° 57, $\omega_{(1,2)}$, $\omega_{(1,3)}$ et $\omega_{(1,4)}$ représentent les périodes et que la troisième de ces valeurs provient de l'addition des deux premières, on aura ces périodes distinctes

$$\left.\begin{aligned} \omega_{(1,2)} &= \omega_{(1)} - \omega_{(2)} = 4K \\ \omega_{(1,3)} &= \omega_{(1)} - \omega_{(3)} = 2iK_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (419).$$

160. Donc, toutes les valeurs possibles que pourra recevoir l'intégrale générale (412) s'exprimeront, à l'aide des formules (414), (417) et (419) par la formule suivante,

$$u = (-1)^n u_0 + 2nK + 2miK_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (420),$$

m et n étant des entiers quelconques ou zéro. La formule (413) pourra, par conséquent, s'écrire de la manière suivante,

$$\eta = \operatorname{Sin\,am}\, u = (-1)^n \cdot \operatorname{Sin\,am}\,(u_0 + 2nK + 2miK_1) \ldots (421),$$

la périodicité de $\operatorname{Sin\,am}\, u$ étant ainsi établie.

161. D'après la formule (394) on a

$$\operatorname{Sin\,am}_{k_1}(iu) = i \operatorname{Tg\,am}_k(u).$$

Or, d'après la formule (421) on aura, μ et ν désignant des entiers quelconques ou zéro,

$$\operatorname{Sin\,am}_{k_1}(iu) = (-1)^\nu \operatorname{Sin\,am}_{k_1}(iu_0 + 2\nu K_1 + 2\mu iK) = (-1)^\nu \operatorname{Sin\,am} i(u_0 + 2\mu K - 2\nu iK_1),$$

d'où il s'ensuit, en posant $m = -\nu$ et $n = \mu$,

$$\operatorname{Tg}\operatorname{am} u = (-1)^{-m} . \operatorname{Tg}\operatorname{am}(u_0 + 2nK + 2miK_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (422).$$

Ainsi est établie la périodicité de $\operatorname{Tg}\operatorname{am} u$.

Remarque. La périodicité de $\operatorname{Tg}\operatorname{am} u$ se déduira aussi, d'après le n° 159, de l'équation différentielle (361).

162. Puisque $\operatorname{Cos}\operatorname{am} u = \dfrac{\operatorname{Sin}\operatorname{am} u}{\operatorname{Tg}\operatorname{am} u}$, on aura d'après les formules (421) et (422),

$$\operatorname{Cos}\operatorname{am} u = (-1)^{m+n} . \operatorname{Cos}\operatorname{am}(u_0 + 2nK + 2miK_1) \quad . \quad . \quad . \quad (423),$$

ce qui établie la périodicité de $\operatorname{Cos}\operatorname{am} u$.

163. Puisque, d'après la formule (384), $\Delta\operatorname{am} u = \dfrac{\operatorname{Cos}\operatorname{am} u}{\operatorname{Sin}\operatorname{am}(K-u)}$, il s'ensuit immédiatement d'après les formules (421) et (423),

$$\Delta\operatorname{am} u = (-1)^m . \Delta\operatorname{am}(u_0 + 2nK + 2miK_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (424).$$

ce qui donne la périodicité de $\Delta\operatorname{am} u$.

Remarque. La périodicité de $\Delta\operatorname{am} u$ pourra aussi se déduire, suivant le n° 159, de l'équation différentielle (362).

Quelques autres propriétés des fonctions elliptiques.

164. D'après la formule (351) on aura la règle de différentiation suivante pour la fonction $\operatorname{am} u$,

$$(\operatorname{am} u)' = \Delta\operatorname{am} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (425),$$

d'où s'ensuit immédiatement la règle de différentiation des fonctions $\operatorname{Sin}\operatorname{am} u$, $\operatorname{Cos}\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$, etc.

Puisque, d'après la formule (391) $\operatorname{am}_{k_1}(iK) = i\infty$, et par suite

$$\operatorname{am}_k(iK_1) = i\infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (426),$$

la fonction $\operatorname{am} u$ sera développable en une série convergente suivant la formule (88), pour $\sigma = 2$, le rayon du cercle de convergence étant $< K_1$.

165. Des formules (384) et (393) résulteront les transformations suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin\,am}(u \pm iK_1) &= \frac{1}{k \operatorname{Sin\,am} u} \\ \operatorname{Cos\,am}(u \pm iK_1) &= \frac{\mp i \,\Delta\operatorname{am} u}{k \operatorname{Sin\,am} u} \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm iK_1) &= \mp i \operatorname{Cotg\,am} u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (427),$$

d'où il s'ensuit immédiatement que les fonctions $\operatorname{Sin\,am} u$, $\operatorname{Cos\,am} u$ et $\Delta\operatorname{am} u$ ont les *mêmes* infinis, ou que

$$\left.\begin{aligned} \infty = \operatorname{Sin\,am}[2nK + (2m+1)iK_1] &= i \operatorname{Cos\,am}[2nK + (2m+1)iK_1] \\ &= i\,\Delta\operatorname{am}[2nK + (2m+1)iK_1] \end{aligned}\right\} \ldots (428).$$

Au contraire, ces mêmes fonctions ont les zéros suivants [(384) et (427)],

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Sin\,am}[2nK + 2miK_1] \\ 0 &= \operatorname{Cos\,am}[(2n+1)K + 2miK_1] \\ 0 &= \Delta\operatorname{am}[(2n+1)K + (2m+1)iK_1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (429).$$

Remarque. Les fonctions $\operatorname{Sin\,am} u$, $\operatorname{Cos\,am} u$ et $\Delta\operatorname{am} u$ ont le même cercle de convergence que $\operatorname{am} u$ [n° 164], quand $\operatorname{Sin\,am} u$, étant une fonction impaire, sera développable suivant la formule (88) pour $\sigma = 2$; les deux fonctions $\operatorname{Cos\,am} u$ et $\Delta\operatorname{am} u$, étant paires, se développeront, au contraire, suivant la formule (86) pour $\sigma = 2$. Mais, le développement le plus convenable de ces trois fonctions sera celui que nous ferons plus loin en produits infinis.

"Théorème d'addition" des fonctions elliptiques.

166. Si l'on pose suivant la formule (114)

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 = \operatorname{Sin\,am} u_1,\ \xi_1 = \sqrt{1-\eta_1^2} = \operatorname{Cos\,am} u_1,\ \Delta_1 = \sqrt{1-k^2\eta_1^2} = \Delta\operatorname{am} u_1 \\ \eta_2 = \operatorname{Sin\,am} u_2,\ \xi_2 = \sqrt{1-\eta_2^2} = \operatorname{Cos\,am} u_2,\ \Delta_2 = \sqrt{1-k^2\eta_2^2} = \Delta\operatorname{am} u_2 \end{aligned}\right\} \ldots (430),$$

et suivant la formule (115)

$$\left.\begin{aligned} \eta_3 &= -\operatorname{Sin\,am}(u_1+u_2) \\ \xi_3 &= \operatorname{Cos\,am}(u_1+u_2) \\ \Delta_3 &= \Delta\operatorname{am}(u_1+u_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (431),$$

on aura d'après la formule (107), pour $\sigma = 2$, $n = 1$, $m = 2$, $\mu = 1$ et $g = \mu\sigma + 1 = 3$, le système d'équations suivant,

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(\alpha_0 + \alpha_1\eta_1^2) &= \xi_1\Delta_1 \\ \eta_2(\alpha_0 + \alpha_1\eta_2^2) &= \xi_2\Delta_2 \\ \eta_3(\alpha_0 + \alpha_1\eta_3^2) &= \xi_3\Delta_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (432),$$

où les quantités u_1 et u_2 sont *indépendantes* [n° 72, *rem. 1*]. De ce système on tirera, en éliminant α_0,

$$-\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\eta_1\eta_2(\eta_1\xi_2\Delta_2 + \eta_2\xi_1\Delta_1)}{1 - k^2\eta_1^2\eta_2^2} = \frac{\eta_1\eta_3(\eta_1\xi_3\Delta_3 + \eta_3\xi_1\Delta_1)}{1 - k^2\eta_1^2\eta_3^2} = \frac{\eta_2\eta_3(\eta_2\xi_3\Delta_3 + \eta_3\xi_2\Delta_2)}{1 - k^2\eta_2^2\eta_3^2} \quad \ldots (433).$$

De plus, le système (432) pourra s'écrire, à l'aide de la formule (430), sous les deux formes suivantes,

$$\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1\right) = \xi_1\left(\xi_1 + \frac{\Delta_1}{\alpha_1\eta_1}\right) = \xi_2\left(\xi_2 + \frac{\Delta_2}{\alpha_1\eta_2}\right) = \xi_3\left(\xi_3 + \frac{\Delta_3}{\alpha_1\eta_3}\right) \quad \ldots \quad (434),$$

$$\left(k^2\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1\right) = \Delta_1\left(\Delta_1 + \frac{k^2\xi_1}{\alpha_1\eta_1}\right) = \Delta_2\left(\Delta_2 + \frac{k^2\xi_2}{\alpha_1\eta_2}\right) = \Delta_3\left(\Delta_3 + \frac{k^2\xi_3}{\alpha_1\eta_3}\right) \ldots (435).$$

Or, suivant la formule (103), on aura l'identité suivante

$$F(\eta) = (1-\eta^2)(1-k^2\eta^2) - [\eta(\alpha_0 + \alpha_1\eta^2)]^2 = -\alpha_1^2(\eta^2-\eta_1^2)(\eta^2-\eta_2^2)(\eta^2-\eta_3^2) \ldots (436),$$

d'où l'on tire, pour $\eta = 0$, $\eta = 1$ et $\eta = \frac{1}{k}$, les formules respectives

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = (\eta_1\eta_2\eta_3)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (437),$$

$$\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1\right)^2 = (\xi_1\xi_2\xi_3)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (438),$$

$$\left(k^2\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1\right)^2 = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (439).$$

Dans ces trois formules on mettra le signe + devant chacun des deux membres en extrayant la racine carrée, puisque les systèmes (433), (434) et (435) ne seront satisfaits, pour des petites valeurs de u_1 et u_2, que sous cette condition. Donc, nous aurons les *identités* suivantes comme exprimant le *théorème d'addition des fonctions elliptiques* *):

*) Cfr Traité élémentaire des fonctions elliptiques, par O. J. BROCH, travail qui contient une très-grande richesse des formules concernant le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

1° En combinant les formules (433) et (437), on aura

$$-1 = \frac{\eta_1\xi_2\,\Delta_2 + \eta_2\xi_1\,\Delta_1}{\eta_3(1-k^2\eta_1^2\eta_2^2)} = \frac{\eta_1\xi_3\,\Delta_3 + \eta_3\xi_1\Delta_1}{\eta_2(1-k^2\eta_1^2\eta_3^2)} = \frac{\eta_2\xi_3\,\Delta_3 + \eta_3\xi_2\,\Delta_2}{\eta_1(1-k^2\eta_2^2\eta_3^2)} \ldots (440).$$

2° En combinant les formules (434) et (438), on aura, à l'aide de la formule (437),

$$1 = \frac{\xi_1 + \eta_2\eta_3\,\Delta_1}{\xi_2\xi_3} = \frac{\xi_2 + \eta_1\eta_3\,\Delta_2}{\xi_1\xi_3} = \frac{\xi_3 + \eta_1\eta_2\,\Delta_3}{\xi_1\xi_2} \quad \ldots\ldots (441).$$

3° En combinant les formules (435) et (439), on aura, à l'aide de la formule (437),

$$1 = \frac{\Delta_1 + k^2\eta_2\eta_3\,\xi_1}{\Delta_2\,\Delta_3} = \frac{\Delta_2 + k^2\eta_1\eta_3\,\xi_2}{\Delta_1\,\Delta_3} = \frac{\Delta_3 + k^2\eta_1\eta_2\,\xi_3}{\Delta_1\,\Delta_2} \quad \ldots\ldots (442).$$

4° En combinant les formules (438) et (439), on aura enfin

$$k_1^2 = \Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3 - k^2\xi_1\xi_2\xi_3 \quad \ldots\ldots\ldots (443).$$

Parmi ces formules nous distinguerons les suivantes qui se trouvent ordinairement dans les ouvrages qui traitent de ce sujet. En prenant les membres extrêmes de la formule (441), on aura

$$\text{Cos am}(u_1+u_2) = \text{Cos am}\,u_1\,\text{Cos am}\,u_2 - \text{Sin am}\,u_1\,\text{Sin am}\,u_2\,\Delta\,\text{am}(u_1+u_2) \ldots (444).$$

De plus, en prenant les membres extrêmes de la formule (442), on aura

$$\Delta\,\text{am}(u_1+u_2) = \Delta\,\text{am}\,u_1\,\Delta\,\text{am}\,u_2 - k^2\,\text{Sin am}\,u_1\,\text{Sin am}\,u_2\,\text{Cos am}(u_1+u_2) \ldots (445).$$

Enfin, en prenant les deux premiers membres de la formule (440), on aura, à l'aide des formules (444) et (445),

$$\left.\begin{aligned}
\text{Sin am}(u_1+u_2) &= \frac{\text{Sin am}\,u_1\,\text{Cos am}\,u_2\,\Delta\,\text{am}\,u_2 + \text{Sin am}\,u_2\,\text{Cos am}\,u_1\,\Delta\,\text{am}\,u_1}{1-k^2\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_1\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_2} \\
\text{Cos am}(u_1+u_2) &= \frac{\text{Cos am}\,u_1\,\text{Cos am}\,u_2 - \text{Sin am}\,u_1\,\text{Sin am}\,u_2\,\Delta\,\text{am}\,u_1\,\Delta\,\text{am}\,u_2}{1-k^2\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_1\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_2} \\
\Delta\,\text{am}(u_1+u_2) &= \frac{\Delta\,\text{am}\,u_1\,\Delta\,\text{am}\,u_2 - k^2\,\text{Sin am}\,u_1\,\text{Sin am}\,u_2\,\text{Cos am}\,u_1\,\text{Cos am}\,u_2}{1-k^2\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_1\,\text{Sin}^2\,\text{am}\,u_2}
\end{aligned}\right\} \ldots (446).$$

Remarque 1. Si l'on pose $\text{am}\,u = \alpha$, $\text{am}\,v = \beta$ et $\text{am}(u+v) = \gamma$, et, de plus, $\text{Sin}\,C = k\,\text{Sin}\,\gamma$, on aura suivant la formule (444) $\text{Cos}\,\gamma = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,C$, d'où il s'ensuit d'après la "con-

struction de LAGRANGE", pour $k = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} \alpha} < 1$, que α, β et γ sont les côtés d'un triangle sphérique, A, B et C étant les angles opposés. Donc, *étant donnés deux côtés α et β d'un triangle sphérique et un angle opposé A, on pourra construire le troisième côté γ.* En effet, on pourra, d'après la fig. 16 pour $k = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} \alpha}$, construire la courbe $O_1 M A_1$; en y portant les valeurs u et v [n° 151], correspondantes aux amplitudes α et β, et ensuite la somme $u + v$, l'amplitude correspondante γ sera le *troisième côté du triangle sphérique.*

Remarque 2. Maintenant il nous sérait possible d'étendre nos recherches sur les fonctions périodiques, qui proviennent d'une quelconque des équations différentielles comprises dans la formule générale $du = \frac{(b_0 + b_1 z^\sigma + \dots b_r z^{r\sigma}) dz}{\sqrt[\sigma]{(a_0 + a_1 z^\sigma + \dots a_m z^{m\sigma})^n}}$ [(117)], en possédant les moyens les plus généraux de préciser leurs propriétés fondamentales, comme leur périodicité (VIII), leur théorème d'addition (X), leur développement en séries (VII), etc. Mais il faut que nous laissions de côté toutes recherches ultérieures de ce genre en abordant, une autre fois, notre sujet de quelques points de vue nouveaux.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA.

Page 1, ligne 16, *au lieu de* $f(z) = \frac{(z-a)^n}{1 + e^{\frac{1}{z-a}}}$, *lisez* $f(z) = \frac{(z-a)^n}{1 + e^{\frac{1}{z-a}}}$ [n = un entier positif].

Page 24, ligne 9, *au lieu de* $\frac{\mathfrak{F}(t)}{(z-t)^{r+1}}$, *lisez* $\frac{\mathfrak{F}(z)}{(z-t)^{r+1}}$.

Page 86, ligne 13, *au lieu de* $T^{-1}((z))$, *lisez* $T^{-1}((-z))$.

Page 112, avant-dernière ligne, *au lieu de* autre, *lisez* aura.

Corrigenda.

[Traité de Calc. géom. supérieur.]

Page 76, ligne 12, *au lieu de* $\mathrm{Sin}^{-1}(z) + 2\varkappa\pi =$, *lisez* $\mathrm{Sin}^{-1}(z) + 2\varkappa\pi, =$.

„ „ „ 14, *au lieu de* $\mathrm{Arc\,Sin}\,(z) + 2\varkappa\pi =$, *lisez* $\mathrm{Arc\,Sin}\,(z) + 2\varkappa\pi, =$.

„ 91, „ 1 et 2, *lisez* la lettre $\mathfrak{v}$ représentant ici la quantité $\gamma^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}$ et $\mathfrak{v}_1$ la quantité etc.

„ 94, „ 11, *au lieu de* $V^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r =$, *lisez* $V^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r, =$.

„ 96, „ 23, *au lieu de* $(1-\zeta^3)^{\frac{5}{3}}$, *lisez* $(1+\zeta^3)^{\frac{1}{3}}$.

„ „ „ 25 etc. *lisez* en remplaçant w par la quantité $\mathfrak{w} = \gamma^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}$ et w_1 par la quantité $\mathrm{w}_1 = 3^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{w}_{\frac{1}{6}\pi}$. Donc etc.

„ 101, „ 9, *au lieu de* $W^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r =$, *lisez* $W^{-1}(z) + \sum_{r=1}^{r=6} \varkappa_r \Omega_r, =$.

„ „ *au lieu de la formule (275) doit être* $W_1^{-1}((z)) + W^{-1}((z)) = \mathrm{w}$.

„ 105, ligne 25, *au lieu de* $\sigma = 3$, *lisez* $\sigma = 2$.

„ 130, ligne dernière, *au lieu de* $-2K - 2\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta$, *lisez* $-2K + \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} f(\eta)\,d\eta$.

MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 04132